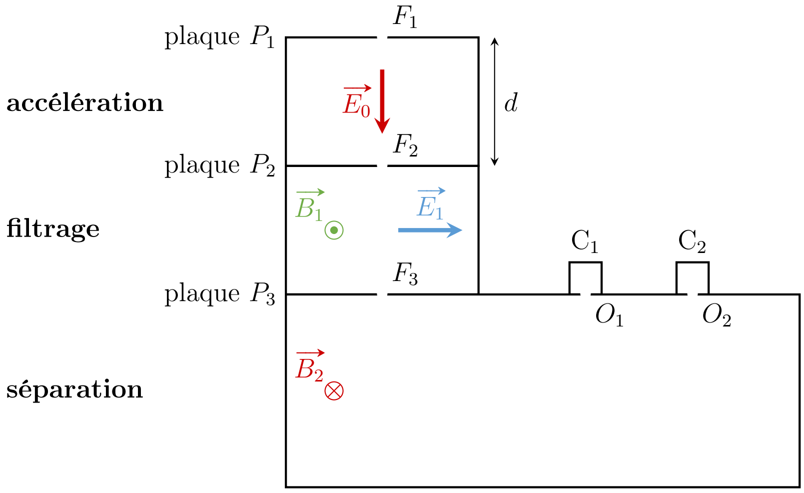
# DM12 – Mecanique
## Correction

## Exercice 1 – Spectromètre de masse

1. Les ions sont chargés positivement donc la composante électrique de la force de Lorentz qu'ils subissent est dans le sens du champ électrique. Le champ $\overrightarrow{E_0}$ doit donc être orienté de $F_1$ vers $F_2$. Le champ électrique est toujours orienté dans le sens des potentiels décroissants donc **le potentiel de la plaque $P_1$ est plus élevé que celui de la plaque $P_2$.**




Puisque le champ est uniforme, on a

$$\boxed{E_0 = \frac{U}{d}.}$$

A.N. : $E_0 = 1{,}00 \times 10^4\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

2. En appliquant le TEM entre les deux électrodes $P_1$ et $P_2$, on obtient (...)

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.}$$

3. A.N. : avec $m_1 \approx 200 \times 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $m_2 \approx 202 \times 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ et $q_1 = q_2 = 2e$, on obtient $v_{01} = 138{,}4\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ et $v_{02} = 137{,}7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
On trouve des vitesses largement inférieures à la célérité de la lumière dans le vide : les effets relativistes sont négligeables et l'approche classique reste pertinente.

4. D'après le principe d'inertie, les ions ont une trajectoire rectiligne s'ils ne sont soumis à aucune force ou à des forces qui se compensent. Puisque les ions ne sont soumis qu'à la force de Lorentz, il faut que ces deux composantes se compensent, soit

$$\boxed{q(\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{B_1}) = \overrightarrow{0}.}$$

5. Dans la situation étudiée, la composante magnétique de la force de Lorentz est colinéaire à la composante électrique mais de sens opposé. La force de Lorentz est donc nulle si ses deux composantes sont de même norme, soit

$$qE_1 = qv_0B_1, \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_0 = \frac{E_1}{B_1}.}$$

6. A.N. : $v_0 = 138{,}4\,\mathrm{km\cdot s^{-1}} \approx v_{01}$ : seul l'isotope 200 des ions mercure II atteint $F_3$.
7. On applique le TPC à un ion mercure dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Il est soumis à la seule composante magnétique qui ne travaille pas, d'où

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

La norme de la vitesse est constante, le mouvement est donc **uniforme**.
8. Par application du « PFD scalaire », on obtient (...)

$$\boxed{R = \frac{mv_0}{qB_2}.}$$

A.N. : $R_1 = 71{,}9\,\mathrm{cm}$ et $R_2 = 72{,}6\,\mathrm{cm}$.
9. On a $F_3O1 \approx 2R_1$ et $F_3O_2 \approx 2R_2$ : c'est donc le collecteur $C_1$ qui reçoit les ions ${}^{200}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$, tandis que $C_2$ reçoit les ions ${}^{202}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$.
10. Les ions des deux isotopes possèdent la même charge. Le rapport $Q_1/Q_2$ est donc égal au ratio isotopique $r$ mercure 200/mercure 202, c'est à dire au rapport entre les nombres d'ions ${}^{200}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ et ${}^{202}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ collectés. On en déduit la composition isotopique du mélange :
    - $\frac{Q_1}{Q_1+Q_2} = 77{,}4\,\%$ de mercure 200 ;
    - $\frac{Q_2}{Q_1+Q_2} = 22{,}6\,\%$ de mercure 202.

