TD M4 – Mouvement d'une particule chargées dans un champ électromagnétique

★☆☆ Exercice 1 – Opérations vectorielles

1. Les vecteurs sont tous exprimés dans une base orthonormée directe. Calculer les expressions suivantes.

1.a. $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

1.b. $\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}6\\-2\\4\end{pmatrix}$

1.c. $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

1.d. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

2. On note $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ les vecteurs unitaires des bases orthonormées directes cartésienne, cylindrique et sphérique. Calculer les expressions suivantes.

En cartésien :

2.a. $\overrightarrow{e_x} \wedge (2\overrightarrow{e_x} + 3\overrightarrow{e_y})$

2.b. $(5\overrightarrow{e_y} \wedge 2\overrightarrow{e_z}) \wedge \overrightarrow{e_x}$

2.c. $(2\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_x}) \cdot \overrightarrow{e_x}$

En cylindrique :

2.d. $3\overrightarrow{e_\theta} \wedge (\overrightarrow{e_z} + 3\overrightarrow{e_r})$

2.e. $\overrightarrow{e_z} \cdot (\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{e_\theta})$

2.f. $(2\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_\theta}) \wedge (\overrightarrow{e_r} + 3\overrightarrow{e_\theta})$

En sphérique :

2.g. $\overrightarrow{e_\theta} \wedge 2\overrightarrow{e_r}$

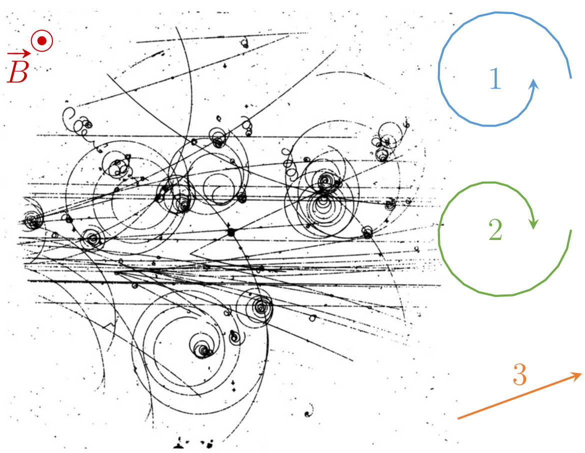
2.h. $(3\overrightarrow{e_\theta} + \overrightarrow{e_\varphi}) \wedge (2\overrightarrow{e_r} - \overrightarrow{e_\theta})$

2.i. $\overrightarrow{e_r} \cdot (-\overrightarrow{e_r} \wedge 2\overrightarrow{e_\varphi})$

★☆☆ Exercice 2 – Chambre à bulles

Pour visualiser les trajectoires des particules chargées, les premiers détecteurs étaient des « chambres à bulles » dans lesquelles les particules (électrons, neutrons, protons, etc.) déclenchaient la formation de bulles dans un liquide et marquaient ainsi leur passage par une trainée de bulles. La figure ci-dessous représente un cliché typique des traces observées lors d'une collision à haute énergie de particules au CERN.

Dans ces chambres à bulles, il règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$. Par ailleurs, le passage dans le liquide conduit à une lente décélération des particules.



1. Déterminer le signe de la charge des particules associées aux trois types de trajectoires observées.
2. Expliquer qualitativement pourquoi les trajectoires observées ne sont pas circulaires mais s'enroulent en spirales dont le rayon diminue.

★☆☆ Exercice 3 – Sélecteur de vitesse

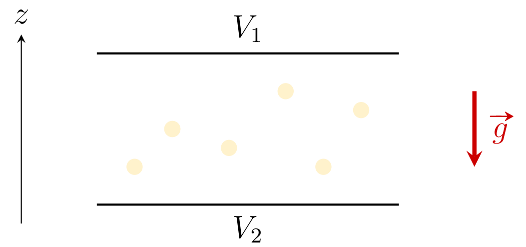
Une particule de masse m et charge q pénètre avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$ dans une zone où règne un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$, avec $\vec{E} = E_0\vec{e_y}$ et $\vec{B} = B_0\vec{e_z}$ uniformes et stationnaires.

