DS02 – Électrocinétique

Durée : 4 h.
L'usage de la calculatrice est AUTORISÉ.

Si au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

RCO Des questions de cours sont identifiées dans le sujet par le sigle RCO dans la marge.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d'initiative seront valorisées.

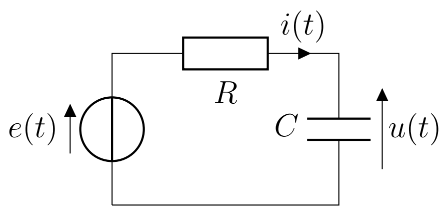
Critères d'évaluation de la présentation

Présentation générale	La copie est propre, aérée et lisible. L'orthographe est correcte. Les expressions littérales sont encadrées et les A.N. soulignées. Les pages sont numérotées.
Rédaction	Le vocabulaire scientifique est précis. Les réponses sont claires, explicites et succinctes. Les lois, principes et théorèmes utilisés sont nommés.
Schémas	Les schémas sont suffisamment grands : plus petit que la carte étudiant = invisible. Les schémas sont soignés : règle et compas. Utilisation pertinente de la couleur.
Expressions littérales	Le résultat est celui demandé par l'énoncé. Les notations de l'énoncé sont respectées. Les expressions sont homogènes. Respect des notations : grandeurs algébriques, vectorielles, scalaires, etc. Pas de mélange entre les A.N. et E.L.
Applications numériques	La valeur numérique est accompagnée de son unité. L'A.N. est complète : pas de fraction restante, etc. Le nombre de chiffres significatifs est adapté. Les conversions sont effectuées correctement.
Représentations graphiques	Le graphique est suffisamment grand. Les axes sont tracés à la règle, nommés et les unités sont indiquées (si A.N.). Les limites et valeurs notables, les comportements asymptotiques sont respectés. Les courbes sont tracées à main levée, les droites à la règle, etc.

Exercice 1 – Amélioration du rendement de charge d'un condensateur

Les condensateurs peuvent être utilisés comme moyens temporaires de stockage d'énergie. Les condensateurs usuels présentent toutefois des capacités trop faibles pour un stockage efficace. On peut alors avoir recours à des supercondensateurs, dont la capacité peut atteindre quelques milliers de farads.

On cherche à charger efficacement un tel condensateur de capacité C à l'aide d'un générateur réel de force électromotrice $e(t)$ et de résistance interne R. On note $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur et $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit.



Charge rapide

On commence par une charge rapide du condensateur, en une seule étape : le condensateur est initialement déchargé et le générateur délivre un échelon de tension entre 0 et E à l'instant $t = 0$:

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0, \\ E & \text{pour } t \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de $u(t)$ et $i(t)$ aux instants $t = 0^-$ et $t = 0^+$. Justifier soigneusement.
2. Déterminer les valeurs de $u(t)$ et $i(t)$ au bout d'un temps très long. Justifier, notamment à l'aide d'un circuit équivalent.

RCO 3. Pour $t \geqslant 0$, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$. L'écrire sous forme canonique pour faire apparaitre un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression.

RCO 4. La résoudre pour obtenir l'expression de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur pour $t \geqslant 0$. Montrer que l'intensité $i(t)$ s'exprime.

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

5. Établir l'expression du temps T à partir duquel la charge du condensateur diffère de moins de 1 % de sa charge finale, en fonction de τ.

   Par la suite, on considèrera la charge du condensateur terminée après une durée T.

RCO 6. Établir l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_C(t)$ stockée par le condensateur en fonction de la tension $u(t)$ à ses bornes. En déduire l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_{C,f}$ stockée par le condensateur à la fin de la charge.

7. Donner l'expression de la puissance $\mathcal{P}_\mathrm{g}(t)$ fournie par le générateur pendant la charge, en fonction de E et $i(t)$. En déduire l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_\mathrm{g}$ fournie par le générateur pendant la charge. On rappelle que

$$\mathcal{E}_\mathrm{g} = \int_0^\infty \mathcal{P}_\mathrm{g}(t) \cdot \mathrm{d}t.$$

8. Exprimer enfin le rendement η_1 de la charge du condensateur. Quelle fraction de l'énergie fournie par le générateur est alors perdue ? Que devient-elle ?

Charge fractionnée en deux étapes

Pour améliorer le rendement de charge, on procède en deux étapes :

- étape 1 : à l'instant $t_0 = 0$, le générateur délivre un échelon de tension entre 0 et $E/2$;
- étape 2 : à l'instant $t_1 = T$, une fois la première charge terminée, la tension aux bornes du générateur passe à E.

