Chapitre M5 – Moment cinétique

Plan du cours

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

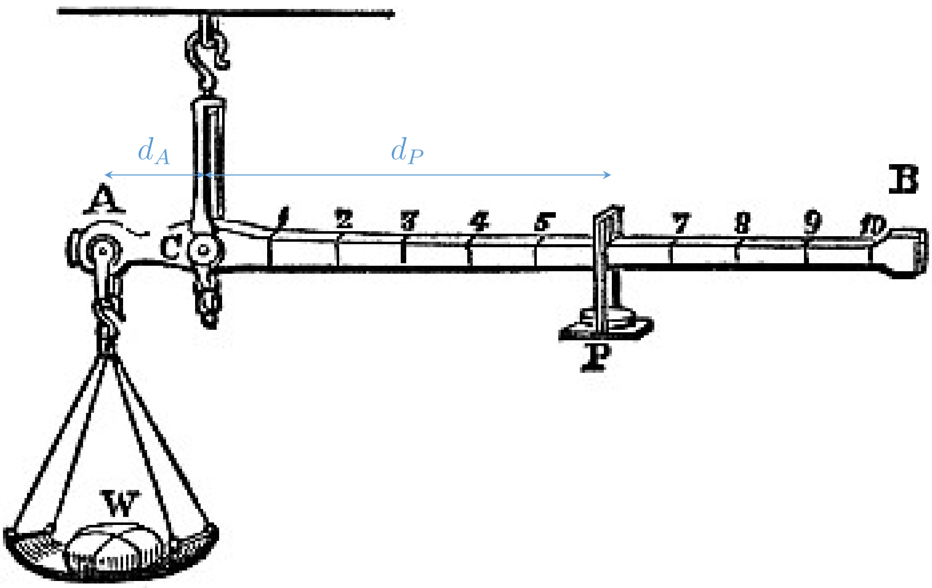
→ Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
→ Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
→ Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

Questions de cours

→ Définir le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et/ou à un axe et relier sa direction, son sens et/ou son signe aux caractéristiques du mouvement.
→ Définir le moment d'une force par rapport à un point et/ou un axe et l'exprimer en fonction du bras de levier.
→ Énoncer le théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe et/ou un axe fixe pour un point matériel.
→ Établir l'équation différentielle associée au pendule simple en utilisant le TMC/TMCS.

Documents

Document 1 – Balance romaine



En négligeant la masse du fléau, à l'équilibre, on montre que la masse m_W de l'objet à peser est liée au rapport d_P/d_A et à la masse m_P de la masselotte :

$$m_W = m_P \frac{d_P}{d_A}.$$

La masse m_W se déduit donc de la mesure de d_P.

1 Moment cinétique

1.1 Par rapport à un point

Définition

Soit un point matériel M de masse m, de vecteur vitesse $\vec{v}$ et de vecteur quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$. On définit son **moment cinétique** $\vec{L}_O$ **par rapport au point** O par le produit vectoriel

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{v}).$$

Il quantifie la rotation du point M autour du point O.

Rq : Le moment cinétique $\vec{L}_O$ dépend du choix du point O. Si $O' \neq O$:

$$\vec{L}_{O'} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{p} = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge \vec{p} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \vec{L}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}.$$

On a donc à priori $\vec{L}_O \neq \vec{L}_{O'}$, sauf si $\overrightarrow{OO'}$ et $\vec{p}$ sont colinéaires.

Propriété 1 (à démontrer)

Le moment cinétique d'un point matériel M dont le mouvement est **rectiligne uniforme passant par** O est égal au **vecteur nul**.

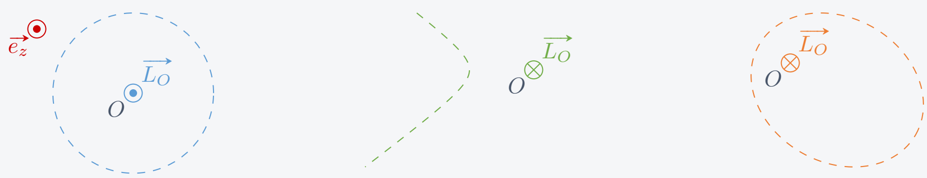
Propriété 2 (à démontrer)

Dans le cas où le mouvement de M est contenu dans un **plan** passant par O, le moment cinétique de M est toujours **orthogonal à ce plan**. La réciproque est aussi vraie.

