

## DM20 – Filtrage

### Consignes Ex. 1

- C1.** Les consignes de présentation sont respectées. Soyez exigeants avec la copie qui vous est rendue.  
**C2.** Les relations obtenues sont homogènes.  
**C3.** Les théorèmes, principes et lois utilisés doivent être cités.  
**C4.** Ce sujet, relativement long est une annale de concours. Les questions 1 à 7, 16 et 17 sont obligatoires.  
**C5.** Q. 6 : la construction du diagramme de Bode doit être soignée (cf. consignes du DM précédent).

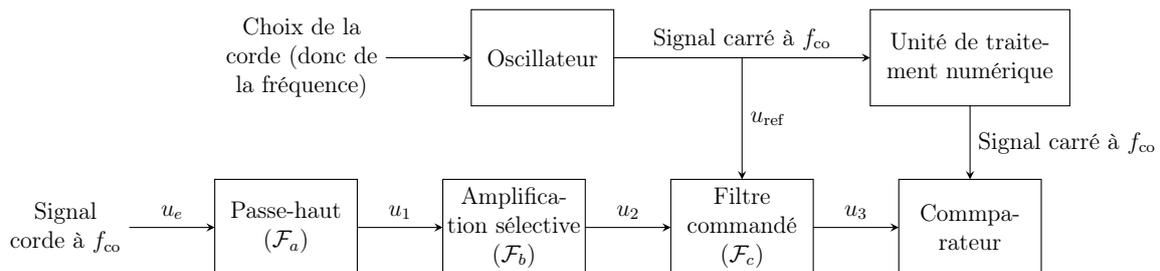
### Exercice 1 – Accordeur de guitare

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu. Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées  $f_{ac}$  sont données dans le tableau ci-dessous.

Corde	Fréquence $f_{ac}$ (Hz)
Mi grave	82,4
La	110,0
Ré	146,8
Sol	196,0
Si	246,9
Mi aigu	329,6

On souhaite accorder une corde *légèrement* désaccordée : on notera  $f_{co}$  la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

#### Principe de l'accordeur



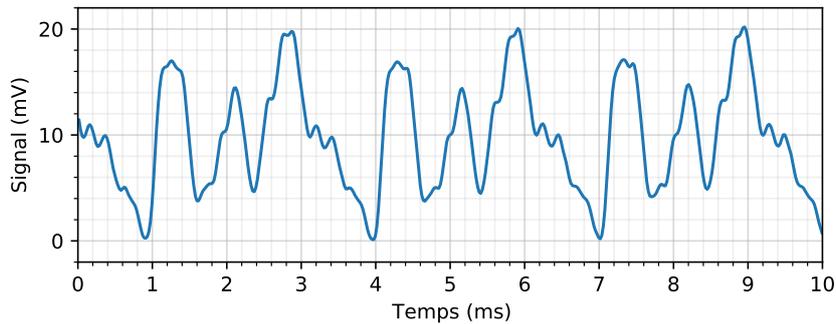
- Sélection de la corde à accorder (donc  $f_{ac}$  est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence  $f_{ac}$  avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal  $u_e(t)$  provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence  $f_{co}$ .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{co}$  par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence  $f_{co}$ .

- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives  $f_{ac}$  et  $f_{co}$ . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand  $f_{co} = f_{ac}$ .

On ne s'intéresse ici qu'au traitement du signal venant de la corde. Dans tout le problème, on admet que toutes les précautions sont prises pour pouvoir **traiter les filtres indépendamment**, sans que l'ajout d'un nouveau filtre n'affecte le comportement du précédent.

### Le signal

Un exemple de signal à la sortie du micro d'une guitare électrique est représenté ci-dessous.

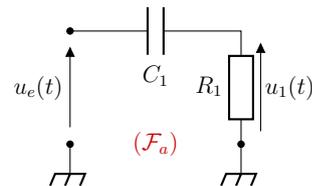


1. Rappeler la définition de la moyenne d'un signal  $s(t)$  périodique de période  $T$ . Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique). De quelle corde de guitare s'agit-il ?
3. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

### Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre représenté ci-dessous (filtre  $(\mathcal{F}_a)$ ).

4. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert  $H_1(j\omega)$  de ce filtre en fonction de  $R_1$ ,  $C_1$  et de la pulsation  $\omega$  du signal.

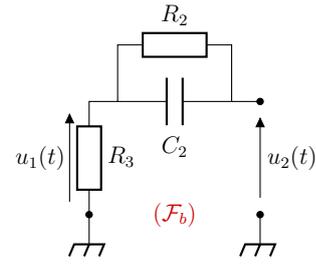


5. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique  $\omega_1$  en fonction de  $R_1$  et  $C_1$  et préciser sa signification.
6. Tracer le diagramme de Bode asymptotique relatif au gain. On justifiera les équations des asymptotes. Sur le même graphique, tracer la courbe réelle.
7. On a choisi  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$  et  $C_1 = 100 \text{ nF}$ . Calculer la fréquence de coupure  $f_1$  à  $-3 \text{ dB}$  de ce filtre. Au vu de l'allure du signal issu du micro de la guitare, quel est le rôle de ce premier filtre ?

