DM11 – Mecanique
Correction

Exercice 1 – Un clou dans les oscillations du pendule

1. En coordonnées polaires, on a

$$\overrightarrow{AM} = \ell\overrightarrow{e_r}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overrightarrow{v} = \ell\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}.}$$

On a donc

$$\boxed{v = \ell\omega.}$$

2. On a

$$\mathcal{E}_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2.$$

Le point matériel n'est soumis qu'à son poids et à la tension du fil qui ne travaille pas, d'où

$$\mathcal{E}_\mathrm{p} = mg\ell(1 - \cos\theta).$$

On en déduit

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathcal{E}_\mathrm{c} + \mathcal{E}_\mathrm{p} = \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 + mg\ell(1 - \cos\theta).}$$

3. Le point M n'est soumis qu'à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas, le mouvement est conservatif. On a donc $\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathrm{cste}$.
À l'instant initial, $\theta = \pi/2$ et $\omega = 0$, d'où

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = mg\ell.$$

À l'instant où le fil touche le clou, on a $\theta = 0$, et $\omega = \omega_0$, d'où

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\ell^2\omega_0^2 = mg\ell.$$

On en déduit

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_0 = \ell\omega_0 = \sqrt{2g\ell}.}$$

4. L'expression est la même que précédemment en remplaçant ℓ par $\ell - d$, d'où

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m(\ell - d)^2\omega^2 + mg(\ell - d)(1 - \cos\theta).}$$

5. Le système n'est toujours soumis qu'à son poids qui est conservatif et la tension du fil qui ne travaille pas, donc le mouvement est conservatif et l'énergie mécanique est conservée :

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{m} = \text{cste.}}$$

Le contact avec le clou ne s'accompagne d'aucun transfert énergétique, de sorte qu'entre les instants précédant et suivant immédiatement le contact, l'énergie cinétique ne varie pas. Entre ces deux instants l'énergie potentielle reste constante au premier ordre car $\theta = 0$ s'agit d'un minimum d'énergie potentielle. On en déduit que l'énergie mécanique est également conservée lors du contact et garde donc la même valeur que précédemment :

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{m} = mg\ell.}$$

6. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, on obtient

$$mg\ell = \frac{1}{2}m(\ell - d)^2\omega^2 + mg(\ell - d)(1 - \cos\theta).$$

On en déduit (...)

$$\boxed{\omega^2 = \frac{2g\ell}{(\ell - d)^2} - \frac{2g(1 - \cos\theta)}{\ell - d}.}$$

7. Avec

$$\vec{a} = (\ell - d)\dot{\omega}\vec{e_\theta} - (\ell - d)\omega^2\vec{e_r}, \quad \vec{P} = mg(\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}) \quad \text{et} \quad \vec{T} = -T\vec{e_r},$$

la projection du PFD selon $\vec{e_r}$ s'écrit

$$-m(\ell - d)\omega^2 = mg\cos\theta - T.$$

En utilisant l'expression de ω^2 obtenue précédemment, on obtient

$$\boxed{T = mg\left(\frac{2\ell}{\ell - d} + 3\cos\theta - 2\right).}$$

8. Le fil reste tendu si $T > 0$, c'est-à-dire si

$$\frac{2\ell}{\ell - d} > 2 - 3\cos\theta$$

quelle que soit la valeur de θ. Le terme de droite est maximal si $\cos\theta = -1$. Le fil reste donc tendu si

$$\frac{2\ell}{\ell - d} > 5 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{d > \frac{3\ell}{5}.}$$

9. Dans ce cas, M tourne autour de B : le système est dans un **état libre**. En réalité, le diamètre du clou est fini et le fil s'enroule autour.