Application 1 – Moment cinétique en coordonnées cylindriques

On considère un point matériel M de masse m dont le mouvement est contenu dans le plan $z = 0$. Le point M est repéré en coordonnées cylindriques.

1. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et celle du vecteur vitesse $\vec{v}$.
2. En déduire l'expression du moment cinétique $\vec{L}_O$ de M.
3. La trajectoire du point M et son moment cinétique sont représentés ci-dessous dans trois situations. Donner le signe de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ et indiquer le sens du mouvement.



Propriété 3 (à démontrer)

Dans le cas d'un d'un **mouvement circulaire** d'axe $(O, \vec{e_z})$ contenu dans le plan $z = 0$, on a en coordonnées cylindriques et avec $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire de M

$$\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z} = mr^2\omega\vec{e_z}.$$

Pour déterminer le sens du mouvement on peut utiliser :

- la règle du **tire-bouchon** : le sens dans lequel se déplace une tire-bouchon, une vis, une bouchon d'eau minérale, etc. quand on le tourne dans le même sens que le mouvement, indique le sens du moment cinétique ;
- la **règle de la main droite** : le pouce indique le sens du moment cinétique tandis que les autres doigts s'enroulent dans le sens du mouvement.

Application 2 – Ordres de grandeurs des moments cinétiques

Dans les deux cas ci-dessous, déterminer la valeur de la norme du moment cinétique du système par rapport au centre de la trajectoire.

1. Dans le référentiel héliocentrique, l'orbite de la Terre autour du Soleil est quasi circulaire uniforme, de centre confondu avec celui du Soleil S et de rayon égal à $d = 150 \times 10^6$ km. La masse de la Terre vaut $m_T = 6 \times 10^{24}$ kg.
2. Dans le modèle de Bohr, le mouvement de l'électron autour du noyau est assimilé à un mouvement circulaire uniforme de centre O confondu avec le noyau. La trajectoire de rayon $r_0 = 53$ pm est parcourue à la fréquence $f = 6{,}6 \times 10^{15}$ Hz. La masse d'un électron est $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg.

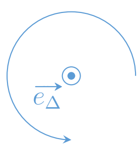
1.2 Par rapport à un axe

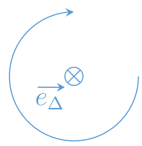
Définition

Soit un axe orienté $\Delta = (O, \overrightarrow{e_\Delta})$. Le **moment cinétique L_Δ de M par rapport à l'axe** Δ, également appelé **moment scalaire** est la projection de $\overrightarrow{L_O}$ sur l'axe Δ :

$$L_\Delta = \overrightarrow{L_O} \cdot \overrightarrow{e_\Delta}.$$

Rq : Il s'agit d'une **grandeur scalaire algébrique**, dont le signe dépend de l'orientation de l'axe Δ. Le sens direct est défini avec la règle de la main droite :





Propriété 4 (à démontrer)

Le moment cinétique scalaire L_Δ ne dépend pas du point de l'axe choisi pour calculer $\overrightarrow{L_O}$.

Application 3 – Moment cinétique sur un vélo

Un vélo avance sur une route rectiligne à vitesse constante. Le vecteur $\overrightarrow{e_x}$ est dans la direction et le sens du mouvement, le vecteur $\overrightarrow{e_y}$ est vertical et orienté vers le haut.

1. Sur un schéma, indiquer le sens de rotation des roues. Représenter la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.
2. Représenter le moment cinétique de la valve de la roue arrière. En déduire le signe de son moment cinétique scalaire par rapport à l'axe de la roue orienté par $\overrightarrow{e_z}$.

Propriété 5 (à démontrer)

Dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon R à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ autour de l'axe Δ, on a $L_\Delta = mR^2\omega$.

2 Moment d'une force

2.1 Par rapport à un point

Définition

Soient $\vec{F}$ une force et M son point d'application. Le **moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$ par rapport au point** O est défini par

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}.$$

Il quantifie la tendance qu'a la force $\vec{F}$ à faire tourner le système autour du point O et dépend du point d'application de $\vec{F}$ (Doc. 1).

