Chapitre M3 – Énergie mécanique

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

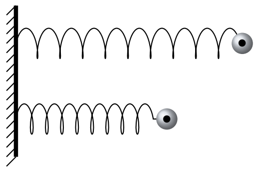
→ Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
→ Exploiter le théorème de l'énergie cinétique.
→ Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique.
→ Déduire qualitativement du graphe d'une fonction énergie potentielle le sens et l'intensité de la force associée pour une situation à un degré de liberté.
→ Exploiter la conservation de l'énergie mécanique pour analyser un mouvement.
→ Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel.
→ Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
→ Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre.
→ Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
→ Établir l'équation différentielle linéarisée du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.

Questions de cours

→ Citer les théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique.
→ Citer, puis établir les expressions des énergies potentielles de pesanteur, gravitationnelle et élastique.
→ Citer les théorèmes de la puissance mécanique et de l'énergie mécanique.
→ Identifier, sur un graphe d'énergie potentielle quelconque les positions d'équilibre stables et instables, les barrières et puits de potentiels.
→ Décrire qualitativement (par exemple, à l'aide d'un graphe commenté) l'évolution temporelle d'un système suivant son énergie mécanique, à partir d'un profil quelconque d'énergie potentielle.
→ Établir l'équation différentielle linéarisée du pendule simple en utilisant le théorème de l'énergie mécanique.

Documents

Document 1 – Énergies potentielles

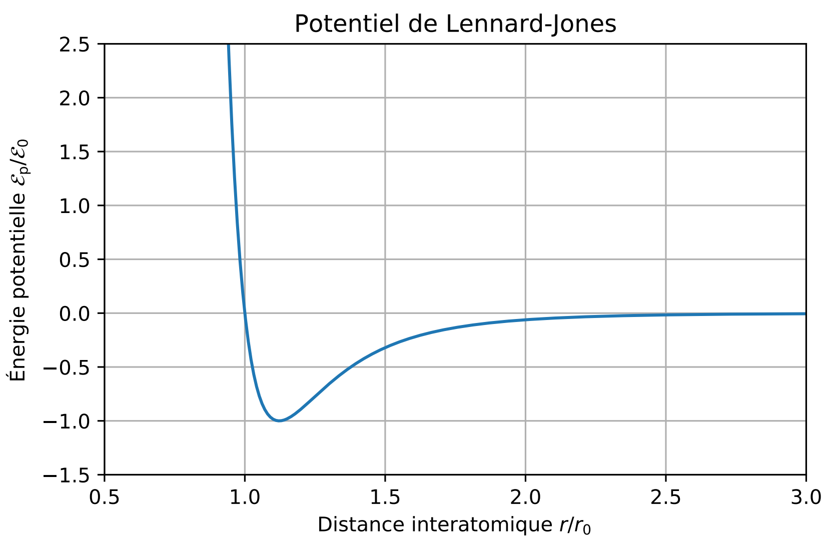
Force	Schéma	Force	Énergie potentielle
Poids		$\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$	
Force de rappel		$\overrightarrow{F_H} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_x}$	
Interaction gravitationnelle		$\overrightarrow{F_G} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$	

Document 2 – Potentiel de Lennard-Jones

Pour décrire les interactions entre atomes ou molécules, John Lennard-Jones proposa en 1924 un potentiel empirique de la forme :

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(r) = 4\mathcal{E}_0 \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6} \right],$$

où $\mathcal{E}_0$ et r_0 sont des constantes. Le terme $(r_0/r)^{12}$ modélise une répulsion à courte distance, tandis que le terme $(r_0/r)^6$ explique l'attraction due aux forces de van der Waals.



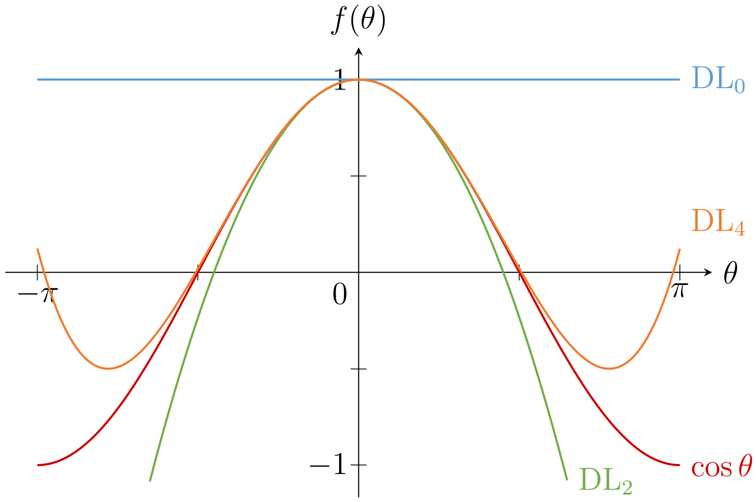
Document 3 – Un premier mot sur les développements limités

Une excellente vidéo sur le sujet : https://youtu.be/3d6DsjIBzJ4.

