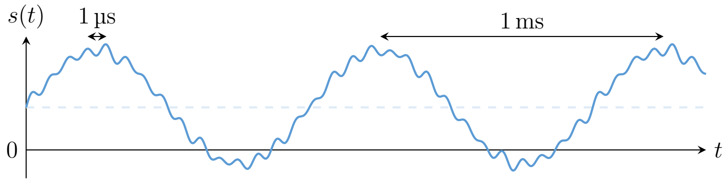
TD E5 – Filtrage linéaire

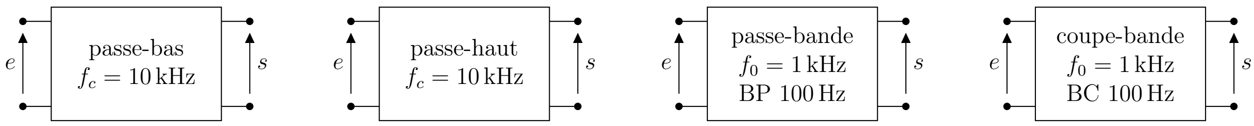
★☆☆ Exercice 1 – Filtrage d'un signal

Lors d'une expérience d'interférométrie laser, on souhaite étudier un flux lumineux variant sinusoïdalement dans le temps à une fréquence de l'ordre du kilohertz. Lors d'une mesure, une photodiode délivre le signal $s(t)$ schématisé ci-dessous.



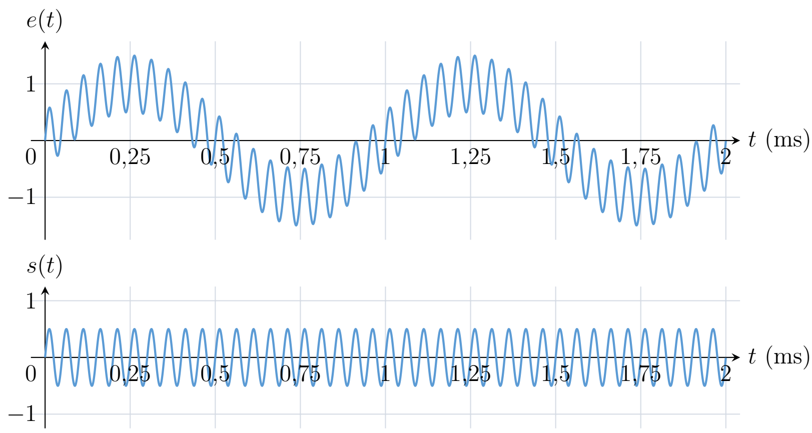
1. Décomposer ce signal électrique en trois parties que l'on commentera. Représenter son spectre.

2. Pour chacun des filtres ci-dessous, décrire qualitativement la tension obtenue en sortie du filtre. Les filtres sont supposés idéaux, c'est-à-dire que leur gain vaut 1 dans la bande passante (BP) et 0 dans la bande coupée (BC). Quel est le filtre le plus approprié ?



★☆☆ Exercice 2 – Choix de filtre

1. Quel filtre choisir pour passer du signal $e(t)$ au signal $s(t)$? Indiquer ses caractéristiques.



2. Quel filtre choisir (type et caractéristiques) pour réaliser les opérations suivantes ?

2.a. Supprimer la composante continue d'un signal afin de ne s'intéresser qu'à la partie alternative (mode AC de l'oscilloscope).

2.b. Moyenner un signal périodique de fréquence 300 Hz.

