

DM11 – Mécanique

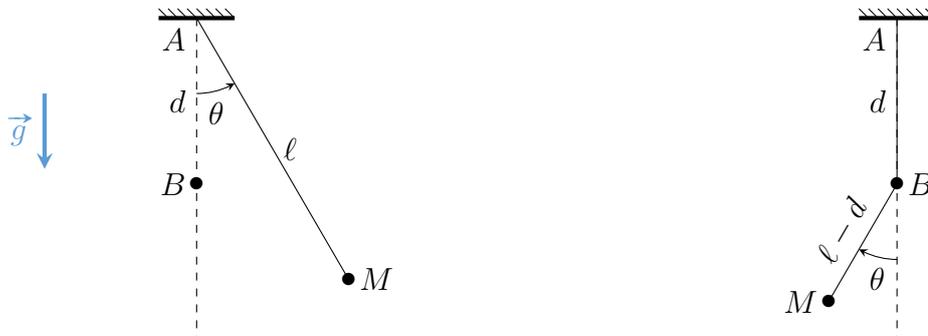
Consignes

- C1. Les consignes de présentation sont respectées. Soyez exigeants avec la copie qui vous est rendue.
- C2. Les relations obtenues sont homogènes.
- C3. Les notations pour les grandeurs vectorielles sont respectées. Pas de mélange scalaire/vecteur.
- C4. Q. 1 [auto-évaluation] : la question est traitée en moins de 5 minutes.
- C5. Q. 2 : la référence d'énergie potentielle est respectée.
- C6. Q. 3 : la conservation de l'énergie mécanique est soigneusement justifiée, le TEM est appliqué soigneusement.
- C7. Q. 5 : la conservation de l'énergie mécanique est soigneusement justifiée.
- C8. Q. 7 : l'expression de T est obtenue sans tricher.

Exercice 1 – Un clou dans les oscillations du pendule

Un pendule est constitué d'un fil de longueur constante ℓ attaché à un point fixe A . À son extrémité est attaché un point matériel M de masse m . Son inclinaison par rapport à la verticale est notée θ . On néglige tout frottement.

Un clou est fixé en B , à la verticale de A à la distance d de ce point. Lorsque le pendule entre en contact avec le clou, on suppose qu'aucun transfert énergétique ne se produit (l'énergie cinétique et donc la vitesse sont continues lors du contact avec le clou). Le pendule est lâché avec une vitesse initiale nulle depuis la position $\theta = \pi/2$. L'objectif de l'exercice est de déterminer la condition sur d et ℓ pour que le pendule s'enroule autour du clou situé en B , tout en restant tendu.



On choisit de compter positivement les angles orientés dans le sens trigonométrique. Sur la figure de gauche, on a donc $\theta > 0$ et sur celle de droite $\theta < 0$.

Première partie du mouvement : $\theta > 0$

- RCO**
1. Montrer que le vecteur vitesse \vec{v} de M s'exprime sous la forme $\vec{v} = v\vec{e}_\theta$. Exprimer v en fonction de ℓ et de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$.
 2. Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de m , g , ℓ , θ et ω . La référence d'énergie potentielle sera choisie nulle pour $\theta = 0$.
 3. En déduire l'expression de la vitesse v_0 et de la vitesse angulaire ω_0 au moment où le fil touche le clou.

Deuxième partie du mouvement : $\theta < 0$

4. Établir la nouvelle expression de l'énergie mécanique du système en fonction de m , g , ℓ , d , θ et ω .
5. Justifier que dans cette seconde partie du mouvement, l'énergie mécanique du système est constante et vaut $\mathcal{E}_m = mg\ell$.
6. Dédire des deux questions précédentes l'expression de ω^2 en fonction notamment de θ .
7. À l'aide d'une des projections du PFD, montrer que la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ est telle que :

$$T = mg \left(\frac{2\ell}{\ell - d} + 3 \cos \theta - 2 \right).$$

8. Établir la condition entre d et ℓ pour laquelle le fil reste toujours tendu.
9. Dans le cas où cette condition est respectée, décrire qualitativement l'évolution du système.