Dans le cadre de l'*approximation des petits angles*, nous avons vu qu'il était possible d'approcher les fonctions $\sin\theta$, $\cos\theta$ et $\tan\theta$ au voisinage de zéro, c'est-à-dire pour $\theta \ll 1$, par des expressions simples en fonction de θ. Cette approximation est le résultat d'un outils plus général, le développement limité, qui permet d'approcher une fonction, *au voisinage d'un point*, par un polynôme de degré n : on parle alors de *développement limité d'ordre* n, noté DL_n. Par exemple, le développement limité de $\cos\theta$ au voisinage de zéro s'écrit :

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{720} + \dots$$

Les termes supplémentaires améliorent la précision de l'approximation, comme on peut le voir sur la figure ci-dessous.



Il est fréquent d'approcher l'expression d'une grandeur physique à l'aide d'un développement limité pour se ramener à des équations simples : c'est notamment le cas lors de l'étude du mouvement d'un système au voisinage d'une position d'équilibre. On utilisera fréquemment les développements suivants, au voisinage de zéro :

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

De manière générale, la formule de Taylor-Young permet d'obtenir les coefficients du polynôme. Ainsi, au voisinage du point x_0,

$$f(x) \approx f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}(x-x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \left.\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x_0}\frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

Les théorèmes énergétiques obtenus dans ce chapitre se démontrent tous à partir du PFD. Ils n'ajoutent rien. Au contraire, ils entrainent une perte d'information :

- il s'agit de **relations scalaires** et non plus vectorielles ;
- les **formes intégrales** des théorèmes énergétiques ne permettent de comparer que les **états initial et final** du système, sans préciser l'évolution aux instants intermédiaires.

Il s'agit pourtant de théorèmes remarquablement efficaces pour étudier de nombreux problèmes mécaniques (App. 6).

1 Théorème de l'énergie cinétique

1.1 Puissance d'une force

Définition

La **puissance** $\mathcal{P}(\vec{F})$ d'une force $\vec{F}$ subie par un point matériel animé d'une vitesse $\vec{v}$ est définie par :

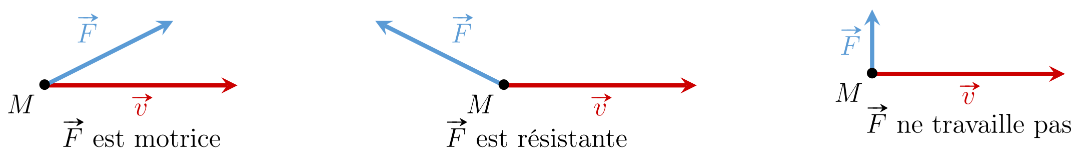
$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Rq : Puisque $\vec{v}$ dépend du référentiel, la puissance d'une force dépend du référentiel.

Propriété 1 (à démontrer)

On dit d'une force $\vec{F}$ subie par un point matériel de vitesse $\vec{v}$ qu'elle est

- **motrice** si sa puissance est positive. $\vec{F} \cdot \vec{v} > 0$: la projection de $\vec{F}$ sur $\vec{v}$ est dans le même sens que $\vec{v}$. Elle tend à **accélérer** le système ;
- **résistante** si sa puissance est négative. $\vec{F} \cdot \vec{v} < 0$: la projection de $\vec{F}$ sur $\vec{v}$ est dans le sens opposé à $\vec{v}$. Elle tend à **décélérer** le système ;
- elle **ne travaille pas** si sa puissance est nulle. $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$: soit $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{F} \perp \vec{v}$. Elle ne peut que **modifier la trajectoire** du système.



Démo : étudier le signe de $\vec{a} \cdot \vec{v}$ si le système n'est soumis qu'à $\vec{F}$ et en déduire l'évolution $\|\vec{v}\|$.

Application 1 – Caractère moteur ou résistant d'une force

En s'appuyant sur un schéma, justifier du caractère moteur ou résistant des forces extérieures en présence dans les situations décrites ci-dessous.

1. Une pierre de curling après son lancé.
2. Un cycliste à l'assaut du mont Ventoux.
3. Une demi-oscillation du pendule simple.
4. Un vol parabolique chez Air Zéro G (chute libre).

1.2 Travail d'une force

Définition

Le **travail élémentaire** $\delta W(\vec{F})$ d'une force $\vec{F}$ de puissance $\mathcal{P}(\vec{F})$ pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ infinitésimal est défini par

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t.$$

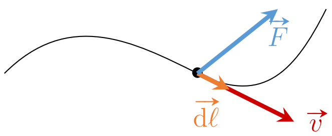
Le travail d'une force s'exprime aussi en fonction du déplacement élémentaire du point M. On passe ainsi de coordonnées temporelles à des coordonnées spatiales.

Propriété 2 (à démontrer)

Le **travail élémentaire** $\delta W(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$ subie par le point matériel M s'écrit

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell},$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est le **vecteur déplacement élémentaire** de M pendant $\mathrm{d}t$.



