

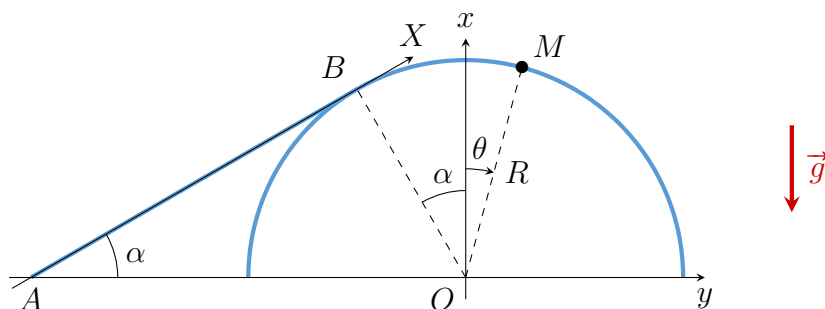
DM10 – Mécanique

Consignes

- C1. Les consignes de présentation sont respectées.
- C2. Les relations obtenues sont homogènes.
- C3. Les notations pour les grandeurs vectorielles sont respectées. Pas de mélange scalaire/vecteur.
- C4. Q. 1 et 5 : l'application du PFD est soignée (système, référentiel, etc.).
- C5. Q. 1 et 5 : les forces sont convenablement exprimées dans base associée au repère utilisé.
- C6. Q. 6 : l'intégration est soignée (CI, signe de $\dot{\theta}$ justifié, etc.).
- C7. Q. 8 : la condition de non décollement est correctement traduite.

Exercice 1 – Tremplin polaire

Un bloc de glace de masse $m = 5,0 \text{ kg}$, assimilé à son centre de masse M est lancé sur un tremplin, composé d'une rampe rectiligne posée sur un igloo hémisphérique de rayon $R = 2,0 \text{ m}$, de telle sorte que la rampe forme un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale et est tangente à la surface de l'igloo en B . On admet que le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) et on note $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.



À l'instant $t = 0$, le glaçon est lancé depuis le point A , avec une vitesse $\vec{v}_A = v_A \vec{e}_X$, où $\vec{e}_X$ est le vecteur unitaire orienté selon l'axe (AX) , puis il glisse sur le tremplin, sans frottement.

Mouvement sur la rampe

- Déterminer l'expression de la vitesse $v(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{e}_X$ sur la rampe.
- Montrer que le point B est atteint seulement si v_A est supérieure à une vitesse limite v_ℓ que l'on exprimera en fonction des données. Faire l'application numérique.
- Dans toute la suite, on suppose $v_A > v_\ell$. Exprimer la date t_B à laquelle le glaçon atteint le point B en fonction de v_A , v_ℓ , g et α .
- Montrer que la norme v_B de la vitesse en B s'écrit

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - v_\ell^2}.$$

Mouvement sur l'igloo

On s'intéresse maintenant au mouvement du glaçon sur l'igloo, une fois le point B dépassé. La position du point M est alors repérée dans la base polaire, par l'angle θ dont l'orientation positive est choisie dans le sens horaire.

5. Établir deux équations différentielles vérifiées par l'angle θ en projetant le PFD sur les vecteurs de la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. On soignera la rédaction de la réponse.
6. Après l'avoir multipliée par $\dot{\theta}$, intégrer l'une de ces équations pour établir l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de θ .
7. Montrer que la réaction normale du support $\vec{R}_N = R_N \vec{e}_r$ s'écrit :

$$R_N = -\frac{mv_B^2}{R} + mg(3 \cos \theta - 2 \cos \alpha).$$

8. Donner une condition sur v_B , puis sur v_A pour laquelle le glaçon ne décolle pas avant le sommet de l'igloo. On exprimera ces conditions en fonction de R , g et α . Faire les applications numériques.
9. Exprimer finalement la position angulaire θ_d , valeur de θ pour laquelle le glaçon quitte la piste, en fonction de v_A , R et g . Faire l'application numérique pour $v_A = 7,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Représenter alors l'allure de l'ensemble de la trajectoire du glaçon.

Exercice 2 – Chute d'une balle sur une rampe

Cet exercice est accompagné du notebook [ab6b-4754990](#) accessible sur Cappytale (ENT). Les questions sont à traiter directement dans le notebook.

On s'intéresse à l'exploitation numérique de données récupérées à l'occasion du TP8 – Cinématique, où l'on étudie la chute d'une balle de tennis sur une rampe inclinée. Les positions successives de la balle, obtenues par analyse vidéo sont contenues dans le fichier `data.txt` et sont stockées dans les tableaux :

- x : abscisse sur l'axe horizontal orienté dans le sens du mouvement ;
- y : ordonnée sur l'axe vertical orienté vers le haut ;
- t : instants t correspondant à la date de la capture de l'image.

1. Modifier le programme de manière à indiquer sur le graphe les noms des axes des abscisses et des ordonnées.
2. Compléter la fonction `norme(x, y)` qui calcule la norme d'un vecteur de coordonnées (x, y) .
Les calculs avec les tableaux `numpy` sont simples : si $\mathbf{x}$ est un tableau `numpy`, la commande `x**2` renvoie un tableau `numpy`, de même dimension que $\mathbf{x}$, contenant les carrés des valeurs contenues dans $\mathbf{x}$.
3. Calculer, puis représenter graphiquement la distance d parcourue en fonction du temps.
4. Compléter la fonction `deriv(x, t)` qui calcule la dérivée de $x(t)$ par rapport au temps. On pourra s'appuyer sur le notebook [215b-989450](#).
5. Sur un nouveau graphique, calculer puis représenter graphiquement la vitesse de la balle au cours de la chute. Commenter.