

DM12 – Mécanique

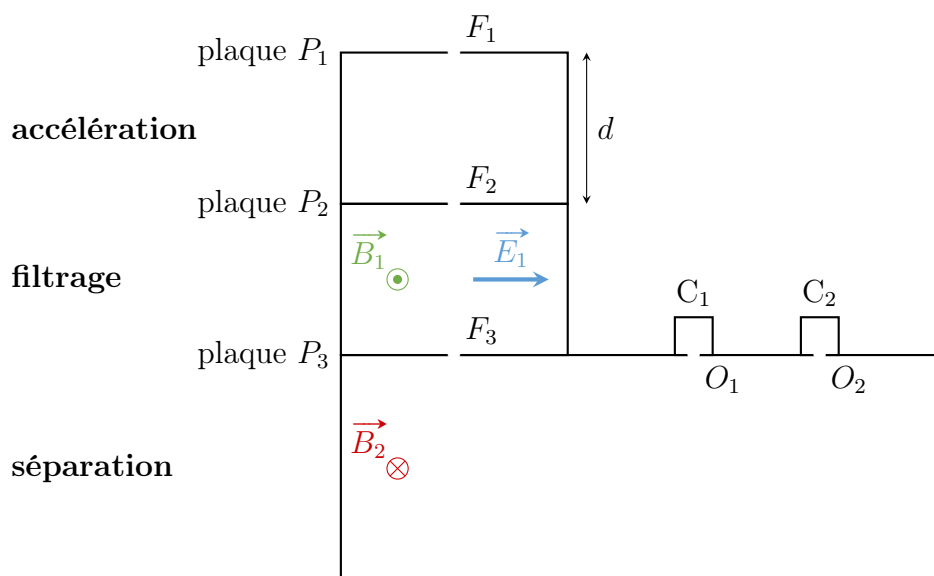
Consignes Ex. 1

- C1. Les consignes de présentation sont respectées. Soyez exigeants avec la copie qui vous est rendue.
- C2. Les relations obtenues sont homogènes.
- C3. Les notations pour les grandeurs vectorielles sont respectées. Pas de mélange scalaire/vecteur.
- C4. La rédaction des questions de cours est irréprochable.

Exercice 1 – Spectromètre de masse

Le spectromètre de masse permet de mesurer la masse des particules chargées avec une telle précision qu'il peut servir à déterminer des compositions isotopiques. Dans cet exercice, on montre qu'il permet de déterminer la composition isotopique du mercure.

Une source émet des ions mercure $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$. Ces ions passent dans le spectromètre de masse où ils sont accélérés puis séparés afin de mesurer leur rapport isotopique. Le schéma simplifié du spectromètre est représenté ci-dessous.



Données

Distance séparant les deux plaques de l'accélérateur :	$d = 1,00 \text{ m}$
Tension entre les deux plaques de l'accélérateur :	$U = 1,00 \times 10^4 \text{ V}$
Charge élémentaire :	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Unité de masse atomique (masse d'un nucléon) :	$1 \text{ u} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Champ électrique dans le filtre de vitesse :	$E_1 = 5,30 \times 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$
Champ magnétique dans le filtre de vitesse :	$B_1 = 0,383 \text{ T}$
Champ magnétique dans le séparateur :	$B_2 = 0,200 \text{ T}$
Distance entre la fente de sortie et le collecteur 1 :	$F_3O_1 = 1,44 \text{ m}$
Distance entre la fente de sortie et le collecteur 2 :	$F_3O_2 = 1,45 \text{ m}$

Accélération des ions

Des ions de masse m et de charge $q > 0$ sont émis par une source située en F_1 , sans vitesse initiale. Ils sont accélérés entre F_1 et F_2 par une différence de potentiel U appliquée entre les plaques conductrices P_1 et P_2 .

- RCO 1. Préciser la plaque dont le potentiel électrique est le plus élevé et représenter sur le schéma le champ accélérateur $\vec{E}_0$, supposé uniforme, qui règne dans l'entrefer séparant F_1 de F_2 . Calculer numériquement $E_0 = \|\vec{E}_0\|$.
- RCO 2. Établir l'expression littérale de la vitesse v_0 des ions au niveau de la plaque P_2 .
3. Calculer numériquement les vitesses v_{01} et v_{02} des ions $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$ à leur arrivée en F_2 .

L'hypothèse de vitesse nulle en F_1 est difficile à réaliser en pratique : il existe une certaine dispersion des vitesses en F_2 et il est nécessaire de réaliser un filtrage en vitesse pour améliorer les performances de l'appareil.