9. Par analogie avec les résultats précédents, exprimer l'énergie $\mathcal{E}_{\mathrm{g},1}$ fournie par le générateur pendant la première étape. De même, exprimer l'énergie $\mathcal{E}_{C,1}$ stockée par le condensateur au cours de la première étape.

10. Donner l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ pendant la deuxième étape de la charge. La résoudre pour exprimer la tension $u(t)$ pendant la deuxième étape de la charge.

11. En déduire l'expression de l'intensité $i(t)$ pendant la deuxième étape de la charge.

12. Représenter graphiquement les allures de $u(t)$ et $i(t)$ sur l'intervalle $[-T, 3T]$.

13. Établir les expressions de l'énergie $\mathcal{E}_{\mathrm{g},2}$ fournie par le générateur et de l'énergie $\mathcal{E}_{C,2}$ emmagasinée par le condensateur au cours de la deuxième étape de la charge, c'est-à-dire entre T et $2T$, en fonction de C et E.

14. En déduire l'expression du rendement η_2 global pour la charge fractionnée en deux étapes. Commenter et interpréter.

Charge fractionnée en N étapes

Le condensateur est à nouveau initialement déchargé et on découpe maintenant la charge en N étapes. À chaque étape, une fois le condensateur chargé, la tension aux bornes du générateur est incrémentée de E/N :

- étape 1 ($k = 1$) : le générateur fournit un échelon de tension à l'instant $t_1 = 0$ entre 0 et E/N ;
- étape 2 ($k = 2$) : à l'instant t_2, la tension aux bornes du générateur passe à $2E/N$;
- étape k : à l'instant t_k, la tension aux bornes du générateur passe à kE/N ;
- étape N ($k = N$) à l'instant t_N, la tension aux bornes du générateur passe finalement à E.

15. En utilisant les résultats précédents, déterminer l'expression de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur lors de la k-ième étape de la charge, c'est-à-dire dans l'intervalle $[t_k, t_{k+1}[$. En déduire l'expression de l'intensité $i(t)$.

16. Établir l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_{\mathrm{g},k}$ fournie par le générateur pendant la k-ième étape de la charge en fonction de C, E, k et N.

17. En déduire l'expression de l'énergie totale $\mathcal{E}_{\mathrm{g,tot}}$ fournie par le générateur pendant toute la charge, en fonction de N, C et E, puis en fonction de N et $\mathcal{E}_{C,f}$. Justifier que l'énergie stockée par le condensateur à la fin des N étapes de la charge vaut toujours $\mathcal{E}_{C,f}$.

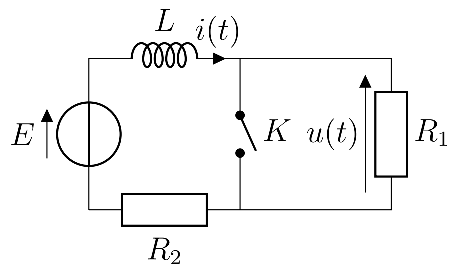
18. Exprimer enfin le rendement global η_N de la charge en N étapes et montrer qu'il tend vers 1 quand N tend vers l'infini. Commenter.

19. Calculer la durée minimale permettant de charger un supercondensateur de capacité $C = 100\,\mathrm{F}$ avec un générateur de résistance interne $R = 0{,}1\,\Omega$ avec un rendement supérieur à $95\,\%$. Et pour un rendement supérieur à $99\,\%$?

Exercice 2 – Annulation d'une surtension

Le régime transitoire associé à un circuit inductif peut faire apparaitre une surtension aux bornes de certains de ses composants. Cet effet est parfois voulu, comme dans le cas du circuit d'allumage d'un moteur à essence, ou pour l'allumage de tubes néons. Dans d'autres appareils, certains composants sont fragiles et peuvent être endommagés par une surtension trop importante.

Dans le circuit ci-contre, on assimile l'un de ces composants à une résistance R_1 et on souhaite le protéger lors de l'ouverture ou de la fermeture de l'interrupteur K. La bobine a une inductance $L = 1{,}0\,\mathrm{H}$ et la force électromotrice du générateur est $E = 12\,\mathrm{V}$. Les résistances R_1 et R_2 ont des valeurs de l'ordre de quelques kΩ.



Régime transitoire après la fermeture de l'interrupteur

On suppose que l'interrupteur est ouvert depuis suffisamment longtemps pour que le régime permanent soit atteint.