Rq : Le travail dépend aussi du référentiel.
Rq : Attention : le travail élémentaire est noté δW et pas $\cancel{\mathrm{d}W}$. Le « d » est réservée à la notation différentielle, qui exprime la variation d'une fonction entre deux points infiniment proches t et $t + \mathrm{d}t$, où cette fonction est définie. Par exemple, le vecteur déplacement élémentaire exprime la variation du vecteur position entre ces deux instants, de sorte que

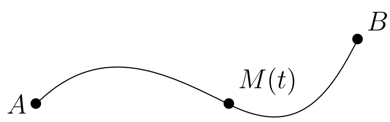
$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}(t) = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z) - \overrightarrow{OM}(x, y, z).$$

Dans le cas général, le travail lui n'est pas défini aux instants t et $t + \mathrm{d}t$. Le travail élémentaire δW est une **grandeur d'échange** qui n'a de sens qu'au cours d'un déplacement entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

Définition

Le **travail** $W_{A\to B}(\vec{F})$ d'une force $\vec{F}$ sur un déplacement du point matériel M entre les points A et B atteints aux instants t_A et t_B correspond à la somme des travaux élémentaires sur la trajectoire $A \to B$ effectivement suivie par le point M :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{A\to B} \delta W(\vec{F}) = \int_{A\to B} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t.$$



La notation $\int_{A\to B}$ indique que l'on intègre en suivant la trajectoire suivie par le point matériel M entre A et B, qui ne correspond pas forcément au segment $[AB]$: il s'agit d'une **intégrale curviligne**.

Propriété 3 (à démontrer)

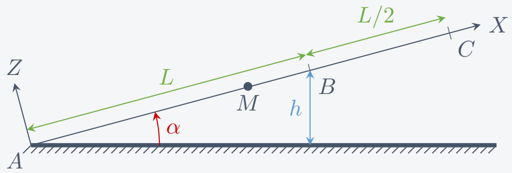
Le **travail d'une force constante** entre les points A et B s'écrit

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Application 2 – Mouvement sur un plan incliné

On s'intéresse à un point matériel M de masse m en mouvement entre les points A et B, séparés d'un distance L, sur une rampe inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le déplacement de M est assuré par une force $\vec{F}$ parallèle à la rampe et appliquée par un opérateur extérieur.

En plus de son poids, le point M est soumis à la réaction du support $\vec{R} = R_N\overrightarrow{e_Z} + R_T\overrightarrow{e_X}$, où $|R_T| = \mu R_N$, avec $\mu > 0$. Le signe de R_T est tel que cette réaction tangentielle est toujours opposée au sens du mouvement. On note g l'accélération de la pesanteur.



1. Exprimer R_N à l'aide d'une des projections du PFD en fonction de m, g et α. En déduire l'expression de $|R_T|$ en fonction de m, g, α et μ.
2. On considère une première trajectoire, où M va directement de A à B. Exprimer les travaux $W_1(\vec{P})$, $W_1(\overrightarrow{R_N})$ et $W_1(\overrightarrow{R_T})$ du poids, de la réaction normale du support et de la réaction tangentielle.
3. On considère maintenant le cas où M va de A à B en passant par C. Exprimer à nouveau les travaux $W_2(\vec{P})$, $W_2(\overrightarrow{R_N})$ et $W_2(\overrightarrow{R_T})$.

Propriété 4

Le travail d'une force **dépend *a priori* du chemin suivi** !

Certaines forces, comme le poids ont un statut particulier puisque leur travail ne dépend pas du chemin suivi : ce sont les forces dites **conservatives**, sur lesquelles nous reviendrons.

1.3 Théorème de l'énergie cinétique

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel M de masse $m = $ cste dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, soumis à des forces extérieures $\overrightarrow{F_i^{\text{ext}}}$.

Définition

On définit l'**énergie cinétique** $\mathcal{E}_c(t)$ d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}(t)$ par :

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2}mv^2(t).$$

Rq : L'énergie cinétique dépend du référentiel. Puisque les référentiels galiléens sont en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres, l'énergie cinétique est définie à une constante près. Toutefois, avec les théorèmes énergétiques, on ne s'intéressent qu'à des qu'à des variations d'énergie, qui restent les mêmes quelque soit le choix du référentiel (galiléen).

À partir du PFD, on montre les versions instantanée et intégrale du **théorème de l'énergie cinétique**.

Théorème de la puissance cinétique (TPC, à démontrer)

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ **galiléen** et pour un système de masse m **constante**, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t)$ est égale à la somme de la puissance $\mathcal{P}(\overrightarrow{F_i^{\text{ext}}})$ des forces **extérieures** qui s'exercent sur le système :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_i \mathcal{P}(\overrightarrow{F_i^{\text{ext}}}).$$

Démo : multiplier le PFD par $\vec{v}(t)$ et identifier les différents termes obtenus.