Expérience 1 : Positionnement d'une poignée de porte

Pourquoi place-t-on les poignées de porte loin des gonds ?

2.2 Par rapport à un axe

Définition

Soit un axe orienté $\Delta = (O, \vec{e_\Delta})$. Le **moment $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe** Δ, également appelé **moment scalaire** est la projection de $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ sur l'axe Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e_\Delta}.$$

Rq : Comme précédemment $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ ne dépend pas du choix de O de l'axe Δ.

Le moment scalaire d'une force quantifie sa tendance à mettre en rotation le système par rapport à un axe. Deux **cas particuliers notables** :

- si $\vec{F}$ est colinéaire à l'axe : $\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{e_\Delta} = 0$;
- si $\vec{F}$ coupe l'axe en un point O', $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) \cdot \vec{e_\Delta} = \vec{0} \cdot \vec{e_\Delta}$;

Propriété 6

Si $\vec{F}$ et Δ appartiennent au même plan, alors $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$.

Expérience 2 : Ouvrir une porte

Dans quelle direction faut-il pousser la poignée de la porte pour l'ouvrir le plus facilement possible ?

Application 4 – Serrage d'un écrou

Le constructeur d'un vélo donne l'indication de la valeur du moment du couple de serrage à utiliser pour fixer les pédales : $\Gamma = 35\,\mathrm{N \cdot m}$. On dispose d'une clé de longueur $L = 20\,\mathrm{cm}$.

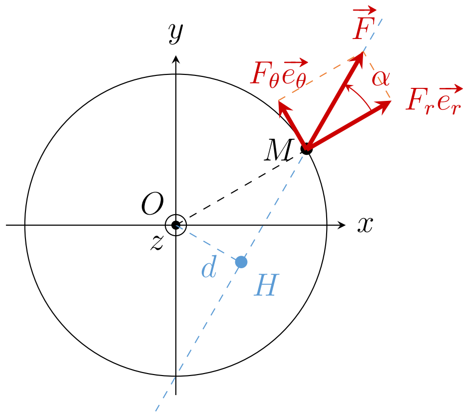
1. Préciser sur un schéma le point d'application et la direction de la force nécessaire pour atteindre la valeur indiquée avec le moins d'effort possible.
2. En déduire l'intensité minimale de la force à appliquer pour un serrage correct.

2.3 Bras de levier

$\vec{F}$ s'applique en un point du plan M repéré en coordonnées cylindriques. On suppose, sans perte de généralité, que $\vec{F}$ est dans le plan $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$. En effet, une éventuelle composante de $\vec{F}$ selon $\vec{e_z}$ aurait un moment scalaire nul par rapport à l'axe $(O, \vec{e_z})$.

On a :

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}) = \left(\overrightarrow{OM} \wedge (F_r\vec{e_r} + F_\theta\vec{e_\theta})\right) \cdot \vec{e_z} = rF_\theta.$$



Seule la composante tangentielle de $\vec{F}$ intervient dans l'expression de son moment scalaire. Or

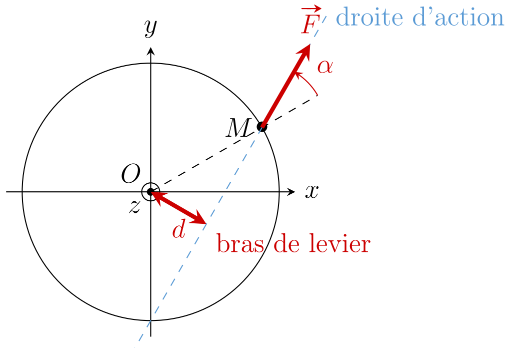
$$|rF_\theta| = rF|\sin\alpha| = \underbrace{r|\sin\alpha|}_{d}F = d \times F.$$

Le moment de la force $\vec{F}$ est le même que si elle s'appliquait en H.

Cas général

Définition

Soit $\vec{F}$ une force s'appliquant au point M. On appelle **droite d'action** de la force $\vec{F}$ la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{F}$.
On appelle **bras de levier** la distance d séparant la droite d'action de $\vec{F}$ de l'axe Δ.