Filtre de vitesse

Les ions traversent la plaque P_2 par la fente F_2 avec un vecteur vitesse perpendiculaire à P_2 . Ils entrent dans l'espace séparant P_2 et P_3 où règnent :

- un champ $\vec{E}_1$ uniforme situé dans le plan du schéma et parallèle à P_2 ;
 - un champ $\vec{B}_1$ uniforme perpendiculaire au plan du schéma.
4. Sous quelle condition les ions peuvent-ils avoir une trajectoire rectiligne les amenant de F_2 à F_3 ?
 5. En déduire que seuls les ions de vitesse $v_0 = \frac{E_1}{B_1}$ parviennent en F_3 .
 6. Calculer numériquement cette vitesse et en déduire quel isotope du mercure parvient en F_3 avec ces réglages.

Pour mesurer la composition isotopique du mercure, on règle la valeur de E_1 pour assurer le passage de $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ pendant une minute, puis on change sa valeur pour que les ions $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$ passent pendant une minute. Pendant cette opération, la valeur de B_1 reste constante.

Séparation des ions

Après F_3 , les ions pénètrent dans une région où ne règne qu'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_2$ normal au plan du schéma. Ils sont déviés vers les collecteurs C_1 et C_2 .

- RCO 7. Montrer que le mouvement d'un ion dans cette région est uniforme.
- RCO 8. Sachant que la trajectoire des ions est circulaire, déterminer son rayon R_1 pour les ions $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et R_2 pour les ions $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$.
9. Déterminer le collecteur (C_1 ou C_2) qui reçoit les ions $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et celui qui reçoit les ions $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$.
10. Les quantités d'électricité reçues en 1 min par les collecteurs C_1 et C_2 sont $Q_1 = 1,20 \times 10^{-7} \text{ C}$ et $Q_2 = 3,5 \times 10^{-8} \text{ C}$. Déterminer la composition du mélange d'ions et en déduire la masse atomique du mercure.

Consignes Ex. 2

- C1. Les consignes de présentation sont respectées. Soyez exigeants avec la copie qui vous est rendue.
 C2. Les relations obtenues sont homogènes.
 C3. Les notations pour les grandeurs vectorielles sont respectées. Pas de mélange scalaire/vecteur.
 C4. Pas de confusion entre les utilisations des dérivées spatiales et temporelles de l'énergie.
 C5. La rédaction des questions de cours est irréprochable.

Exercice 2 – Inversion de la molécule d'ammoniac

Attention : Dans cet exercice, la notation $V(x)$ fait référence à l'énergie potentielle et non au potentiel électrique !

La molécule d'ammoniac $^{14}\text{NH}_3$ se présente sous la forme d'une pyramide symétrique, l'atome d'azote étant à son sommet. Les trois atomes d'hydrogène définissent le plan de référence. La position de l'atome d'azote est repérée par l'abscisse x telle que $|x|$ soit la distance de l'atome au plan de référence (Oyz) (Fig. 1).

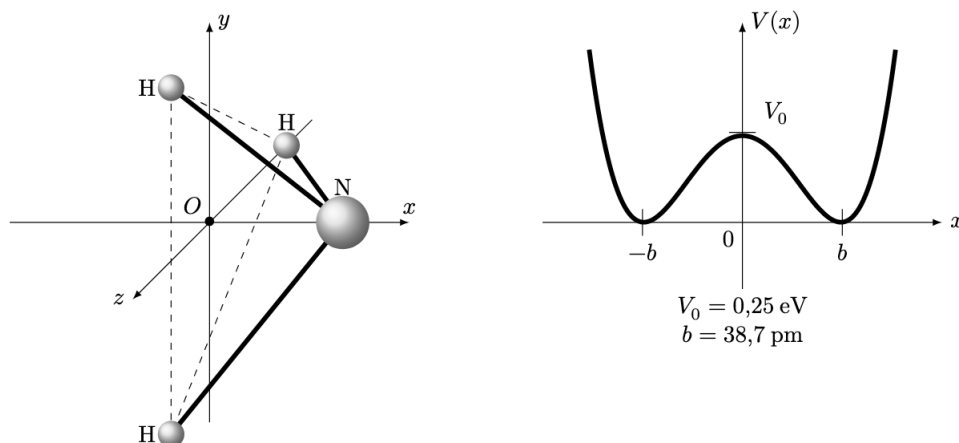


FIGURE 1 – Géométrie et énergie potentielle de la molécule d'ammoniac.

- Interpréter la forme, la symétrie et les points particuliers de la courbe d'énergie potentielle $V(x)$.

