Chapitre M4 – Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.

→ Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.

→ Mouvement dans un champ $\vec{E}$ uniforme : mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant.

→ Mouvement dans un champ $\vec{E}$ uniforme : effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.

→ Mouvement dans un champ $\vec{B}$ uniforme : déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire.

Questions de cours

→ Donner l'expression de la force de Lorentz en s'appuyant sur un schéma et en donnant les unités des grandeurs.

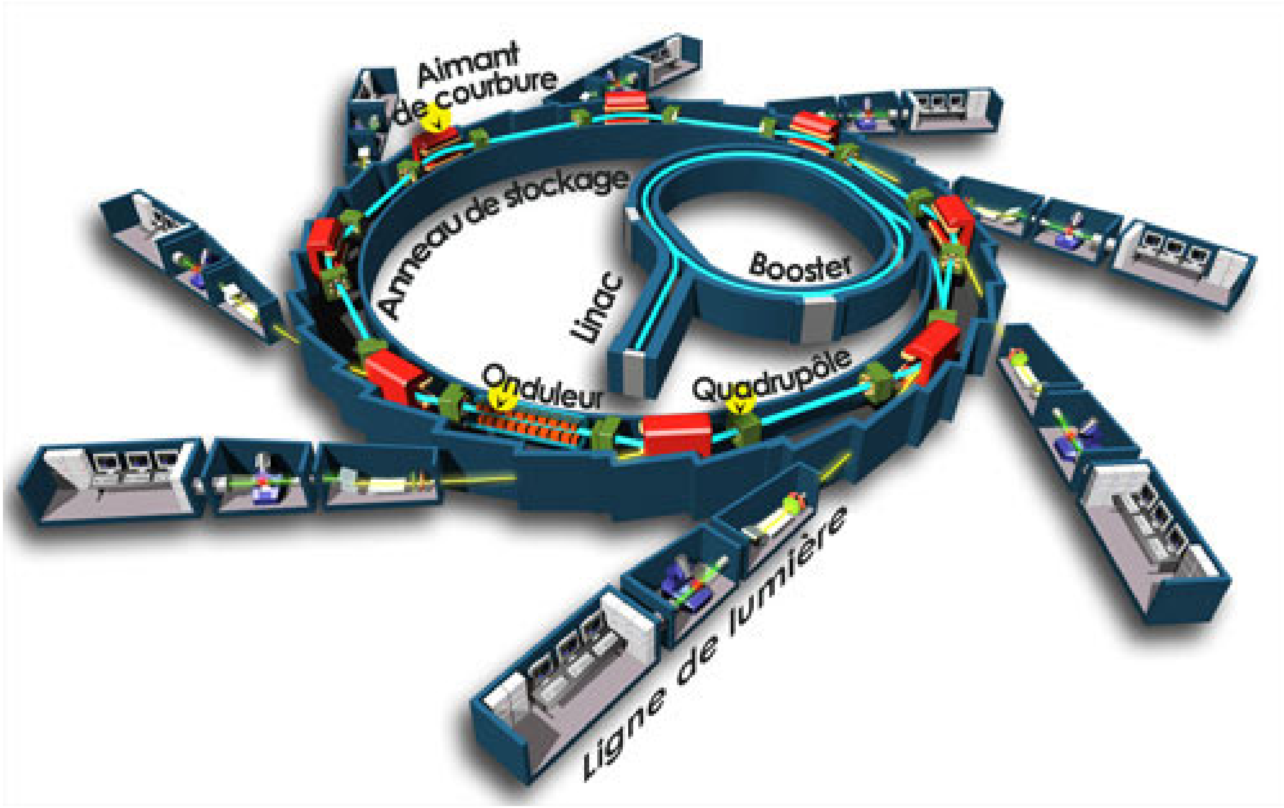
→ Représenter sur un schéma la force de Lorentz associée à une configuration donnée par le colleur.

→ Déterminer le rayon de la trajectoire circulaire d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, orthogonal à la vitesse.

Documents

Document 1 – Synchrotron SOLEIL

synchrotron-soleil.fr



Situé sur le plateau de Saclay, le synchrotron SOLEIL (Source Optimisée de Lumière d'Énergie Intermédiaire du LURE), est un accélérateur d'électrons qui produit le rayonnement synchrotron, une lumière extrêmement brillante qui permet d'explorer la matière inerte ou vivante. Ce rayonnement est émis par des électrons rapides lorsque leur trajectoire est déviée sous l'action d'un champ magnétique. Les électrons sont accélérés par des champs électriques jusqu'à 99,999 998 % de la vitesse de la lumière ! Si les principes utilisés pour manipuler le faisceau d'électrons sont identiques à ceux abordés dans ce chapitre, l'étude quantitative de cet instrument échappe à la description classique du mouvement de particules chargées.

