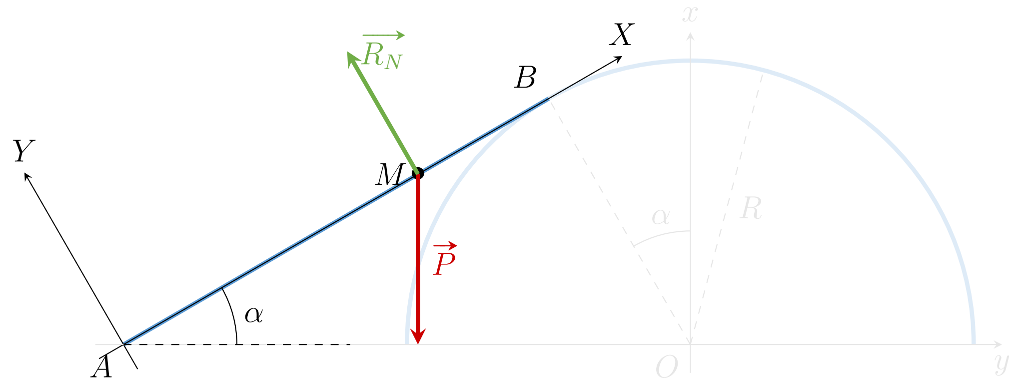
# DM10 – Mecanique
Correction

## Exercice 1 – Tremplin polaire

**1.** On étudie le mouvement du {glaçon} de masse $m = \text{cste}$ sur la rampe, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.




On se place dans le repère cartésien $(AXY)$ associé à la rampe. En l'absence de frottement, le système est soumis à

- son poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_x} = -mg(\sin\alpha\overrightarrow{e_X} + \cos\alpha\overrightarrow{e_Y})$ ;
- la réaction normale de la rampe $\overrightarrow{R_N} = R_N\overrightarrow{e_Y}$.

Le PFD s'écrit

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -mg(\sin\alpha\overrightarrow{e_X} + \cos\alpha\overrightarrow{e_Y}) + R_N\overrightarrow{e_Y}.$$

On projette selon $\overrightarrow{e_X}$ avec $v(t) = \overrightarrow{v}(t)\cdot\overrightarrow{e_X}$ et on simplifie par $m$ :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g\sin\alpha.$$

On intègre avec la condition initiale $v(0) = v_A$, d'où finalement

$$\boxed{v(t) = v_A - gt\sin\alpha.}$$

**2.** En intégrant une nouvelle fois, on obtient

$$X(t) = v_At - \frac{gt^2}{2}\sin\alpha.$$

Par ailleurs, dans le triangle $OBA$ rectangle en $B$, on a

$$AB = \frac{R}{\tan\alpha}.$$

Si la vitesse $v_A$ est suffisante, le point $B$ est atteint à l'instant $t_B$ tel que

$$X(t_B) = \frac{R}{\tan\alpha}, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{gt_B^2}{2}\sin\alpha - v_A t_B + \frac{R}{\tan\alpha} = 0.$$

Le polynôme admet des racines réelles si son discriminant est positif ou nul, d'où

$$\Delta = v_A^2 - 4\frac{gR\sin\alpha}{2\tan\alpha} = v_A^2 - 2gR\cos\alpha \geqslant 0.$$

Le point $B$ est donc atteint si

$$\boxed{v_A \geqslant v_\ell = \sqrt{2gR\cos\alpha}.}$$

A.N. : $v_\ell \approx 5{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

**3.** On poursuit la recherche des racines du polynôme obtenu précédemment. Avec $v_A > v_\ell$, il admet deux racines réelles

$$t_\pm = \frac{v_A \pm \sqrt{v_A^2 - v_\ell^2}}{g\sin\alpha}.$$

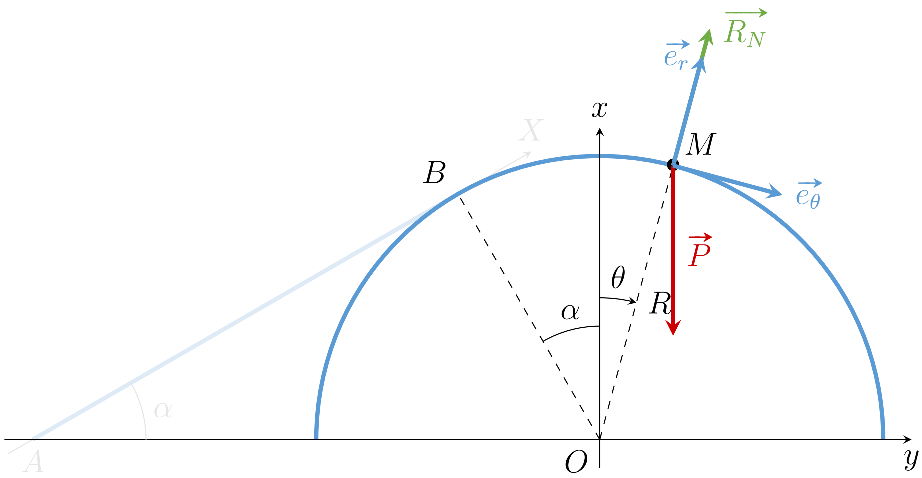
Les deux sont positives et on a $t_- < t_+$. On retient la plus petite des deux qui correspond au premier passage du glaçon en $B$, la plus grande correspondant au deuxième passage en $B$, quand le glaçon retombe. On a donc