Propriété 7

Soit $\vec{F}$ une force appartenant au plan orthogonal à l'axe orienté Δ s'appliquant en un point M. Le moment scalaire de $\vec{F}$ par rapport à Δ est donné par :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm d \times F,$$

avec

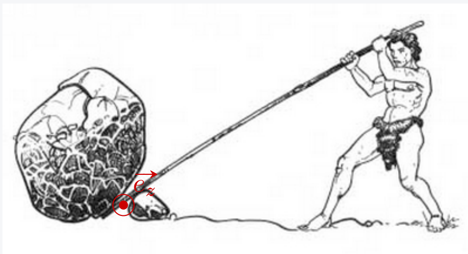
- $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) > 0$ si $\vec{F}$ tend à faire tourner M dans le sens direct défini par $\vec{e_\Delta}$;
- $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) < 0$ sinon.

Application 5 – Levier

Archimède utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200\,\mathrm{kg}$. On note O le point fixe, $d_1 = 50\,\mathrm{cm}$ la distance entre le point fixe et le rocher, $d_2 = 1{,}5\,\mathrm{m}$ la distance entre le point fixe et Archimède et $\alpha = 60°$ l'angle du levier par rapport à l'horizontale (la figure ci-dessous n'est pas à l'échelle).

On admet que le rocher commence à se soulever quand les moments par rapport à l'axe $(O, \vec{e_z})$ du poids du rocher et de la force exercée par Archimède sont opposés.

1. Déterminer la masse minimale m d'Archimède pour qu'il puisse soulever le rocher en se suspendant au levier.
2. Il décide de faire varier la direction de la force qu'il exerce sur le levier. Comment doit-on procéder pour être plus efficace et quelle force doit-il exercer ? Quel est le gain par rapport au cas précédent ?



Rq : Dans le cas où la force $\vec{F}$ n'est pas dans le plan orthogonal à l'axe Δ, on utilise sa projection dans ce plan car la composante colinéaire à l'axe Δ a un moment scalaire nul.

3 Théorème du moment cinétique

Soit un point M de masse m soumis à des forces extérieures $\{\vec{F}_i\}$ dont on étudie le mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Pour un point O **fixe** dans $\mathcal{R}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}\right) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Le premier terme est nul, car, puisque O est fixe, on a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}, \quad \text{et} \quad \vec{v} \wedge (m\vec{v}) = \vec{0}.$$

D'autre part, en utilisant le PFD :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \underset{\text{PFD}}{=} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\sum_i \vec{F}_i\right) = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i).$$

Théorème du moment cinétique (TMC)

Pour un point matériel M de masse m soumis à des forces extérieures $\{\vec{F}_i\}$ et un point O fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, le **théorème du moment cinétique scalaire** s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i).$$

En projetant le TMC sur un axe (Oz) fixe dans $\mathcal{R}$, on obtient le TMCS.

Théorème du moment cinétique scalaire (TMCS)

Pour un point matériel M de masse m soumis à des forces extérieures $\{\vec{F}_i\}$ et un axe (Oz) fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, le **théorème du moment cinétique scalaire** s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_z(\vec{F}_i).$$

Application 6 – Pendule simple (encore !)

On considère un point matériel M de masse m suspendu à un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable, accroché au point O fixe dans le référentiel du laboratoire. La position du pendule est repérée par l'angle θ formé par le pendule avec la verticale. On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

Retrouver l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$.

1. En utilisant le TMC.
2. En utilisant le TMCS et un bras de levier.

Dans le cas où

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0},$$

le moment cinétique est **conservé**, c'est-à-dire $\vec{L}_O = \overrightarrow{\text{cste}}$. Cela correspond à deux situations :

- le point matériel M est isolé ou pseudo-isolé, c'est-à-dire $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$;
- la droite d'action de la résultante des forces passe par O, c'est-à-dire $\sum_i \vec{F}_i \,/\!\!/\, \overrightarrow{OM}$: c'est le cas des mouvements dits à **force centrale** dont l'étude fait l'objet du chapitre suivant.