Théorème de l'énergie cinétique (TEC, à démontrer)

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ **galiléen** et pour un système de masse m **constante**, la variation d'énergie cinétique $\Delta\mathcal{E}_c$ entre les points A et B est égale à la somme des travaux $W_{A\to B}(\overrightarrow{F_i^{\text{ext}}})$ des forces **extérieures** qui s'exercent sur le système :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \sum_i W_{A\to B}(\overrightarrow{F_i^{\text{ext}}}), \quad \text{avec} \quad \Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t_B) - \mathcal{E}_c(t_A) = \mathcal{E}_{c,B} - \mathcal{E}_{c,A},$$

où $\mathcal{E}_{c,A}$ et $\mathcal{E}_{c,B}$ sont les énergies cinétiques du système situé en A et B.

Démo : intégrer le TPM entre les instants t_A et t_B.

Rq : La notation Δ indique que l'on calcule la variation d'une quantité entre un état initial (E.I.) et un état final (E.F.). On a toujours

$$\Delta = \text{E.F.} - \text{E.I.}$$

Application 3 – Skieur cinétique

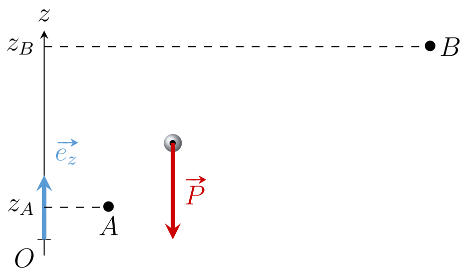
Un skieur de masse $m = 80\,\text{kg}$ descend une piste rectiligne longue de $L = 100\,\text{m}$ et inclinée d'un angle $\alpha = 45°$ par rapport à l'horizontale. On néglige tout d'abord les frottements.

1. Faire un schéma.
2. Exprimer et calculer le travail des deux forces en présence au cours de la descente.
3. En admettant que le skieur part du haut de la piste sans vitesse initiale, déterminer sa vitesse v_f en bas de la piste à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

2 Énergie potentielle, énergie mécanique

2.1 Force conservative et énergie potentielle

On considère une transformation où un point matériel M de masse m soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$, avec $\vec{e_z}$ le vecteur unitaire vertical orienté vers le haut, passe d'un point A à un point B.



Le poids est une force constante : son travail entre les deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) ne dépend pas du chemin suivi. On a

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\overrightarrow{AB} = -mg\vec{e_z}\cdot((x_B - x_A)\vec{e_x} + (y_B - y_A)\vec{e_y} + (z_B - z_A)\vec{e_z}) = -mg\Delta z.$$

Cette expression ne dépend que de la position initiale et de la position finale. Le travail s'écrit donc comme la variation d'une quantité homogène à une énergie que l'on nommera, au signe près, l'énergie potentielle :

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = -\Delta\mathcal{E}_\mathrm{p}, \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_\mathrm{p}(z) = mgz + \text{cste}.$$

Définition

Une force dont le travail **ne dépend pas du chemin suivi** est dite **conservative**.

Pour montrer qu'une force est conservative, on peut :

- montrer que son travail élémentaire s'écrit sous la forme d'une **différentielle exacte** :

$$\delta W = \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -mg\vec{e_z}\cdot(\mathrm{d}x\vec{e_x} + \mathrm{d}y\vec{e_y} + \mathrm{d}z\vec{e_z}) = -mg\mathrm{d}z = -\mathrm{d}(mgz) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}.$$

- montrer que son travail entre deux points A et B s'écrit comme l'opposé de la variation d'une énergie potentielle :

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_{z_A}^{z_B} -mg\mathrm{d}z = -mg(z_B - z_A) = -\left(\mathcal{E}_\mathrm{p}(Z_B) - \mathcal{E}_\mathrm{p}(z_A)\right) = -\Delta\mathcal{E}_\mathrm{p}.$$

Définition

À une force conservative, on associe une **énergie potentielle** $\mathcal{E}_\mathrm{p}$, telle que

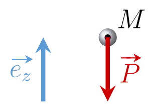
$$\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p} = -\delta W_c,$$

où δW_c est le travail élémentaire de la force conservative considérée.

2.2 Exemple de forces conservatives

Poids : énergie potentielle de pesanteur

Propriété 5 (à démontrer)

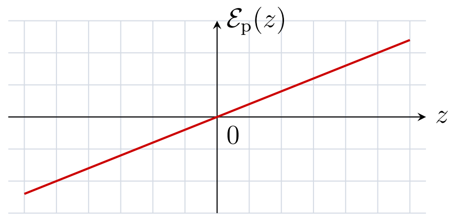


Pour un axe (Oz) orienté vers le haut, l'**énergie potentielle de pesanteur** d'un point matériel M de masse m et d'altitude z dans un champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ est définie par

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(z) = mgz + \mathrm{cste}.$$

On choisit souvent la référence d'énergie potentielle de pesanteur nulle au niveau du sol, c'est-à-dire à l'altitude $z = 0$. L'énergie potentielle s'écrit alors simplement