Document 2 – Ordres de grandeurs des champs électriques et magnétiques usuels

Champs électriques

Source	Intensité
Lumière du jour	$10^2\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$
Temps orageux	$10^5\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$
Champ de claquage de l'air	$10^6\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$
Champ dans un atome	$10^{11}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$

Champs magnétiques

Source	Intensité
Champ terrestre	$5\times10^{-5}\ \mathrm{T}$
Aimant permanent	$10^{-1}\ \mathrm{T}$
IRM	$1\ \mathrm{T}$
Record en laboratoire	$90\ \mathrm{T}$

Produit vectoriel

Définition

Le **produit vectoriel** d'un vecteur $\vec{a}$ avec un vecteur $\vec{b}$ donne un vecteur $\vec{c}$ noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- **direction** : orthogonale à $\vec{a}$ et $\vec{b}$, soit $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$;
- **sens** : tel que le trièdre $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ soit direct (règle de la main droite) ;
- **norme** : elle est donnée par

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \sin\alpha, \quad \text{avec} \quad \alpha = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}.$$

Si l'on connait les coordonnées de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans une base orthonormée directe, on a :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ b_x a_z - b_z a_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

On en déduit quelques propriétés importantes :

- le produit vectoriel est **linéaire** : $(\lambda \vec{a_1} + \vec{a_2}) \wedge \vec{b} = \lambda \vec{a_1} \wedge \vec{b} + \vec{a_2} \wedge \vec{b}$;
- le produit vectoriel est **antisymétrique** : $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$;
- **le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est égal au vecteur nul** ;
- si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont unitaires et orthogonaux, alors le trièdre $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$ est **orthonormé et direct**.

Application 0 – Produit vectoriel

1. Les bases utilisées en physique sont orthonormées directes. Compléter le tableau.

Base cartésienne	Base cylindrique	Base sphérique
$\vec{e_x} \wedge \vec{e_y} =$ $\vec{e_y} \wedge \vec{e_z} =$ $\vec{e_z} \wedge \vec{e_x} =$	$\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} =$ $\vec{e_\theta} \wedge \vec{e_z} =$ $\vec{e_z} \wedge \vec{e_r} =$	$\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} =$ $\vec{e_\theta} \wedge \vec{e_\varphi} =$ $\vec{e_\varphi} \wedge \vec{e_r} =$
$\vec{e_x} \wedge \vec{e_z} =$	$\vec{e_\theta} \wedge \vec{e_r} =$	$\vec{e_\varphi} \wedge \vec{e_\theta} =$

Pour une base orthonormée directe, on a donc $\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \vec{e_3}$ plus permutation circulaire.

2. Calculer :

$(3\vec{e_x} + 2\vec{e_z}) \wedge 2\vec{e_x} =$

$(3\vec{e_x} + 2\vec{e_z}) \wedge (2\vec{e_x} + 3\vec{e_y}) =$

$(\vec{e_x} \wedge (\vec{e_y} - \vec{e_z})) \cdot \vec{e_x} =$

$(4\vec{e_x} + 2\vec{e_z}) \wedge (-2\vec{e_x} - \vec{e_z}) =$

1 Force de Lorentz

1.1 Champ électromagnétique

On appelle **champ électromagnétique** le couple $(\vec{E}, \vec{B})$, composé du champ électrique $\vec{E}$ et du champ magnétique $\vec{B}$, défini en tous points de l'espace. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont de natures différentes mais ils sont profondément liés (cf. cours d'électromagnétisme en deuxième année) :

- le champ électrique résulte d'une différence de potentiel appliquée entre deux points séparés spatialement. Il s'exprime en volts par mètre $(\mathrm{V \cdot m^{-1}})$;
- les origines du champ magnétique sont diverses : courants électriques, aimants permanents (cf. Chap. I1). Il s'exprime en teslas (T).

Les ordres de grandeur du Doc. 2 sont à connaitre.

Dans le cadre du programme, on ne traitera que des champs électriques et magnétiques

- **uniformes** : ils ont les mêmes direction, sens et norme en tout point de l'espace ;
- **stationnaires** : ils ne dépendent pas du temps.

1.2 Force de Lorentz

La force de Lorentz est la force associée à un champ électromagnétique subie par une particule chargée.