    La masse atomique du mercure est donc

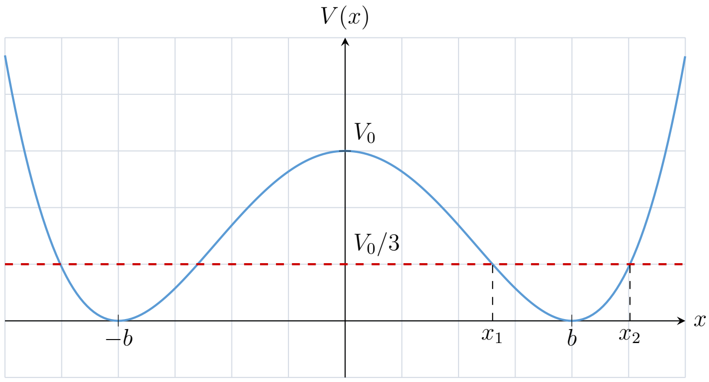
$$\frac{Q_1}{Q_1+Q_2} \times 200\,\mathrm{u} + \frac{Q_2}{Q_1+Q_2} \times 202\,\mathrm{u} = 200{,}45\,\mathrm{u} \approx 3{,}3475 \times 10^{-25}\,\mathrm{kg}.$$

## Exercice 2 – Inversion de la molécule d'ammoniac

1. La courbe d'énergie potentielle présente un **double puits de potentiel**, où les deux puits sont séparés par une barrière finie. L'ensemble est contenu entre deux barrières de potentiel infinies.

   La courbe est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** : $V(x)$ est donc **paire**.

   Il existe **deux positions d'équilibre stables** en $x = \pm b$ et **une position d'équilibre instable** en $x = 0$.
2. En $x = b$, l'énergie potentielle est nulle, donc l'atome d'azote possède une énergie mécanique égale à $V_0/3$.




Le 'atome d'azote oscille périodiquement entre $x_1$ et $x_2$.

**3.** On doit avoir

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{m} > V_0.}$$

**4.** On a

$$\boxed{\vec{F}(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\vec{e_x}.}$$

**5.** Cf. cours.

**6.** On a

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 4V_0\frac{x}{b^2}\left(\frac{x^2}{b^2} - 1\right),$$

d'où

$$\boxed{\vec{F}(x) = -4V_0\frac{x}{b^2}\left(\frac{x^2}{b^2} - 1\right)\vec{e_x}.}$$

**7.** Une position d'équilibre $x_0$ est telle que

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0.$$

Elle est stable si

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} > 0$$

et instable si

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} < 0.$$

L'équation

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 4V_0\frac{x}{b^2}\left(\frac{x^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

admet trois solutions, donc **trois positions d'équilibre** : $x = 0$ et $x = \pm b$. Par ailleurs,

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = \frac{4V_0}{b^2}\left(3\frac{x^2}{b^2} - 1\right), \quad \text{d'où} \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_0 = -\frac{4V_0}{b^2} < 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{\pm b} = \frac{8V_0}{b^2} > 0.$$

Les positions $x = \pm b$ sont donc stables, tandis que la position $x = 0$ est instable, ce qui est cohérent avec l'étude graphique.

**8.** La seule force $\vec{F}$ est conservative donc **le mouvement est conservatif**. L'énergie mécanique est constante.

**9.** La conformation D correspond à $x > 0$, donc on s'intéresse à la position d'équilibre stable $x = b$. En posant

$$\boxed{\varepsilon = \frac{x-b}{b},}$$

on s'intéresse au cas où $\varepsilon \ll 1$.

**10.** On a

$$V(b) = 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_b = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_b = \frac{8V_0}{b^2}.$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 donne donc

$$\boxed{V(x) \underset{x\approx b}{\approx} \frac{4V_0}{b^2}(x-b)^2.}$$

**11.** Toujours au voisinage de $b$, on a

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} \approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{4V_0}{b^2}(x-b)^2.$$

L'énergie mécanique est conservée, soit

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{d'où} \quad m\dot{x}\ddot{x} + \frac{8V_0}{b^2}\dot{x}(x-b) = 0.$$

En simplifiant par $\dot{x}$, on obtient

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{8V_0}{mb^2}x = \frac{8V_0}{mb}.}$$

On retrouve l'**équation d'un oscillateur harmonique** de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8V_0}{mb^2}}.$$

**12.** On a donc

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{8V_0}{mb^2}}}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8V_0}{mb^2}}.}$$

L'atome d'azote $^{14}$N est composé de 14 nucléons (et de 7 électrons de masse négligeable), d'où $m = 14m_n$.
A.N. : $f_0 \approx 15\,\mathrm{THz}$.

**13.** À température ambiante ($T \approx 300\,\mathrm{K}$), l'atome d'azote possède une énergie de l'ordre de $k_\mathrm{B}T \approx 26\,\mathrm{meV}$, dix fois trop faible pour qu'il puisse franchir la barrière de potentiel : **l'inversion est impossible à température ambiante**.

Pour que l'inversion soit possible, il faut chauffer la molécule à une température $T_0$ de l'ordre de

$$T_0 \approx \frac{V_0}{k_\mathrm{B}} \approx 2900\,\mathrm{K}.$$

Cette température est très élevée (la température de la surface du Soleil est proche de $6000\,\mathrm{K}$).

L'énergie thermique est-elle suffisante pour rompre les liaisons N−H ? Il faut comparer l'énergie thermique à l'énergie de liaison N−H, qui est de l'ordre de $400\,\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$, soit environ $4\,\mathrm{eV}$ pour une seule liaison. L'énergie de liaison est plus grande que l'énergie thermique minimale nécessaire pour réaliser l'inversion : il existe une gamme de température où la molécule d'ammoniac existe et peut passer librement d'une conformation à l'autre.

En pratique, l'inversion est possible à température ambiante par **effet tunnel** : en mécanique quantique, on peut montrer que la probabilité pour que l'atome d'azote traverse la barrière finie d'énergie potentielle qui sépare les deux conformations n'est pas nulle (Cf. 2ème année).