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(z) = mgz.$$

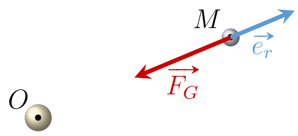


Rq : L'énergie potentielle de pesanteur augmente quand le système s'élève. Si l'axe (Oz) est orienté vers le bas, z correspond à la profondeur du système et l'expression devient

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(z) = -mgz + \mathrm{cste}.$$

Attraction gravitationnelle : énergie potentielle gravitationnelle

Propriété 6 (à démontrer)



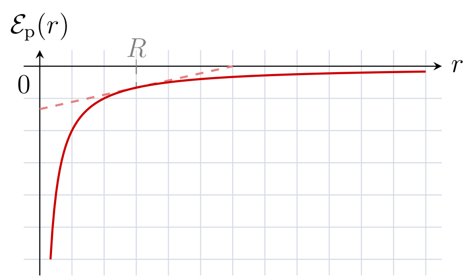
L'**énergie potentielle gravitationnelle** d'un point matériel M de masse m situé à une distance r du centre d'un astre de masse M_O est définie par

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(r) = -\frac{GmM_O}{r} + \mathrm{cste}.$$

On choisit souvent la référence d'énergie potentielle nulle à l'infini, de sorte que

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(r) = -\frac{GmM_O}{r}.$$

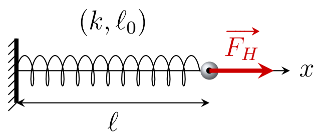
L'énergie potentielle gravitationnelle augmente quand M s'éloigne de l'astre central.



Rq : L'énergie potentielle de pesanteur est une approximation de l'énergie potentielle gravitationnelle au voisinage de la surface d'un astre de rayon R (courbe pointillée ci-dessus), comme le poids est une approximation de la force d'interaction gravitationnelle (ou presque).

Force de rappel : énergie potentielle élastique

Propriété 7



L'**énergie potentielle élastique** d'un point matériel accroché à un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 et étiré ou comprimé jusqu'à une longueur ℓ est définie par

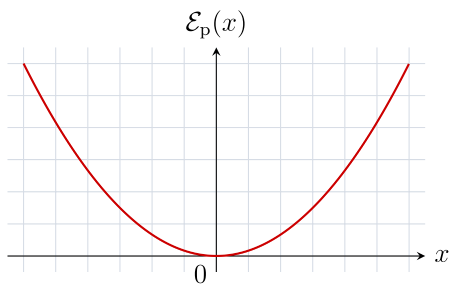
$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 + \mathrm{cste} \quad \text{ou encore} \quad \mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \mathrm{cste},$$

où $x = \ell - \ell_0$ est l'allongement du ressort.

On choisit souvent la référence d'énergie potentielle nulle quand le ressort est au repos, de sorte que

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

L'énergie potentielle élastique augmente quand on étire ou quand on comprime le ressort.



Cette forme d'énergie potentielle correspond à un **potentiel harmonique**. On s'y ramènera souvent pour étudier les mouvements périodiques de faible amplitude d'un système oscillant.

Système soumis à plusieurs forces conservatives

Si un système est soumis à plusieurs forces conservatives, l'énergie potentielle totale du système s'exprime simplement comme la somme des énergies potentielles associées à chacune des forces conservatives.

2.3 Lien entre une énergie potentielle et une force conservative

On considère un problème à **un degré de liberté** x, c'est-à-dire une situation où le système ne peut se déplacer que selon l'axe (Ox), et où le système est soumis à une force conservative $\vec{F}$ associée à une énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$.

Propriété 8 (à démontrer)

On dit qu'une force conservative à un degré de liberté x de la forme $\vec{F}$ **dérive** d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$:

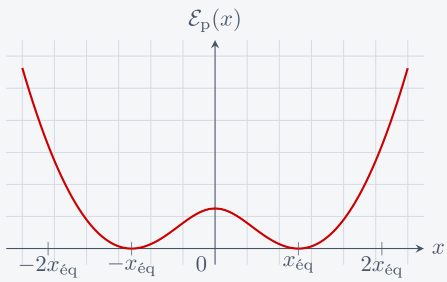
$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}(x)\vec{e_x}.$$

La coordonnée dont dépend l'énergie potentielle indique la direction de la force.

Application 4 – Profil d'énergie potentielle

Le graphe ci-dessous représente le profil d'énergie potentielle pour un système à un unique degré de liberté x.

1. Indiquer la direction de la force $\vec{F}$ qui dérive de ce potentiel.
2. Reproduire le graphe et indiquer le sens de $\vec{F}$ dans les différentes régions.
3. À l'aide d'une inégalité, comparer qualitativement les normes de $\vec{F}(x_{\text{éq}}/2)$ et $\vec{F}(2x_{\text{éq}})$.
4. Donner la valeur de $F(-x_{\text{éq}})$.
5. Proposer le schéma d'un système compatible avec ce profil d'énergie potentielle.