Définition

Une particule de charge q animée d'une vitesse $\vec{v}$, plongée dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$, est soumise à la **force de Lorentz** :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right).$$

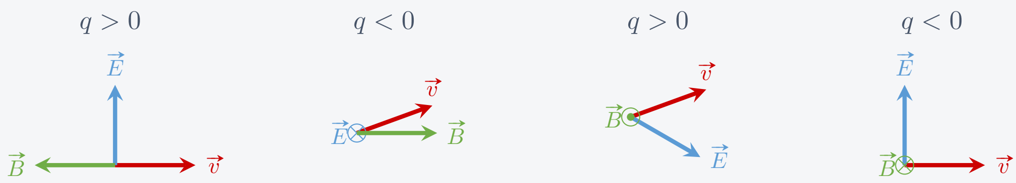
Elle se décompose en deux termes :

- une composante **électrique** $\overrightarrow{F_E} = q\vec{E}$ qui généralise la force de Coulomb ;
- une composante **magnétique** $\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Rq : Les forces doivent être indépendantes du référentiel galiléen choisi. Pourtant, $\vec{v}$ ne l'est pas : il faut donc que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dépendent du choix du référentiel.

Application 1 – Construction graphique de la force de Lorentz

1. Reproduire les schémas ci-dessous et tracer le vecteur associé à la force de Lorentz en distinguant ses composantes électrique et magnétique.



2. Que peut-on dire de la composante magnétique de la force de Lorentz par rapport au vecteur vitesse ?

Ordres de grandeur

Application 2 – Comparaisons

1. Le champ électrique créé par le noyau d'un atome d'hydrogène ^{1}H est donné par

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$$

où r est la distance au noyau, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ la charge élémentaire et $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$. Comparer les forces d'attraction gravitationnelle et électrique liées au noyau, subie par l'électron.
Données : masse d'un électron $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, *masse d'un proton* $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, *constante gravitationnelle* $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

2. Déterminer les ordres de grandeur :
   - de l'intensité du champ électrique pour laquelle le poids d'un proton est comparable à la composante électrique de la force de Lorentz ;
   - de la vitesse d'un proton pour laquelle la composante magnétique de la force de Lorentz due au champ magnétique terrestre est égale à son poids.

3. Déterminer l'intensité du champ électrique nécessaire pour que les deux composantes de la force de Lorentz soient du même ordre de grandeur, dans le cas d'un électron allant à 10 % de la vitesse de la lumière dans un champ magnétique d'intensité 0,1 T.

Propriété 1

Le **poids** d'une particule chargée plongée dans un champ électromagnétique est toujours **négligeable devant la force de Lorentz**.

1.3 Puissance de la force de Lorentz

On considère un particule de charge q plongée dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ uniforme et stationnaire. La puissance de la force de Lorentz s'exprime :

$$\mathcal{P}(\vec{F_L}) = \vec{F_L} \cdot \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}.$$

La puissance de la composante électrique de la force de Lorentz est a priori non nulle. En revanche, la puissance de la composante magnétique de la force de Lorentz est toujours nulle.

Dans le cas d'un **champ magnétique seul**, le théorème de la puissance cinétique donne :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t}(t) = 0,$$

donc $\|\vec{v}(t)\| = \text{cste}$: le mouvement est uniforme.

Propriété 2 (à démontrer)

La **composante magnétique** de la force de Lorentz **ne travaille pas**. Dans un champ magnétique seul, le mouvement est uniforme.

On peut :

- **accélérer et dévier** des particules chargées avec un **champ électrique** ;
- **dévier** des particules chargées avec un **champ magnétique**.

2 Mouvement dans un champ électrique uniforme

Dans toute cette section, l'étude est menée dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire (référentiel terrestre) supposé galiléen.

2.1 Potentiel électrostatique

On s'intéresse au mouvement d'une particule de charge q dans un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et stationnaire seul. Pour simplifier, on suppose $\vec{E} = E\vec{e_x}$.

Le travail élémentaire de la force de Lorentz s'exprime :

$$\delta W(\vec{F_L}) = q\vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = qE\mathrm{d}x = \mathrm{d}(qEx) = -\mathrm{d}(-qEx).$$

Le travail élémentaire est une différentielle totale, la force électrique est donc conservative et dérive de l'énergie potentielle

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = q(-Ex + \mathrm{cste}).$$

Propriété 3 (à démontrer)

La composante électrique de la force de Lorentz est **conservative**.

En introduisant le potentiel électrique $V(x) = -Ex + \mathrm{cste}$, on a

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = qV(x).$$

Définition

On peut associer à toute particule de charge q évoluant dans un champ électrique stationnaire de la forme $\vec{E} = E\vec{e_x}$ une énergie potentielle de la forme

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) = qV(x),$$

où $V(x)$ est le **potentiel électrique** exprimé en volts (V).