$$\boxed{t_B = \frac{v_A - \sqrt{v_A^2 - v_\ell^2}}{g\sin\alpha}.}$$

**4.** En injectant dans l'expression obtenue à la question 1, on obtient

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 - v_\ell^2}.}$$

**5.** Le système et le référentiel sont identiques à la partie précédente.




On se place dans le repère polaire associé au point $M$. Le système est toujours soumis aux deux mêmes forces :

- $\overrightarrow{P} = mg(-\cos\theta\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\overrightarrow{e_\theta})$ ;
- $\overrightarrow{R_N} = R_N\overrightarrow{e_r}$.

Tant que le glaçon reste en contact avec l'igloo, le mouvement est circulaire de rayon $R$, d'où

$$\overrightarrow{OM}(t) = R\overrightarrow{e_r}, \quad \overrightarrow{v}(t) = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a}(t) = R(-\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + \ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}).$$

Les projections du PFD selon $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ donnent

$$\boxed{\begin{cases} -R\dot{\theta}^2 = -g\cos\theta + \dfrac{R_N}{m}, \\ R\ddot{\theta} = g\sin\theta. \end{cases}}$$

**6.** On utilise la projection du PFD selon $\overrightarrow{e_\theta}$, qu'on multiplie par $\dot{\theta}$ :

$$R\dot{\theta}\ddot{\theta} = g\dot{\theta}\sin\theta, \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{R\dot{\theta}^2}{2} + g\cos\theta\right) = 0.$$

On a donc

$$\frac{R\dot{\theta}^2}{2} + g\cos\theta = \text{cste}.$$

À l'instant initial $t_B$ correspondant au passage du glaçon en $B$, on a

- $v(t_B) = v_B = R\dot{\theta}(t_B)$, d'où $\dot{\theta}(t_B) = v_B/R$ ;
- $\theta(t_B) = -\alpha$,

ce qui permet de déterminer la constante. On en déduit

$$\frac{R\dot{\theta}^2}{2} + g\cos\theta = \frac{v_B^2}{2R} + g\cos\alpha.$$

En isolant $\dot{\theta}$ et en gardant la racine positive car $\dot{\theta} > 0$, on obtient finalement

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{v_B^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\alpha - \cos\theta)}.}$$

**7.** On utilise la projection du PFD selon $\overrightarrow{e_r}$ et on isole $R_N$ pour obtenir

$$R_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2.$$

En injectant l'expression obtenue précédemment, on retrouve l'expression donnée dans l'énoncé.

$$\boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha) - \frac{mv_B^2}{R}.}$$

**8.** On s'intéresse au mouvement avant le sommet de l'igloo, c'est-à-dire pour $\theta \in [-\alpha, 0]$. Le glaçon reste en contact avec l'igloo si $R_N(\theta) > 0$, ce qui est vrai pour tout $\theta \in [-\alpha, 0]$ si $R_N(-\alpha) > 0$. En effet, sur cet intervalle, $\cos\theta$ est croissant, donc la réaction normale est minimale pour $\theta = -\alpha$.

$$R_N(-\alpha) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad mg\cos\alpha > \frac{mv_B^2}{R},$$

d'où, puisque $v_B > 0$,

$$\boxed{v_B < \sqrt{Rg\cos\alpha}.}$$

Avec $v_B = \sqrt{v_A^2 - v_\ell^2}$, le glaçon ne décolle pas si

$$\boxed{v_A < \sqrt{3Rg\cos\alpha}.}$$

A.N. : $v_B < 4{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $v_A < 7{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

**9.** À l'instant où le glaçon décolle, la réaction normale s'annule, d'où

$$mg(3\cos\theta_d - 2\cos\alpha) - \frac{mv_B^2}{R} = 0.$$

On en déduit

$$\theta_d = \arccos\left(\frac{v_B^2}{3Rg} + \frac{2}{3}\cos\alpha\right).$$

Avec $v_B = \sqrt{v_A^2 - v_\ell^2}$ et $v_\ell = \sqrt{2Rg\cos\alpha}$, on obtient

$$\boxed{\theta_d = \arccos\left(\frac{v_A^2}{3Rg}\right).}$$

A.N. : $\theta_d = 0{,}59\,\mathrm{rad} = 34°$.

Après $\theta_d$, le glaçon est en chute libre, il suit une trajectoire parabolique. L'allure de la trajectoire est représentée en rouge.