2.4 Théorème de l'énergie mécanique

Définition

On définit l'**énergie mécanique** $\mathcal{E}_\text{m}$ d'un système comme la somme de son **énergie cinétique** $\mathcal{E}_\text{c}$ et de son **énergie potentielle** $\mathcal{E}_\text{p}$:

$$\mathcal{E}_\text{m} = \mathcal{E}_\text{c} + \mathcal{E}_\text{p}.$$

Théorème de l'énergie mécanique (TEM, à démontrer)

Dans un référentiel **galiléen**, la variation d'énergie mécanique entre les points A et B est égale à la somme des travaux des forces **extérieures non conservatives** s'exerçant sur le système :

$$\Delta\mathcal{E}_\text{m} = \sum_i W_{A\to B}(\overrightarrow{F_{i,\text{nc}}^{\text{ext}}}).$$

Théorème de la puissance mécanique (TPM, à démontrer)

Sous sa version instantanée, le théorème de l'énergie mécanique devient :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\text{m}}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_i \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{i,\text{nc}}^{\text{ext}}}).$$

Application 5 – Skieur mécanique

On reprend la situation décrite dans l'App. 3 en ajoutant cette fois les frottements liés au contact avec la piste. Le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}5$, de telle sorte que $R_T = \mu R_N$.

1. Exprimer l'énergie potentielle du skieur au sommet de la piste.
2. Exprimer la force de frottement $\overrightarrow{R_T}$, et en déduire son travail lors de la descente.
3. Déterminer alors la vitesse v'_f du skieur en bas de la piste. Commenter.

3 Mouvement conservatif à une dimension

3.1 Mouvement conservatif

On ne s'intéresse ici qu'à des mouvements à un **degré de liberté**, c'est-à-dire pour lesquels, dans un référentiel adapté, une seule coordonnée du point matériel M varie au cours du mouvement.

> ***Exemple :*** *Pour une chute verticale, seule l'altitude de M varie. Pour un système masse-ressort simple, seule la longueur du ressort varie. Pour un pendule simple, seul l'angle θ varie.*

Propriété 9 (à démontrer)

Dans un référentiel galiléen et dans le cas où le système n'est soumis qu'à des forces extérieures conservatives ou qui ne travaillent pas, l'énergie mécanique est **conservée** :

$$\mathcal{E}_\mathrm{m}(t) = \mathrm{cste} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\mathcal{E}_\mathrm{m} = 0.$$

On dit que le mouvement est **conservatif**.

Application 6 – Un bond du Marsupilami

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée, créé par Franquin, aux capacités physiques remarquables, notamment grâce à sa queue qui possède une force importante. Il peut ainsi sauter en enroulant sa queue comme un ressort entre lui et le sol.

On note $\ell_0 = 2{,}0\,\mathrm{m}$ la longueur à vide du ressort équivalent à la queue du Marsupilami, et k sa constante de raideur. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur du ressort est $\ell_m = 50\,\mathrm{cm}$. On suppose que le Marsupilami pèse $50\,\mathrm{kg}$ et que sa queue quitte le sol lorsque le ressort mesure ℓ_0.

1. Exprimer la hauteur h du saut.
2. Déterminer la constante de raideur de la queue du Marsupilami s'il est capable de sauter jusqu'à une hauteur $h = 10\,\mathrm{m}$.
3. Exprimer, puis calculer la vitesse du Marsupilami quand sa queue quitte le sol.

3.2 Profil d'énergie potentielle

On souhaite étudier, dans un référentiel galiléen, le mouvement d'un point matériel M soumis exclusivement à des forces extérieures conservatives qui dérivent d'une énergie potentielle totale $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$ ou qui ne travaillent pas. L'énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ du système est conservée : au cours du mouvement de M, le système peut voir ses énergies potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ et cinétique $\mathcal{E}_\mathrm{c}$ évoluer, mais la somme des deux reste constante.

python Mouvement d'un particule dans un potentiel de type Lennard-Jones (Doc. 2)