Rq : Le potentiel électrique $V(x)$ correspond à la même grandeur physique que dans les circuits électriques rencontrés aux chapitres 3, 4 et 5.

Enfin, puisque

$$\vec{F}(x) = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}(x)\vec{e_x}, \quad \text{on a} \quad q\vec{E}(x) = -q\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x)\vec{e_x}, \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x)\vec{e_x}.$$

Propriété 4 (à démontrer)

Pour un champ électrique $\vec{E}(x) = E(x)\vec{e_x}$ dirigé selon $\vec{e_x}$, on a

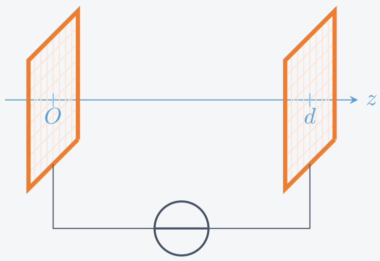
$$\vec{E}(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x)\vec{e_x}.$$

Le champ électrique est donc toujours orienté **dans le sens des potentiels décroissants**, c'est-à-dire des zones de fort potentiel vers les zone de faible potentiel.

Application 3 – Canon à électrons

On considère le dispositif représenté ci-contre, où deux électrodes planes parallèles sont soumises à une tension $U = 2\,\mathrm{kV}$. On admet que le champ électrique est uniforme dans l'espace entre les électrodes, nul en dehors.

On souhaite accélérer des électrons dans le sens des z croissants.



1. Orienter le champ électrique $\vec{E}$ dans le dispositif et en déduire l'orientation du générateur en représentant la tension U à ses bornes. Exprimer le champ $\vec{E}$ en fonction de U, d et $\vec{e_z}$.
2. Un électron est émis avec une vitesse initiale nulle en $z = 0$. Exprimer sa vitesse v au niveau de la deuxième électrode.
3. On souhaite maintenant accélérer des ions mercure ${}^{200}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$, toujours dans le sens des x croissants. Faut-il modifier le montage précédent ? Si oui, comment ? En utilisant le résultat précédent, exprimer la vitesse v' d'un ion mercure en sortie du dispositif.

Données : charge élémentaire $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, *masse d'un électron* $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, *masse d'un nucléon* $m_n = 1{,}7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

Exemple : *Ce principe est à la base du fonctionnement de l'accélérateur linéaire du synchrotron (Doc. 1, linac).*

Propriété 5 (à démontrer)

Entre les armatures d'un condensateur plan, le champ électrique $\vec{E}$ est uniforme (admis) et de norme

$$\left\|\vec{E}\right\| = \frac{|U|}{d},$$

où U est la tension aux bornes du condensateur et d la distance entre ses armatures.

2.2 Équation du mouvement

On s'intéresse au mouvement d'une particule de charge q et de masse m, assimilée à son centre de masse M, dans un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et stationnaire. L'étude est menée dans le référentiel du laboratoire considéré galiléen. La particule est initialement à l'origine du repère avec une vitesse $\vec{v_0}$.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique seul

`chapM4-particule_chargee.py`

Étudier et commenter l'influence de la charge, la masse, la vitesse initiale de la particule et de l'orientation du champ électrique.

Propriété 6

Dans un **champ électrique uniforme et stationnaire seul**, le mouvement d'une particule chargée est un **mouvement à vecteur accélération constant**. Les résultats obtenus sont analogues à ceux d'une chute libre.

Le PFD s'écrit alors :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}.$$

Puisque $\vec{E}$ ne dépend ni du temps ni de l'espace, on intègre simplement pour obtenir la vitesse et la position :

$$\vec{v}(t) = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{v_0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM}(t) = \frac{q\vec{E}}{2m}t^2 + \vec{v_0}t.$$

Rq : Cette évolution de la position est analogue à un mouvement de chute libre dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{\vec{g}}{2}t^2 + \vec{v_0}t.$$

Application 4 – Électron dans un condensateur

On se place dans un référentiel galiléen associé au repère cartésien $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.
Un électron pénètre en O entre les armatures carrées d'un condensateur plan avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$. Les armatures du condensateur sont parallèles, occupent les plans d'équation $z = -d$ (armature B) et $z = d$ (armature A) et s'étendent de $x = 0$ à $x = a$ et de $y = -a/2$ à $y = a/2$. Dans cette zone règne un champ électrique $\vec{E} = E_0\vec{e_z}$ uniforme. L'armature A est au potentiel V_0 et l'armature B est reliée à la masse.