1. À quelle condition le vecteur vitesse de la particule reste-t-il inchangé ?
2. Proposer le schéma d'un montage expérimental permettant de sélectionner des particules chargées ayant une vitesse donnée.

★★☆ Exercice 4 – Expérience de Millikan

On disperse un brouillard de fines gouttelettes sphériques d'huile, de masse volumique $\rho = 1{,}3 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, dans l'espace séparant les deux plaques horizontales d'un condensateur plan, distantes de $d = 2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$. La tension $U = V_1 - V_2$ aux bornes du condensateur est de l'ordre de quelques kV. Les gouttelettes sont chargées négativement et ont une vitesse initiale nulle.

Toutes les gouttelettes ont le même rayon R de l'ordre du micron, mais pas forcément la même charge $q < 0$, avec $|q|$ de l'ordre de quelques $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Les frottements de l'air, de masse volumique $\rho_a = 1{,}3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, sont modélisés par une force de frottements visqueux $\vec{f} = -k\vec{v}$, avec $k = \alpha R$ et $\alpha = 3{,}4 \times 10^{-4}$ SI.



1. Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur une gouttelette. Peut-on en négliger ?

On impose dans cette partie seulement $U = 0\,\mathrm{V}$.

2. Déterminer la vitesse limite $\vec{v_0}$.
3. On mesure $v_0 = 2{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Déterminer la valeur de R.
4. Déterminer l'expression de la vitesse des gouttes $\vec{v}(t)$. On fera apparaitre un temps caractéristique τ que l'on exprimera en fonction des données du problème.

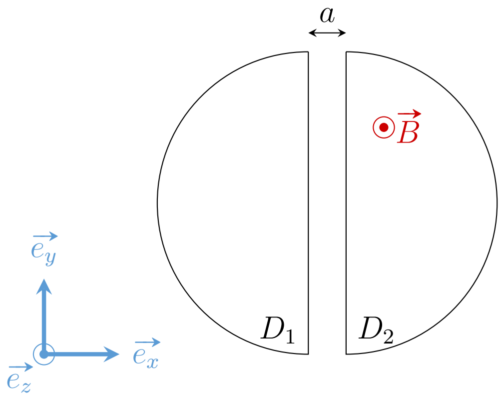
On applique une différence de potentiel U de manière à ralentir la chute des gouttelettes.

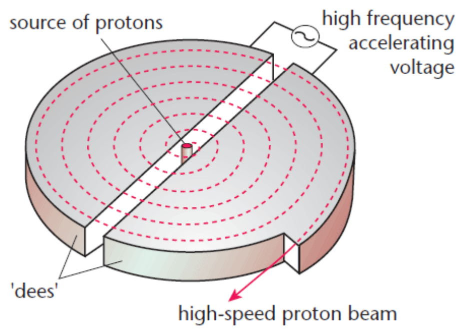
5. Donner le sens et la direction du champ $\vec{E}$. En déduire la plaque dont le potentiel électrique est le plus élevé, en déduire le signe de U et donner l'expression du champ $\vec{E}$.
6. Une partie des gouttelettes s'immobilise pour $U_1 = 3{,}2\,\mathrm{kV}$, une autre pour $U_2 = 4{,}8\,\mathrm{kV}$, etc. Exprimer puis calculer les charges q_1 et q_2 de ces deux groupes de gouttelettes.
7. Que remarque-t-on ?

★★☆ Exercice 5 – Cyclotron

Un cyclotron est formé de deux enceintes demi-cylindriques D_1 et D_2, appelées « dees » en anglais, séparées d'une zone étroite d'épaisseur a. Les « dees » sont situés dans l'entrefer d'un électroaimant qui produit un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_z}$, de norme $B = 1{,}5\,\mathrm{T}$. Une tension sinusoïdale u d'amplitude $U_m = 200\,\mathrm{kV}$ est appliquée entre les deux extrémités de la bande intermédiaire, si bien qu'il y règne un champ électrique uniforme orienté selon $\vec{e_x}$.

On injecte des protons au sein de la zone intermédiaire avec une vitesse initiale négligeable.