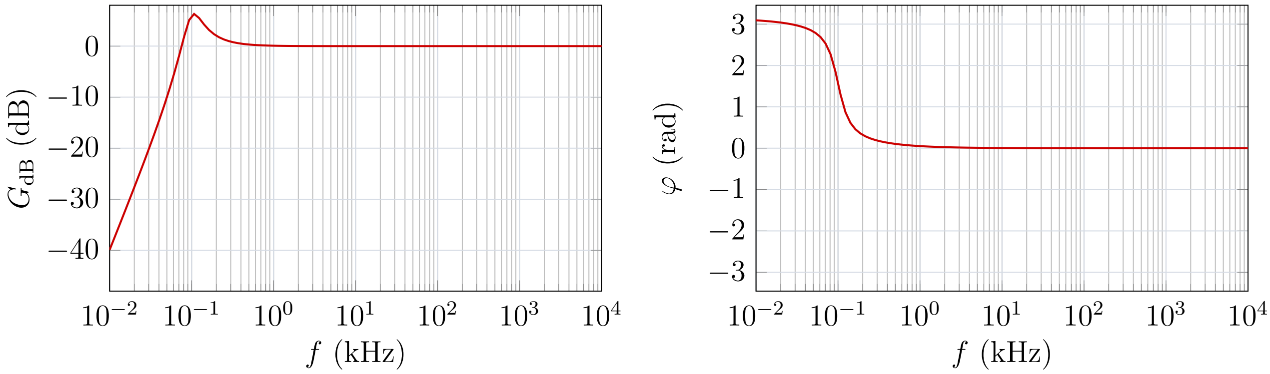
2.c. Éliminer le bruit autour du signal récupéré par un microphone placé devant un diapason.

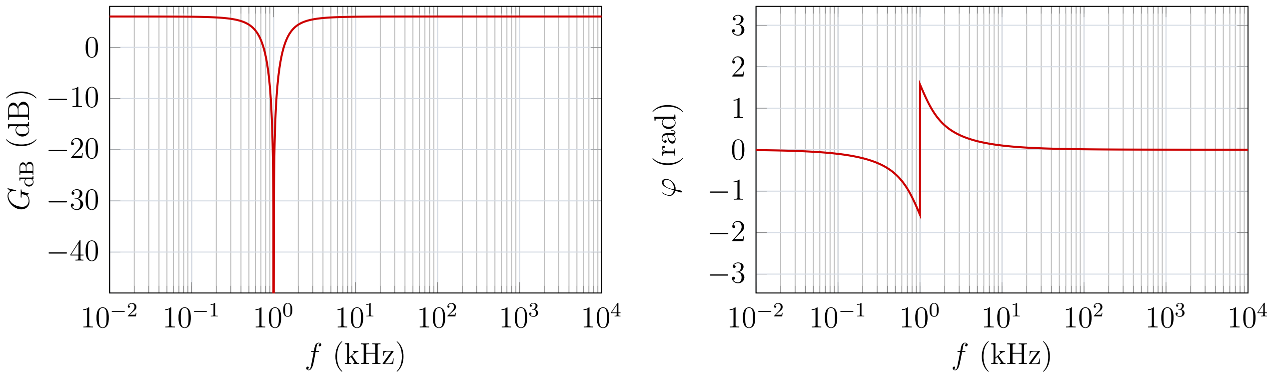
2.d. Supprimer la composante parasite à 50 Hz due à la tension du secteur ?

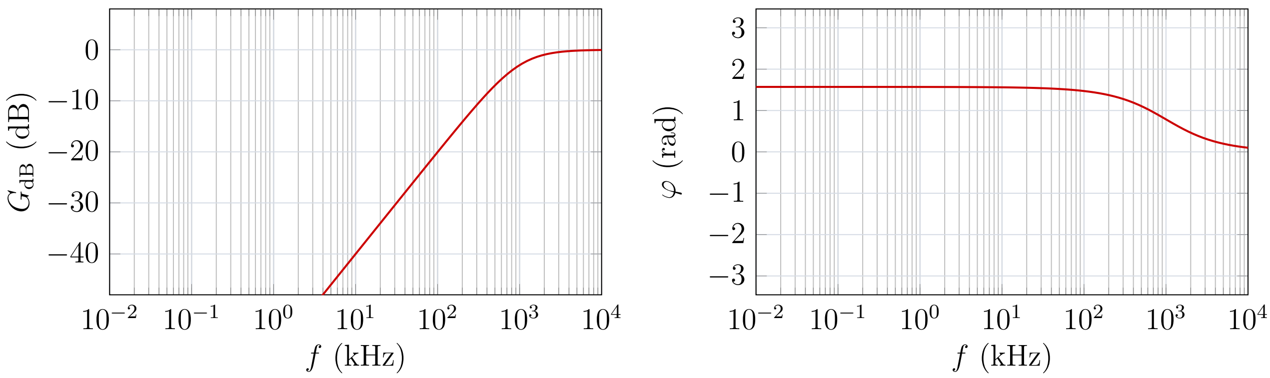
★☆☆ Exercice 3 – Lecture de diagramme de Bode