1. Exprimer E_0 en fonction des paramètres du problème. En déduire l'expression de $\vec{E}$.
2. Établir les équations horaires du mouvement $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
3. Quelle est la condition sur le potentiel V_0 pour que l'électron sorte du condensateur sans heurter une armature ?

Exemple : *Les champs électriques sont moins utilisés pour dévier les particules chargées que les champs magnétiques. Les anciens oscilloscopes analogiques à tube cathodique fonctionnent néanmoins sur ce principe (TD E4, Ex. 6).*

3 Mouvement dans un champ magnétique uniforme

3.1 Approche expérimentale et numérique

python Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique seul

`chapM4-particule_chargee.py`

Étudier et commenter l'influence de la charge, la masse, la vitesse initiale de la particule et de l'orientation du champ électrique.

Rq : Dans une chambre à bulle, la trajectoire des particules chargées ressemble davantage à des spirales. Pourquoi ? Peut-on le simuler ?

Dans le cadre du programme, on ne traitera que le cas où le vecteur vitesse est initialement perpendiculaire au champ magnétique.

Propriété 7 (à démontrer)

Dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, le mouvement d'une particule chargée est **circulaire** (admis) et **uniforme**.

3.2 Rayon cyclotron

Application 5 – Rayon cyclotron

Dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0\vec{e_z}$, un proton a une trajectoire circulaire contenue dans le plan (Oxy).

1. Montrer que le mouvement est uniforme.
2. À un instant quelconque, sa vitesse est $v_0\vec{e_x}$. Le sens de parcours de la trajectoire dépend-il du signe de v_0 ? De quoi dépend-il ?
3. Déterminer le rayon R de la trajectoire :
   - en utilisant les coordonnées cylindriques ;
   - en utilisant le repère de Frenet.

python™ **Évolution du rayon cyclotron avec les différents paramètres**

`chapM4-particule_chargee.py`

Étudier l'évolution du rayon de la trajectoire en fonction des différents paramètres pour valider qualitativement l'expression du rayon cyclotron.

Propriété 8 (à démontrer)

Le **rayon cyclotron** R_c est le rayon de la trajectoire circulaire d'une particule de masse m, de charge q et de vitesse v dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et stationnaire, orthogonal au vecteur vitesse :

$$R_c = \left|\frac{mv}{qB}\right|$$

Bonus

Montrons que, dans le cadre des hypothèses précédentes, la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique seul est **circulaire**. On étudie donc la trajectoire d'une particule de masse m et de charge q dans un référentiel galiléen en présence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ seul, uniforme et stationnaire.

Si la vitesse initiale de la particule est dans le plan (Oxy), il ne peut y avoir de mouvement selon $\overrightarrow{e_z}$ car la composante magnétique de la force de Lorentz, orthogonale à $\overrightarrow{B}$, ne possède pas de composante selon $\overrightarrow{e_z}$. En l'absence d'autre force, le mouvement est donc contenu dans le plan (Oxy). Sans perdre en généralité, on suppose qu'à l'instant initial, la vitesse de la particule est selon $\overrightarrow{e_x}$, soit $\overrightarrow{v}(0) = v_0\overrightarrow{e_x}$.

En utilisant les coordonnées cartésiennes, le PFD s'écrit alors

$$m\overrightarrow{a} = q\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right), \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{qB}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = -\dfrac{qB}{m}\dot{x}. \end{cases}$$

Pour résoudre cette équation, on introduit la variable complexe

$$\underline{z} = x + jy.$$

En sommant les deux équations précédentes après avoir multiplié la seconde par j, on obtient

$$\ddot{\underline{z}} + j\omega_c\dot{\underline{z}} = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{qB}{m},$$

où ω_c est appelée pulsation cyclotron. La solution est

$$\dot{\underline{z}}(t) = v_0 e^{-j\omega_c t}.$$

En intégrant à nouveau, on obtient

$$\underline{z}(t) = j\frac{v_0}{\omega_c}e^{-j\omega_c t} = jR_c(\cos(\omega_c t) - j\sin(\omega_c t)),$$

avec R_c le rayon cyclotron, en choisissant l'origine du repère au centre de la trajectoire. En identifiant, on obtient finalement

$$\begin{cases} x(t) = R_c\sin(\omega_c t) \\ y(t) = R_c\cos(\omega_c t). \end{cases}$$

Il s'agit bien de l'équation paramétrique d'une trajectoire circulaire de rayon R_c.