`chapM3_lennard-jones.py`

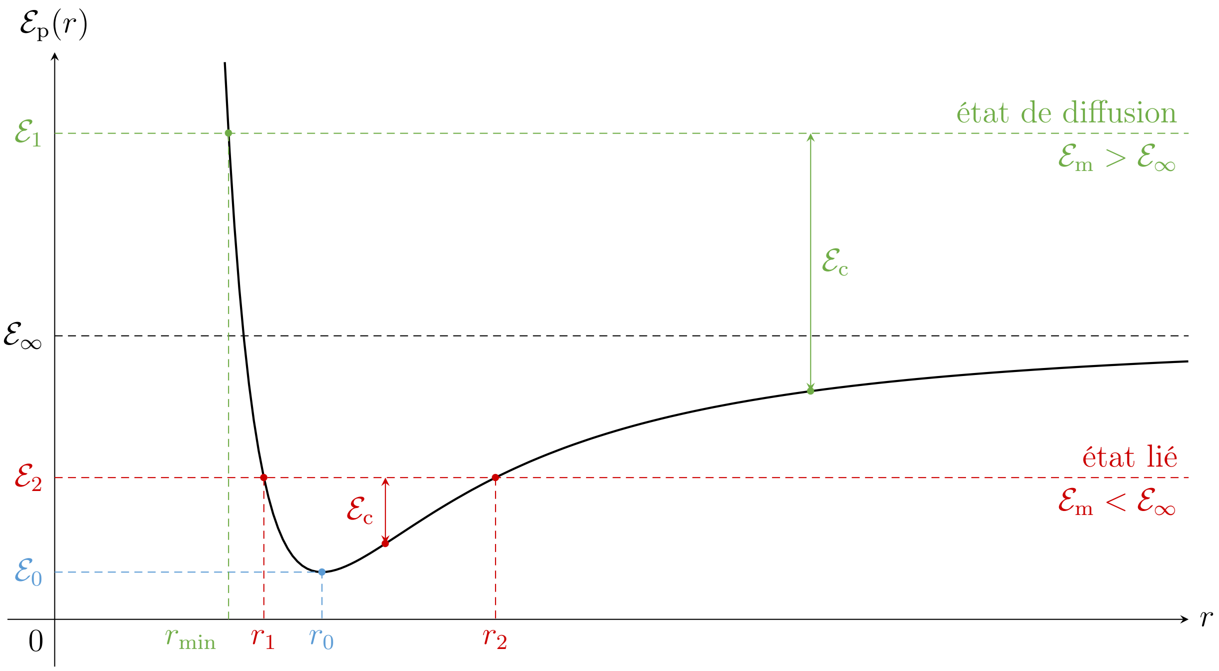
Illustrer les différents cas discutés ci-dessous en choisissant des C.I. adaptées.

Pour illustrer, on suppose que le potentiel $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$ à l'allure représentée ci-dessous avec

$$\mathcal{E}_\infty = \lim_{r\to\infty} \mathcal{E}_\mathrm{p}(r) \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 0} \mathcal{E}_\mathrm{p}(r) = +\infty.$$

On note $\mathcal{E}_0$ la valeur minimale de $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$, atteinte en $r = r_0$.

La comparaison entre l'énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ du système, fixée par les conditions initiales, et l'allure de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$ permet de distinguer plusieurs mouvements possibles et de déterminer qualitativement l'évolution du système.



Seules les énergies mécaniques $\mathcal{E}_\mathrm{m} \geqslant \mathcal{E}_0$ sont accessibles car $\mathcal{E}_\mathrm{c} \geqslant 0$.

$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathcal{E}_1 \geqslant \mathcal{E}_\infty$ **: état de diffusion ou état libre.** Dans le cas où les conditions initiales imposent $\mathcal{E}_\mathrm{m} \geqslant \mathcal{E}_\infty$, la trajectoire de M n'est pas bornée. En effet, on aura toujours

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = +\infty.$$

Seule l'intervalle $r \geqslant r_\mathrm{min}$ est accessible. L'intervalle $]0, r_\mathrm{min}[$ est inaccessible car il faudrait $\mathcal{E}_\mathrm{c} < 0$ ce qui est impossible : on parle de **barrière de potentiel**. Le point M atteindra éventuellement la position $r = r_\mathrm{min}$ où $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r_\mathrm{min}) = \mathcal{E}_\mathrm{m}$. Son énergie cinétique, donc sa vitesse y est nulle : il s'agit d'un éventuel point de rebroussement de $r(t)$.

$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_\infty$ **: état lié.** Dans le cas où les conditions initiales imposent $\mathcal{E}_\mathrm{m} < \mathcal{E}_\infty$, la trajectoire est bornée : seul l'intervalle $[r_1, r_2]$ où $\mathcal{E}_\mathrm{c} \geqslant 0$ est accessible. Le mouvement est alors **périodique** : le système est piégé et oscille entre les positions r_1 et r_2 où la vitesse s'annule. On parle de **puits de potentiel**.

$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathcal{E}_0$ **: équilibre.** $\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathcal{E}_0$ donc $\mathcal{E}_\mathrm{c} = 0$: le système est immobile en x_0 et y reste. De plus, ici, si une petite perturbation venait à l'en écarter il y reviendrait. Il s'agit donc d'une position d'équilibre stable. Les positions d'équilibres sont faciles à identifier : elles correspondent à des extrema d'énergie potentielle. La concavité de $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$ au voisinage de la position d'équilibre renseigne alors sur la stabilité de cette position.

Propriété 10 (à démontrer)

Une **position d'équilibre** correspond à un extremum d'énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$, c'est-à-dire une valeur $r_\text{éq}$ de r qui annule la dérivée de $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\right|_{r_\text{éq}} = 0.$$

De plus, une position d'équilibre est **stable** (resp. **instable**) si elle correspond à un **minimum** (resp. **maximum**) d'énergie potentielle, c'est-à-dire si

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r_\text{éq}} > 0 \quad \left(\text{resp. si } \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r_\text{éq}} < 0\right).$$

Au voisinage d'une position d'équilibre stable (resp. instable), la fonction $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$ est **convexe** (resp. **concave**).