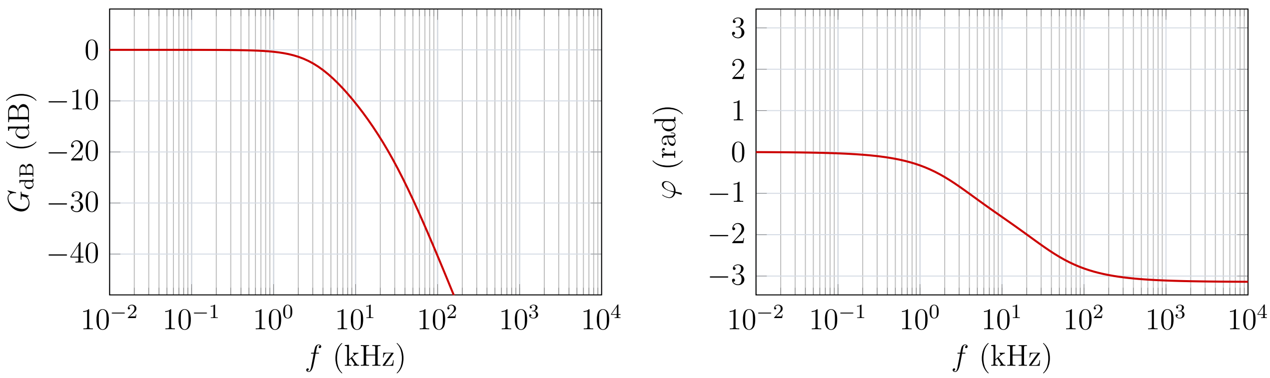
Pour les quatre diagrammes de Bode ci-dessous, indiquer le type de filtre dont il s'agit. Préciser s'il peut s'agir d'un filtre d'ordre 1 ou non. Déterminer ensuite, pour chaque filtre, l'expression du signal de sortie $s(t)$ si l'on envoie en entrée le signal $e(t)$ de fréquence $f = 1\,\text{kHz}$

$$e(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + E_0\cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0\cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right).$$







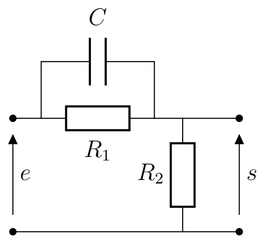


★☆☆ Exercice 4 – Circuit à avance de phase

On considère le filtre représenté ci-dessous.

1. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions de transfert de filtres passe-bas du premier ordre.

2. Utiliser cette propriété pour en construire rapidement le diagramme de Bode. On supposera pour le tracé que $R_1 \gg R_2$.



★★☆ Exercice 5 – Filtre de Wien

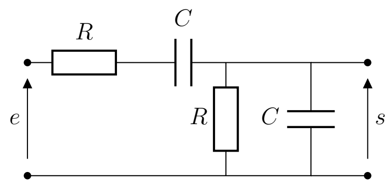
On s'intéresse au filtre de Wien représenté ci-dessous, où $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 500\,\mathrm{nF}$.

1. Sans calcul, déterminer de quel type de filtre il s'agit.

2. Montrer que la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

Donner les expressions de H_0, Q et ω_0.



3. Exprimer le gain linéaire, le gain en dB et le déphasage de la tension de sortie par rapport à celle d'entrée, en fonction de $x = \omega/\omega_0$.