RCO

- Décrire qualitativement l'évolution de l'abscisse x de l'atome d'azote, initialement situé en $x = b$ et possédant une énergie cinétique $V_0/3$. Sur l'annexe 1 à rendre avec la copie, faire apparaître les positions x_1 et x_2 pour lesquelles la vitesse $\dot{x}$ est nulle.

La molécule d'ammoniac peut se trouver dans deux états de conformation, selon que l'atome se trouve du côté $x > 0$ (conformation D, Fig. 2) ou du côté $x < 0$ (conformation G). Les deux états sont séparés par une barrière de potentiel $V_0 = 0,25 \text{ eV}$.¹ On appelle inversion le passage d'une conformation à l'autre, lorsque l'atome d'azote traverse la barrière d'énergie due aux trois atomes d'hydrogène.

- Donner la condition sur l'énergie mécanique de l'atome d'azote $\mathcal{E}_m$ pour laquelle la molécule peut s'inverser et passer librement d'une conformation à l'autre.

RCO

- Rappeler l'expression générale de la force $\vec{F}(x)$ associée à une énergie potentielle $V(x)$.

1. L'électronvolt, noté eV, est une unité d'énergie. 1 eV correspond à l'énergie cinétique d'un électron accéléré par une tension de 1 V. On a donc $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

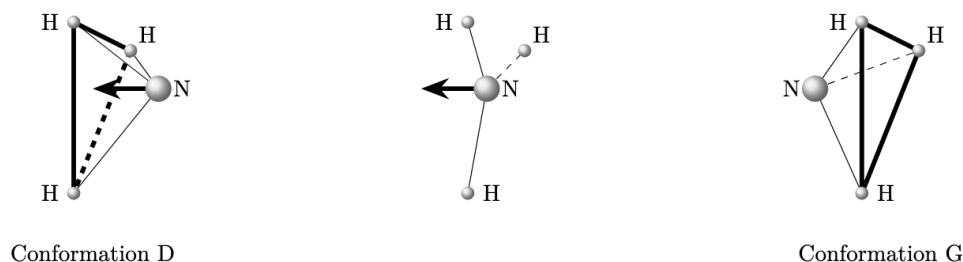


FIGURE 2 – Inversion de la molécule d'ammoniac.

RCO

5. Sur l'annexe 1 à rendre avec la copie, indiquer le sens de la force $\vec{F}(x)$ dans quatre domaines que l'on identifiera.

On suppose que l'énergie potentielle $V(x)$ est de la forme

$$V(x) = V_0 \left(\frac{x^2}{b^2} - 1 \right)^2.$$

6. Déterminer l'expression de la force $\vec{F}(x)$ exercée sur l'atome d'azote.

RCO

7. Rappeler la condition portant sur l'énergie potentielle qui permet d'obtenir les positions d'équilibre du système et leur stabilité. Retrouver les abscisses des points particuliers identifiés à la question 1 et justifier leur stabilité.
8. En supposant que $\vec{F}$ est la seule force qui s'applique sur l'atome d'azote, que peut-on dire de l'énergie mécanique de l'atome d'azote au cours du mouvement ? Comment qualifier ce mouvement ?

On souhaite étudier les oscillations de l'atome d'azote au voisinage de sa position d'équilibre stable dans la configuration D.

9. À quelle position cela correspond-il ? Préciser le sens de l'expression « au voisinage de » en donnant la quantité adimensionnée ε qui doit rester très petite devant 1.
10. À l'aide d'un développement limité à l'ordre deux, donner l'expression approchée de l'énergie potentielle au voisinage de cette position.
11. En déduire l'équation du mouvement vérifiée par x . Comment appelle-t-on l'équation obtenue ?
12. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 des oscillations, puis de la fréquence propre f_0 . Calculer numériquement f_0 . On donne la masse d'un nucléon $m_n = 1,67 \times 10^{-27}$ kg.

On admet que l'énergie mécanique de la molécule est de l'ordre de $k_B T$, où $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann et T la température absolue exprimée en kelvins.²

13. L'inversion de la molécule d'ammoniac est-elle possible à température ambiante ? À partir de quelle température T_0 cette inversion peut-elle s'effectuer ? Commenter.

On constate expérimentalement que l'inversion est possible à « basses températures ». Pour l'expliquer, il est nécessaire de sortir du cadre de la mécanique classique et de considérer le comportement quantique de la molécule.

2. On rappelle que la température absolue T exprimée en kelvins est liée à la température θ exprimée en degrés Celsius par la relation

$$T = 273,15 + \theta.$$

Exemple : une température de 20°C correspond à une température absolue de $293,15 \text{ K}$.

Annexes

Annexe 1 – Profil d'énergie potentielle de la molécule d'ammoniac