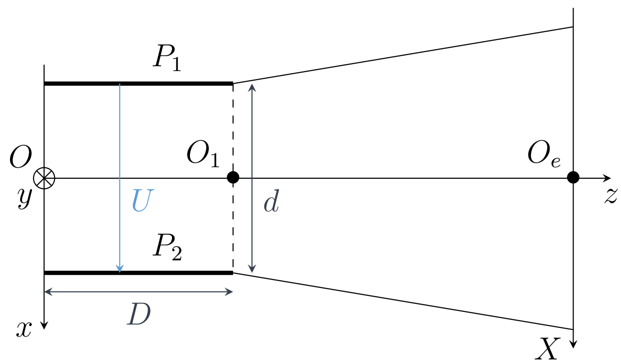
sciences.univ-nantes.fr

1. Montrer qu'à l'intérieur d'un dee, la norme de la vitesse des protons est constante.
2. En déduire le rayon de courbure R de la trajectoire des protons ayant une vitesse v ainsi que le temps que passe un proton dans un dee. Commenter.
3. On suppose $a \ll R$. Quelle doit être la fréquence f de la tension pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les dees ?
4. Exprimer la vitesse v_n puis le rayon R_n de la trajectoire d'un proton après n passages dans la zone d'accélération. Le demi-cercle $n = 1$ est celui qui suit la première phase d'accélération.
5. Calculer numériquement le rayon de la trajectoire après un tour (donc un passage dans chaque dee), puis après dix tours.
6. Le rayon de la dernière trajectoire décrite par les protons accélérés avant de bombarder une cible est $R_N = 35\,\mathrm{cm}$. Déterminer l'énergie cinétique du proton avant le choc contre la cible et l'exprimer en électronvolts (eV).
7. Exprimer puis calculer le nombre de tours parcourus par le proton, ainsi que la durée totale de l'accélération.

Donnée : masse d'un proton $m = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ *; électronvolt* $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

★★★ Exercice 6 – Oscilloscope analogique

Dans tout l'exercice, on se place dans un référentiel galiléen associé au repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Une zone de champ électrique est établie entre les plaques P_1 et P_2. Le champ est supposé nul en dehors. La distance entre les plaques est d, leur longueur est D et la différence de potentiel $U = V_2 - V_1$ est positive. Des électrons accélérés, de charge $q = -e$ et de masse m, pénètrent en O dans la zone de champ uniforme avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_z}$.



1. Établir l'expression de la force subie par les électrons en fonction de U, q, d, et $\overrightarrow{e_x}$.
2. Déterminer l'expression de la trajectoire $x = f(z)$ de l'électron dans la zone du champ en fonction de d, U et v_0.

3. Déterminer le point de sortie K de la zone de champ ainsi que les composantes du vecteur vitesse en ce point.
4. Montrer que le mouvement est rectiligne et uniforme dans la zone en dehors des plaques.
5. On note L la distance O_1O_e. Déterminer l’abscisse X_P du point d’impact P de l’électron sur l’écran en fonction de U, v_0, D, d, L, m et e.

Coups de pouce

Ex. 2 1. Que peut-on dire du vecteur accélération pour un mouvement circulaire ? Pour une trajectoire donnée, représenter le vecteur vitesse et la force subie par la particule à un instant quelconque.
Ex. 3 1. Principe d’inertie ? 2. Un écran perforé sera utile.
Ex. 4 1. Comparer notamment la poussée d’Archimède et le poids. 2. Que devient le PFD en régime permanent ? 4.. EDL1 : souvenir souvenir... 5. Attention au signe de la charge des gouttelettes. 7. Prix Nobel de physique 1923.

Ex. 5 3. Quelle est la durée nécessaire pour qu’un proton fasse un tour ? Combien de changement du sens de $\overrightarrow{E}$ pour accélérer le proton convenablement ?

Ex. 6 2. Mouvement à vecteur accélération constant, comme un air de déjà-vu... 3. Que vaut z en K ? 5. Intégrer l’équation du mouvement et/ou faire un schéma.