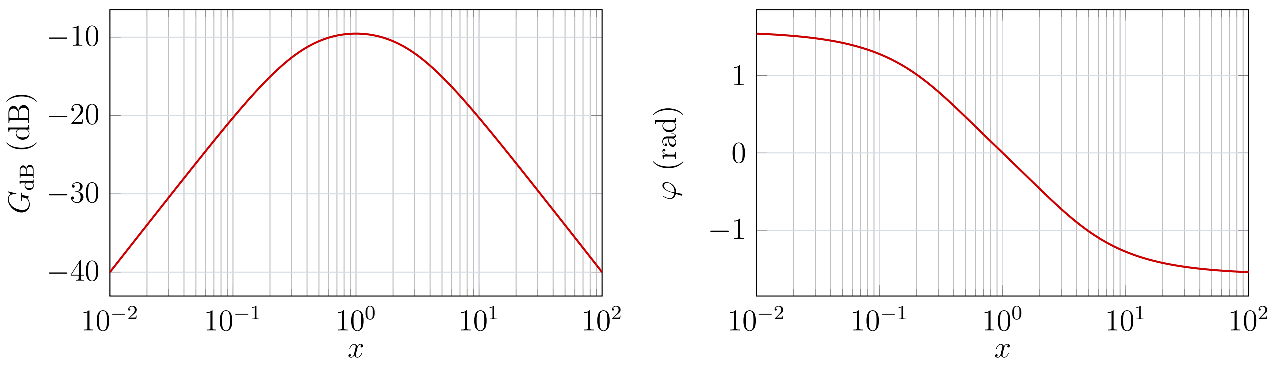
4. Calculer simplement le gain maximal G_0 du filtre, exprimer sa valeur $G_{0,\mathrm{dB}}$ en dB, et calculer le déphasage φ_0 correspondant.

5. Déterminer les fréquences de coupure et en déduire la bande passante du circuit.

6. Le diagramme de Bode de ce filtre est représenté ci-dessous. Expliquer les valeurs prises par la pente en haute et basse fréquence.

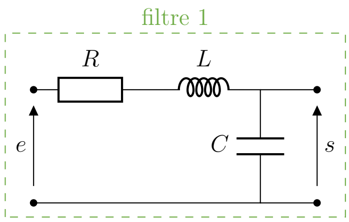
7. Déterminer l'expression du signal de sortie pour un signal d'entrée de la forme :

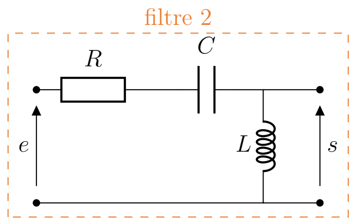
$$e(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + E_0\cos(10\omega t) + E_0\cos(100\omega t), \text{ où } \omega = 200\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$



★★☆ Exercice 6 – Filtres RLC série

On étudie les deux circuits linéaires représentés ci-dessous, dont l'expression des fonctions de transferts est donnée.





$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}} \qquad \underline{H}_2(j\omega) = \frac{jQ\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

On pourra traiter les questions pour le filtre 1, puis pour le filtre 2.

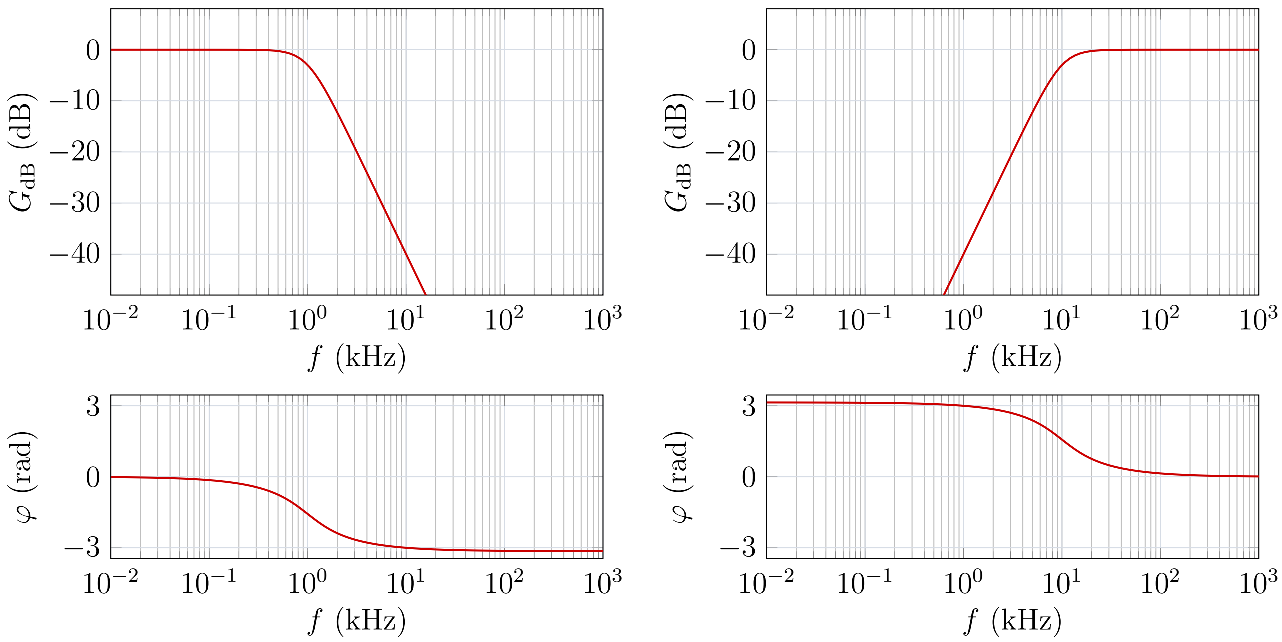
1. Sans calcul, déterminer le type de filtre dont il s'agit.