1. Justifier sans calcul qu'il ne peut y avoir de surtension aux bornes de R_1 lors de la fermeture de l'interrupteur et qu'alors, l'intensité du courant qui traverse la résistance R_1 est nulle.

Ouverture de l'interrupteur sans condensateur

On laisse l'interrupteur fermé plusieurs secondes avant de l'ouvrir à nouveau. À l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur.

2. Exprimer la tension $u(0^+)$ immédiatement après l'ouverture de l'interrupteur K. À quelle condition, une surtension apparait-elle aux bornes de la résistance R_1 ?

On admet que, pour $t \geqslant 0$, la tension $u(t)$ aux bornes de la résistance R_1 vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau_1}u(t) = \frac{u_\infty}{\tau_1} \quad \text{avec} \quad u_\infty = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad \tau_1 = \frac{L}{R_1 + R_2}.$$

On souhaite résoudre numériquement cette équation à l'aide de la méthode d'Euler explicite : on note $t_k = k\delta t$ et $u_k = u(t_k)$, où k est un entier et δt est le pas de temps choisi pour la résolution numérique.

3. En remarquant que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t_k) \approx \frac{u_{k+1} - u_k}{\delta t},$$

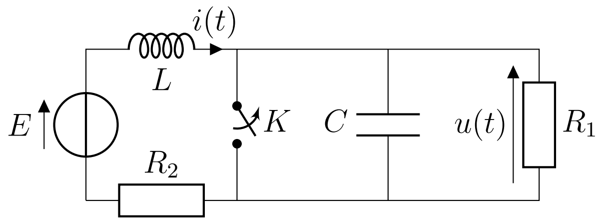
donner l'expression de u_{k+1} en fonction de u_k, u_∞, τ_1 et δt.

4. Écrire la ligne 17 du code donné en annexe (Ann. 1) **à rendre avec la copie** pour calculer numériquement les valeurs `u[k]` de u aux instants t_k.

5. La résolution numérique donne les courbes représentées en annexe (Ann. 2) **à rendre avec la copie** pour différents pas de temps $\delta t = 0{,}1\,\mathrm{ms}$ et $0{,}1\,\mu\mathrm{s}$. Commenter.
6. En exploitant la représentation graphique (Ann. 2) **à rendre avec la copie**, déterminer les valeurs de R_1 et R_2. On expliquera succinctement la méthode utilisée.

Ouverture de l'interrupteur avec condensateur

Pour éliminer la surtension aux bornes de la résistance R_1, on ajoute un condensateur de capacité C en parallèle de l'interrupteur, selon le schéma représenté ci-contre. Après avoir laissé l'interrupteur fermé plusieurs secondes, on l'ouvre à l'instant $t = 0$.



7. Justifier que la présence du condensateur ne modifie pas les valeurs de $i(t)$ et $u(t)$ en régime permanent.
8. Montrer que, en $t = 0^+$, on a

$$u(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+} = \frac{E}{R_2 C}.$$

9. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t \geqslant 0$. L'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\gamma\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{E}{LC},$$

et donner l'expression de ω_0 et du taux d'amortissement γ en fonction de R_1, R_2, L et C.

On remplace le composant résistif modélisé par la résistance R_1 par un autre, toujours sensible aux surtensions, mais dont la résistance est beaucoup plus élevée, de l'ordre du mégaohm. Pour tout ce qui suit, on a donc $R_1 \gg R_2$ et on admet que $R_2 C \gg L/R_1$.

10. Montrer qu'alors :

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \gamma \approx \frac{R_2}{2L}.$$

RCO 11. Justifier que, pour $\gamma = \omega_0$, le régime permanent est atteint aussi rapidement que possible sans dépassement. Qualifier le régime transitoire alors observé.

12. En déduire l'expression de C et faire l'application numérique. Commenter l'hypothèse selon laquelle $R_2 C \gg L/R_1$. Pour éviter un dépassement et conserver une petite marge de sécurité, vaut-il mieux choisir un condensateur de capacité légèrement plus grande ou plus faible ?