Rq : Le cas où la dérivée seconde de $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$ évaluée en $r_\text{éq}$ est nulle est à traiter avec prudence (cf. TD M3, Ex. 12). On raisonnera alors qualitativement, en étudiant le comportement du système s'il est légèrement éloigné de part et d'autre de la position d'équilibre. Ceci permet par exemple de conclure sur la stabilité d'une position d'équilibre associée à un point d'inflexion de $\mathcal{E}_\mathrm{p}(r)$.

3.3 Approximation harmonique

Potentiel harmonique

Propriété 11 (à démontrer)

On considère un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen. Pour un mouvement conservatif à un degré de liberté x, associé à un **potentiel harmonique** de la forme

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}kx^2,$$

la position $x(t)$ de M vérifie l'équation d'un **oscillateur harmonique** de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Démo : établir l'équation du mouvement en exploitant la conservation de l'énergie mécanique (TPM).

Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

À l'aide d'un **développement limité** (Doc. 3), on peut approcher une fonction par un polynôme au voisinage d'un point d'intérêt.

python **Développement limité**

chapM3-dl.py

On considère un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen, soumis à un potentiel $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ à un degré de liberté et on suppose qu'il possède au moins une position d'équilibre stable x_0. Dans le cas où le système est piégé dans ce puits de potentiel et pour des oscillations de faible amplitude autour de x_0, le mouvement est **quasi-harmonique**.

Propriété 12 (à démontrer)

Au voisinage de x_0 et pour des oscillations de faible amplitude, l'**approximation harmonique** consiste à approcher $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ par un **potentiel harmonique**. La pulsation des oscillations est alors donnée par

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \text{avec} \quad k = \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0}.$$

Démo : effectuer un développement limité d'ordre 2 de $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ et reconnaitre un potentiel harmonique.

Cette approximation harmonique permet d'étudier le comportement de très nombreux systèmes oscillant faiblement perturbés (pendules, atomes, molécules, etc.), dont la résolution exacte est impossible mais pas forcément nécessaire. On obtient alors des équations linéaires, faciles à étudier et/ou résoudre.

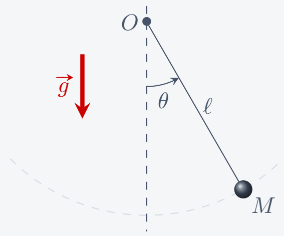
python Oscillateur de Landau

`chapM3-landau.py`

Identifier les positions d'équilibre et étudier leur stabilité. Étudier en particulier le comportement du système piégé au voisinage d'une position d'équilibre stable avant de mettre en évidence les non-linéarités du système pour des oscillations de plus grande amplitude.

Application 7 – Pendule énergétique

On s'intéresse au mouvement d'une masse m assimilée à son centre de masse M, suspendue à un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable. On néglige les frottements et l'étude est réalisée dans le référentiel terrestre considéré galiléen.



1. Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ du système, en fonction de m, ℓ et $\dot{\theta}$.
2. Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ de pesanteur du système en fonction de m, g, ℓ et θ, de telle sorte que $\mathcal{E}_\mathrm{p}(\theta = 0) = 0$.
3. Représenter graphiquement $\mathcal{E}_\mathrm{p}(\theta)$, pour $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$. Repérer une position d'équilibre stable θ_1, et une position d'équilibre instable θ_2.
4. Décrire qualitativement le mouvement du système, quand son énergie mécanique vaut :

$$\mathcal{E}_1 = mg\frac{\ell}{10} \qquad \mathcal{E}_2 = mg\ell \qquad \mathcal{E}_3 = 3mg\ell$$

5. Exprimer l'énergie mécanique du système pour $\theta \ll 1$. Commenter.
6. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ.

Rq : On ne peut en principe pas dériver un développement limité. Il faudrait donc utiliser le TPM avant de faire un DL. Toutefois, dans les cas que l'on rencontrera, le résultat est le même que l'on fasse le DL avant ou après l'application du TPM. On ne se privera donc pas de le faire avant !

Obtention de l'équation du mouvement linéarisée

Pour un système soumis à un potentiel $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ connu qui présente au moins un minimum et dans le cas d'un mouvement à une dimension x, on souhaite étudier les oscillations de faible amplitude autour d'une position d'équilibre stable.

Pour chercher les positions d'équilibre et étudier leur stabilité, on étudie les dérivées première et seconde de $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ par rapport à la coordonnée **spatiale** x. On cherche bien une position particulière x_0 du système dans l'**espace**.

On ne s'intéresse ensuite qu'aux positions d'équilibre stables. Un DL permet alors éventuellement de se ramener à un potentiel harmonique. Là encore, on manipule les dérivées **spatiales** de $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ car il s'agit d'approcher le potentiel au voisinage de la position x_0.

Pour étudier enfin les oscillations de faible amplitude au voisinage de x_0, on doit déterminer l'évolution **temporelle** de $x(t)$. On applique pour cela le TPM ou on exploite la conservation de l'énergie mécanique au cours du temps, ce qui conduira à dériver les énergies cinétique et potentielle par rapport au **temps** t cette fois.