2. Retrouver l'expression de la fonction de transfert et donner les expressions de ω_0 et Q. Donner l'ordre du filtre.

3. Donner l'expression de l'équation différentielle reliant $s(t)$ et $e(t)$. Pour quelle raison peut-on affirmer la convergence du régime transitoire ?

4. Exprimer le gain et la phase du filtre en fonction de ω, ω_0 et Q.

Les diagrammes de Bode de ces filtres sont représentés ci-dessous pour $Q = 1/\sqrt{2}$.

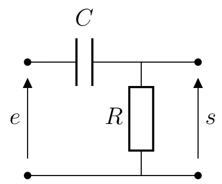


5. Retrouver les pentes des asymptotes en BF et HF.

6. Commenter l'intérêt d'utiliser un tel filtre plutôt qu'un filtre du même type mais d'ordre 1 en comparant leur action sur un signal d'entrée de pulsation $\omega_e = 2\pi \times 1\,\text{kHz}$ de la forme $e(t) = E_0\cos(\omega_e t) + E_0\cos(10\omega_e t)$.

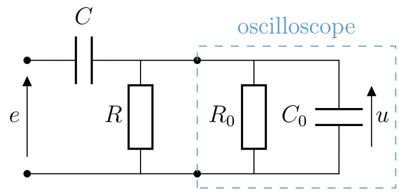
★★☆ Exercice 7 – Impédance d'entrée d'un oscilloscope

On considère le filtre représenté ci-contre.



1. Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{s}/\underline{e}$ où l'on posera $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$.
2. Représenter son diagramme de Bode.
3. Déterminer la fréquence de coupure pour $R = 500\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 0{,}1\,\mathrm{nF}$.

On mesure la tension de sortie à l'aide d'un oscilloscope dont l'entrée peut être assimilée à une association en parallèle d'une capacité $C_0 = 30\,\mathrm{pF}$ et d'une résistance $R_0 = 1\,\mathrm{M\Omega}$.



4. Montrer que la nouvelle fonction de transfert s'exprime :

$$\underline{\tilde{H}}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = H_0 \frac{jR_{\text{éq}}(C+C_0)\omega}{1 + jR_{\text{éq}}(C+C_0)\omega}, \quad \text{avec } H_0 = \frac{C}{C+C_0} \text{ et } R_{\text{éq}} = \frac{RR_0}{R+R_0}$$

et déterminer la nouvelle fréquence de coupure. Conclure sur l'influence de l'oscilloscope.