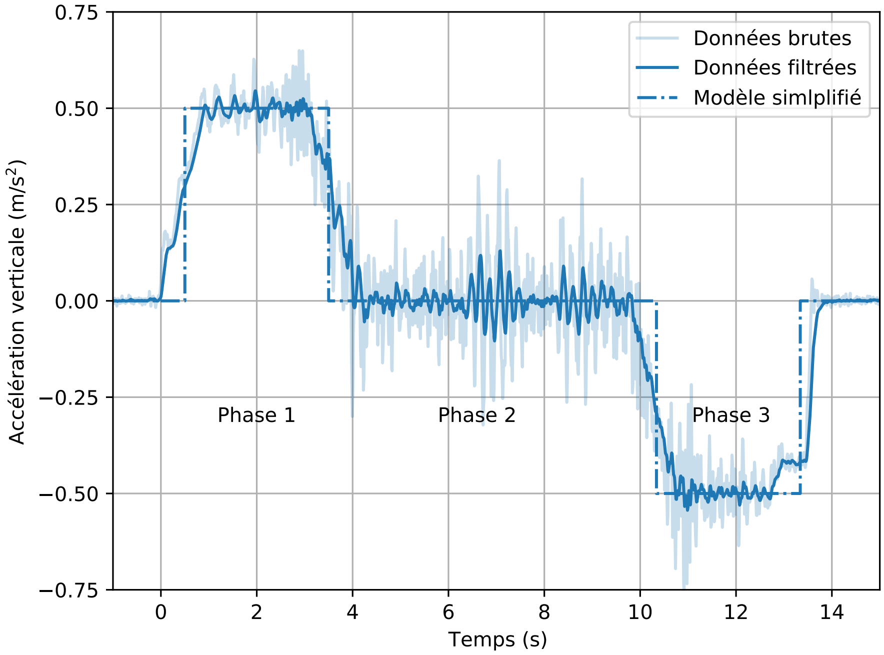
RCO 13. Résoudre l'équation différentielle dans le cas où $\gamma = \omega_0$ et donner l'expression de $u(t)$ pour $t \geqslant 0$, en fonction de E, ω_0 et t.

RCO 14. Exprimer, puis calculer l'ordre de grandeur de la durée Δt du régime transitoire.

RCO 15. Représenter graphiquement l'allure de $u(t)$ sur l'intervalle $[-\Delta t, 2\Delta t]$ en faisant notamment apparaitre $u_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} u(t)$.

Exercice 3 – Ascenseur

Pour rentrer chez lui, un physicien fatigué empreinte l'ascenseur de son immeuble depuis le rez-de-chaussé. Pendant l'ascension, il mesure son accélération à l'aide de son smartphone et obtient la courbe représentée ci-dessous. Les données brutes, bruitées, sont visibles en transparence. Un filtrage numérique permet d'obtenir des données plus propres, représentées en trait plein. Un modèle simplifié est représenté en pointillés.



Modèle simplifié

On considère dans un premier temps le modèle simplifié, où le mouvement peut être séparé en trois phases identifiées sur la représentation graphique ci-dessus. On note a_0 la valeur maximale de la norme de l'accélération. Les phases 1 et 3 ont la même durée T_a et on note T la durée de la deuxième phase.

1. Quel référentiel permet l'étude simple de ce mouvement ?
2. Décrire qualitativement le mouvement de l'ascenseur durant chacune de ces trois phases. Que peut-on dire de la norme de la vitesse pendant ces trois étapes ? Et avant la première phase ?
3. Exprimer la vitesse v_0 de l'ascenseur à la fin de la première phase en fonction a_0 et de T_a. Faire l'application numérique.
4. Exprimer, puis calculer l'altitude h_1 atteinte à la fin de la première phase.
5. De même exprimer, puis calculer l'altitude h atteinte à la fin de la troisième phase.

Estimation plus fine

6. À l'aide d'une modélisation moins grossière du profil d'accélération, proposer une nouvelle estimation de la hauteur h' et de l'étage atteints par le physicien. Commenter. On représentera aussi l'allure de l'évolution de l'accélération, de la vitesse et de l'altitude au cours de l'ascension.

Annexes

Annexe 1 – Code Python pour la méthode d'Euler explicite

```python
import numpy as np

dt = 1e-6                    # pas de temps en seconde
t  = np.arange(0,1e-3,dt) # liste des instants tk
N  = len(t)                  # nombre de valeurs tk

R1   = # À COMPLÉTER    # résistance R1 en ohms
R2   = # À COMPLÉTER    # résistance R2 en ohms
L    = 1.0                   # inductance L en henry
E    = 12                    # f.é.m. en volts
tau1 = L / (R1 + R2)         # temps caractéristique tau1 en secondes
uinf = E * R1 / (R1 + R2) # valeur de u(t) en régime permanent

u = np.zeros(N)    # création d'une liste de 0 de même longueur que t
u[0] = R1 * E / R2           # condition initiale
for k in range(N-1):         # calcul des valeurs u(tk)
    # À COMPLÉTER
```

Annexe 2 – Résolution numérique