### Amplification légèrement sélective

En sortie du filtre  $(\mathcal{F}_a)$ , le signal  $u_1(t)$  est envoyé sur le filtre  $(\mathcal{F}_b)$ .

8. Représenter les circuits équivalents au filtre ( $\mathcal{F}_b$ ) dans les limites basse et haute fréquence. En déduire, dans les deux cas, l'expression de  $u_2$  en fonction de  $u_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ .



9. Exprimer l'impédance équivalente  $Z_{\text{éq}}$  de l'association de  $R_2$  en parallèle avec  $C_2$ .

10. Montrer que la fonction de transfert  $H_2$  de ce filtre se met sous la forme

$$H_2(j\omega) = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}, \quad \text{avec } G_0 = \frac{R_2}{R_3} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}.$$

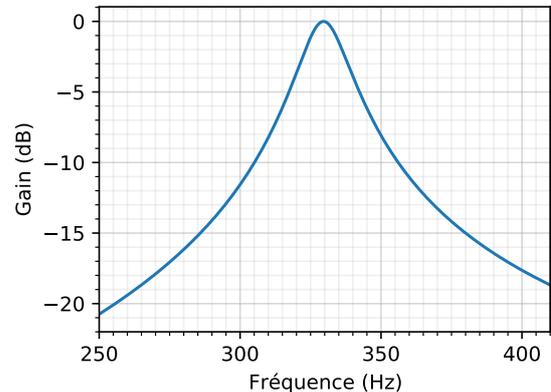
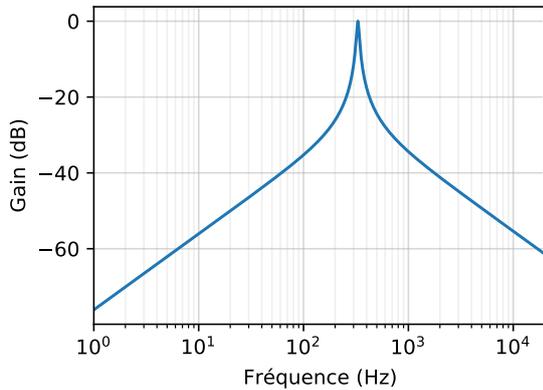
Vérifier que cette expression est cohérente avec les réponses de la question 8.

11. Calculer numériquement la fréquence caractéristique  $f_2$  correspondant à  $\omega_2$  si  $R_2 = 680 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$  et  $C_2 = 470 \text{ pF}$ , ainsi que son gain  $G_0$ . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

### Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale  $f_{co}$  du signal  $u_2$ , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur  $f_{ac}$  (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde de Mi aigu que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre ( $\mathcal{F}_c$ ) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence  $f_{ac}$ . Le diagramme de Bode relatif au gain du filtre ( $\mathcal{F}_c$ ) est représenté ci-dessous, tracé à deux échelles différentes.



12. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?

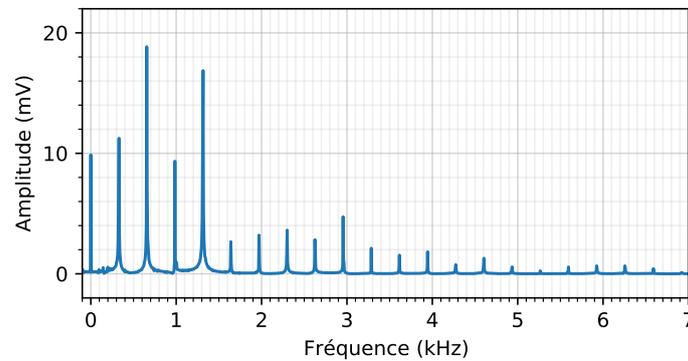
13. Donner une estimation de sa bande-passante à  $-3 \text{ dB}$  après l'avoir définie.

14. Si la corde est désaccordée à  $f_{co} = 315 \text{ Hz}$ , estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

15. La fréquence à laquelle vibre la corde dépend de sa masse linéique  $\mu$  (masse par unité de longueur), sa longueur  $L$  et de sa tension  $T$ . Par analyse dimensionnelle, proposer une expression de la fréquence caractéristique de vibration de la corde. En déduire s'il faut tendre ou détendre la corde pour l'accorder.

## Analyse spectrale

Le spectre du signal d'entrée  $u_e$  issu du micro de la guitare est représenté ci-dessous.



16. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal  $u_e$ .
17. En le justifiant soigneusement, identifier le spectre qui correspond à la sortie  $u_1$  du premier filtre ( $\mathcal{F}_a$ ) parmi ceux représentés ci-dessous.
18. Même question, pour la sortie  $u_2$  du filtre ( $\mathcal{F}_b$ ).
19. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre ( $\mathcal{F}_c$ ). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