5. Comment choisir les valeurs des composants R et C pour que l'influence de l'oscilloscope soit négligeable ?

★★☆ Exercice 8 – Conception d'un filtre de siganux acoustiques

Un dispositif de traitement de signaux acoustiques nécessite la séparation de composantes sonores et ultrasonores. On souhaite éliminer les composantes ultrasonores : il faut donc réaliser un filtre passe-bas. Le cahier des charges du dispositif indique les caractéristiques suivantes :

- fréquence de coupure 20 kHz ;
- gain nominal (gain en basse fréquence) 0 dB ;
- l'atténuation des fréquences comprises entre 0 et 20 kHz doit être inférieure à 3 dB ;
- l'atténuation des fréquences supérieures à 40 kHz doit être supérieure à 10 dB

Le filtre le plus simple serait un passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 20\,\mathrm{kHz}$. On rappelle que la fonction de transfert d'un tel filtre s'écrit sous forme réduite

$$\underline{H}_1(jx) = \frac{1}{1+jx}, \quad \text{avec } x = \frac{f}{f_c}.$$

1. Retrouver la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain de ce filtre et calculer son gain à la fréquence de coupure.
2. Montrer qu'il ne peut satisfaire au cahier des charges imposé. Justifier qu'il est nécessaire d'utiliser un filtre d'ordre plus élevé.

On se tourne alors vers un filtre passe-bas du second ordre de fonction de transfert

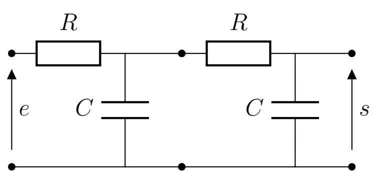
$$\underline{H}_2(jx) = \frac{1}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}.$$

3. Retrouver la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain de ce filtre. Peut-il satisfaire au cahier des charges imposé ?
4. Calculer le gain en décibel de ce filtre pour $f = f_c$. En déduire les valeurs de Q permettant de satisfaire au cahier des charges.

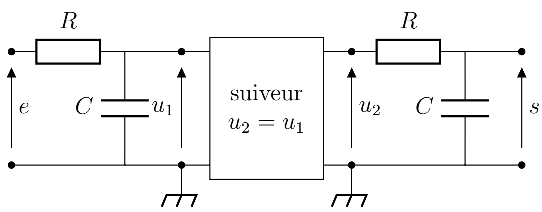
★★☆ Exercice 9 – Filtres en cascade

On souhaite obtenir simplement un filtre passe-bas d'ordre deux. Une première idée naïve consiste à mettre en cascade deux filtres RC identiques, c'est-à-dire à brancher l'entrée du second filtre sur la sortie du premier.

1. Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{s}(j\omega)/\underline{e}(j\omega)$. Cette fonction est-elle égale au produit des fonctions de transfert des deux filtres pris séparément ? Pourquoi ?



On améliore le montage précédent en plaçant entre les deux filtres un suiveur de tension. Il s'agit d'un quadripôle réalisant la fonction $u_1 = u_2$. Il possède par ailleurs une impédance d'entrée infinie, c'est-à-dire qu'aucun courant ne pénètre dans le suiveur.

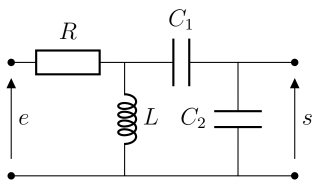


2. Déterminer la fonction de transfert de ce nouveau montage. Commenter.

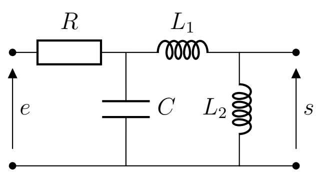
★★★ Exercice 10 – Fonctions de transfert et diagrammes de Bode

Déterminer et étudier les fonctions de transfert des filtres ci-dessous. Représenter l'allure de leur diagrammes de Bode.

1. Filtre de Colpitts.



2. Filtre de Hartley.



Coups de pouce

Ex. 3 Dresser un tableau indiquant, pour chaque composante de $e(t)$, les valeurs de G_{dB} et φ, en déduire G et appliquer la fonction de transfert harmonique à chaque composante.

Ex. 4 1. Passer en complexe, simplifier le circuit pour faire apparaitre un pont diviseur. 2. Si $\underline{H} = \frac{\underline{H}_1}{\underline{H}_2}$, que valent G_{dB} et φ ?

Ex. 5 1. Étudier les circuits équivalents en BF et HF. 4. Cette fonction a déjà été étudiée au Chap. E4. 5. Cf. TD E4, Ex. 9. 6. Déterminer les équivalents BF et HF de $\underline{H}$. 7. Cf. Ex. 3.