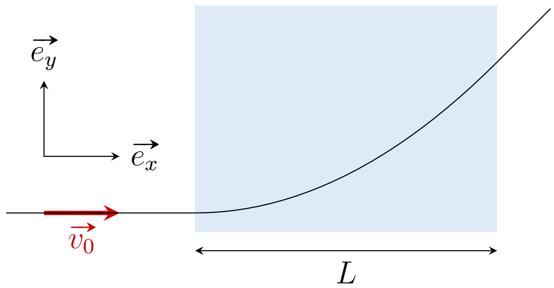
✓ Éléments de correction

Ex. 1 1.a. $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$; 1.b. $\overrightarrow{0}$; 1.c. 5 ; 1.d. -5 ; 2.a. $3\overrightarrow{e_z}$; 2.b. $\overrightarrow{0}$; 2.c. 0 ; 2.d. $3\overrightarrow{e_r} - 9\overrightarrow{e_z}$; 2.e. $\overrightarrow{0}$; 2.f. $-6\overrightarrow{e_z}$; 2.g. $-2\overrightarrow{e_\varphi}$; 2.h. $-6\overrightarrow{e_\varphi}+2\overrightarrow{e_\theta}+\overrightarrow{e_r}$; 2.i. 0.
Ex. 2 1. $q_1 < 0$, $q_2 > 0$, $q_3 = 0$.
Ex. 3 1. $E_0 = v_0 B_0$.
Ex. 4 1. $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{\Pi}_A = -\frac{\rho_a}{\rho} m\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{f} = -\alpha R\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{F_E} = q\overrightarrow{E}$; $P \gg \Pi_A$; 2. $\overrightarrow{v_0} = \frac{m}{\alpha R}\overrightarrow{g}$; 3. $R = \sqrt{\frac{3\alpha v_0}{4\pi\rho g}} = 1{,}1\,\mu\text{m}$; 4. $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v_0}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$; 5. $U > 0$, $\overrightarrow{E} = -\frac{U}{d}\overrightarrow{e_z}$; 6. $q = \frac{4\pi R^3 \rho g d}{3U}$, $q_1 = 4{,}8\times10^{-19}\,\text{C}$ et $q_2 = 3{,}2\times10^{-19}\,\text{C}$; 7. $q_1 = 3e$, $q_2 = 2e$.

Ex. 5 2. $R = \frac{mv}{eB}$, $\tau = \pi R/v$; 3. $f = \frac{eB}{2\pi m} = 23\,\text{MHz}$; 4. $v_n = \sqrt{\frac{2neU_m}{m}}$, $R_n = \sqrt{\frac{2nmU_m}{eB^2}}$; 5. $R_2 = 6{,}1\,\text{cm}$, $R_{20} = 19\,\text{cm}$; 6. $\mathcal{E}_{c,N} = \frac{R_N^2 e^2 B^2}{2m} = 2{,}1\times10^{-12}\,\text{J} = 13\,\text{MeV}$; 7. $N = \frac{eB^2 R_N^2}{2mU_m} \approx 66 : 33$ tours, $N\tau = 1{,}4\,\mu\text{s}$.
Ex. 6 1. $\overrightarrow{F_E} = \frac{eU}{d}\overrightarrow{e_x}$; 2. $x(z) = \frac{eU}{2mdv_0^2}z^2$; 3. $x_K = \frac{eUD^2}{2mdv_0^2}$, $z_K = D$, $\dot{x}_K = \frac{eUD}{mdv_0}$, $\dot{z}_K = v_0$; 5. $X_P = \frac{eUD}{2mdv_0^2}(2L+D)$.

Exercice 7 – Détermination d’un champ électrique – Oral

Un électron de masse m, d’énergie cinétique $\mathcal{E}_{c,0} = 80\,\text{keV}$ pénètre avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ horizontale dans une cavité de longueur $L = 1\,\text{m}$ où règne un champ électrique uniforme de norme E_0 constante.



1. Déterminer la direction et le sens du champ électrostatique $\overrightarrow{E_0}$, sachant qu’il ne s’exprime qu’en fonction de $\overrightarrow{e_x}$ ou $\overrightarrow{e_y}$.
2. Lors de sa traversée, l’énergie cinétique de l’électron varie de $|\Delta\mathcal{E}_c| = 10\,\text{keV}$. Quel est le signe de $\Delta\mathcal{E}_c$?
3. Déterminer la norme E_0.
4. Évaluer l’angle de déviation de la trajectoire en sortie de la zone de champ.

Données : $m = 9{,}11\times10^{-31}\,\text{kg}$; $1\,\text{eV} = 1{,}6\times10^{-19}\,\text{J}$.