Ex. 6 6. Comparer l'expression du signal sortie du filtre, et celle en sortie d'un filtre du même type mais d'ordre 1.

Ex. 9 1. Peut-on utiliser directement un pont diviseur de tension pour déterminer la tension u aux bornes du premier condensateur ? 2. Et cette fois, le peut-on ?

✓ Éléments de correction

Ex. 2 1. Passe-haut / passe-bande ; 2.a. Passe-haut ; 2.b. Passe-bas ; 2.c. Passe-bande ; 2.d. Coupe-bande.

Ex. 3 1. $s(t) = E_0\cos(\omega t) + E_0\cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0\cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$; 2. $s(t) = 2E_0 + 2E_0\cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + 2E_0\cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$; 3. $\frac{E_0}{1000}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{E_0}{100}\cos\left(10\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + \frac{E_0}{10}\cos\left(100\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$; 4. $s(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + \frac{E_0}{\sqrt{10}}\cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_0}{100}\cos\left(100\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$.

Ex. 4 1. $\underline{H}(j\omega) = H_0\frac{\underline{H}_2(j\omega)}{\underline{H}_1(j\omega)}$, $H_0 = \frac{R_2}{R_1+R_2}$, $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1+jR_1C\omega}$, $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C\omega}$.

Ex. 5 1. Passe-bande ; 2. $H_0 = \frac{1}{3}$, $Q = \frac{1}{3}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$; 3. $G(x) = |\underline{H}(jx)|$, $G_{\text{dB}}(x) = 20\log G(x)$, $\varphi(x) = \arg\underline{H}(jx)$; 4. $G_0 = H_0$, $G_{\text{dB}} = -9{,}5\,\text{dB}$, $\varphi_0 = 0$; 5. $\omega_{c,+} = \omega_0\left(\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q}\right)$, $\omega_{c,-} = \omega_0\left(\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q}\right)$, $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$; 6. $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right)$, $G_{\text{dB}}(\omega) \underset{\text{HF}}{\sim} -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right)$; 7. $s(t) \approx -\frac{E_0}{10}\sin(\omega t) + \frac{E_0}{3}\cos(10\omega t) + \frac{E_0}{10}\sin(100\omega t)$.

Ex. 6 1. Passe-bas/passe-haut ; 2. Ordre 2 ; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$; 3. $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e$ et $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}$; 4. $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$, $\varphi(\omega) = \arg\underline{H}(j\omega)$; 5. $G_{\text{dB},1}(\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} 0$, $G_{\text{dB},1}(\omega) \underset{\text{HF}}{\sim} -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ et $G_{\text{dB},2}(\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} +40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$, $G_{\text{dB},2}(\omega) \underset{\text{HF}}{\sim} 0$; 6. Filtre plus sélectif.

Ex. 7 1. $\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$; 3. $f_c = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3{,}2\,\text{kHz}$; 4. $f_c' = 3{,}7\,\text{kHz}$; 5. $R \ll R_0$, $C \gg C_0$.

Ex. 8 2. $G_{\text{dB}}(40\,\text{kHz}) = -7\,\text{dB} > -10\,\text{dB}$; 3. $G_2(x) \underset{\text{BF}}{\sim} 0$, $G_2(x) \underset{\text{HF}}{\sim} -40\log x$; 4. $0{,}7 < Q < 2$.

Ex. 9 1. $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1-(RC\omega)^2+3jRC\omega} \neq \left(\frac{1}{1+jRC\omega}\right)^2$; 2. $\underline{H}'(j\omega) = \left(\frac{1}{1+jRC\omega}\right)^2$.

Ex. 10 $\underline{H}_C(j\omega) = \frac{H_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$; 1. $H_0 = \frac{C_1}{C_1+C_2}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$, $C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$; 2. $H_0 = \frac{L_2}{L_1+L_2}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}$, $Q = R\sqrt{\frac{C}{L_1+L_2}}$.

python™ Exercice 11 – Action d'un filtre sur un signal

1. Pour un filtre de votre choix (cf. cours, TD, TP et internet), puis pour d'autres, écrire les fonctions `G(f)`, `G_dB(f)` et `phi(f)` qui renvoient les gains et le déphasage introduit par le filtre en fonction de la fréquence f.[1]
2. On soumet le filtre à une entrée sinusoïdale $e(t) = \cos(\omega t)$. Sur un même graphe, représenter les signaux $e(t)$ et $s(t)$ en entrée et sortie du filtre. Commenter l'allure de la sortie obtenue en faisant varier les différents paramètres f, f_0, Q, etc. et/ou la nature du filtre.
3. Faire de même avec une entrée triangle dont la décomposition en série de Fourier est

$$s_{\text{triangle}}(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{\substack{n>0\\ \text{impair}}}\frac{1}{n^2}\cos(n\omega t) = \frac{8}{\pi^2}\left(\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega t) + \cdots\right).$$

1. Avec Python, le nombre complexe j s'écrit `1j`, $3+5j$ s'écrit `3 + 5j`, etc. Les fonctions `np.abs` et `np.angle` renvoient respectivement le module et l'argument d'un complexe. La commande `plt.semilogx` permet d'obtenir un graphique en échelle semi-logarithmique.

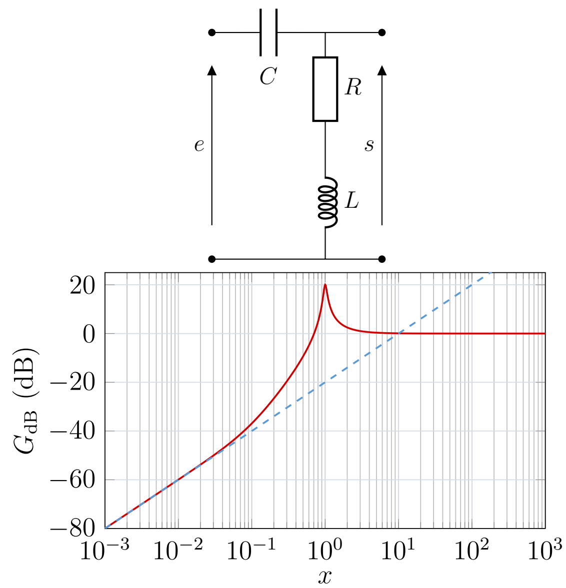
Exercice 12 – Filtre RLC – Oral

1. Identifier sans calcul la nature du filtre représenté ci-contre.
2. Déterminer la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H}(jx) = \frac{\frac{jx}{Q} - x^2}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$$

où $x = \omega/\omega_0$. Identifier la fréquence de résonance ω_0 et le facteur de qualité Q.

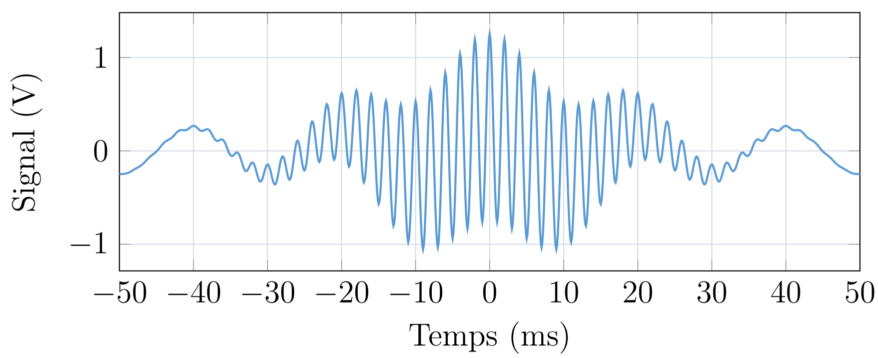
3. On donne le diagramme de Bode du filtre. Expliquer les valeurs prises par la pente en haute et basse fréquence. Déterminer la valeur de Q.



Exercice 13 – Filtrage d'un signal bruité – Résolution de problème

Un capteur délivre une tension parasitée par l'alimentation du secteur à 50 Hz (fréquence EDF). On cherche à concevoir un filtre adapté permettant d'obtenir le signal souhaité, c'est-à-dire déparasité.

Signal parasité



Signal corrigé