DM20 – Filtrage
Correction

Exercice 1 – Accordeur de guitare

1. Pour un signal périodique $s(t)$ de période T, la moyenne est définie par

$$\boxed{\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t,}$$

où t_0 est un instant quelconque.
Graphiquement, on lit pour le signal du micro $\langle u_e(t)\rangle \approx 10\,\mathrm{mV}$.

2. Graphiquement, on estime la durée de trois périodes à environ $9\,\mathrm{ms}$, soit

$$\boxed{f_{co} \approx 330\,\mathrm{Hz}.}$$

Il s'agit donc du **Mi aigu**.

3. Le signal est périodique mais il n'est pas sinusoïdal. Son spectre comportera donc des harmoniques.

4. La fonction de transfert du filtre $(\mathcal{F}_a)$ est définie par :

$$\boxed{\underline{H_1}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}},}$$

où $\underline{u_s}$ et $\underline{u_e}$ sont les signaux complexes associés aux signaux réels u_s et u_e.
On reconnait un pont diviseur de tension :

$$\boxed{\underline{H_1}(j\omega) = \frac{jR_1C_1\omega}{1+jR_1C_1\omega}.}$$

5. On a

$$|\underline{H_1}(j\omega)| \underset{\mathrm{BF}}{\rightarrow} 0 \quad \text{et} \quad |\underline{H_1}(j\omega)| \underset{\mathrm{HF}}{\rightarrow} 1.$$

Il s'agit d'un filtre **passe-haut** du premier ordre.
En posant $\omega_1 = (R_1C_1)^{-1}$, la fonction de transfert s'écrit

$$\boxed{\underline{H_1}(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_1}{1+j\omega/\omega_1}.}$$

ω_1 est la **pulsation de coupure** du filtre, en-deçà de laquelle l'atténuation est supérieure à $3\,\mathrm{dB}$.

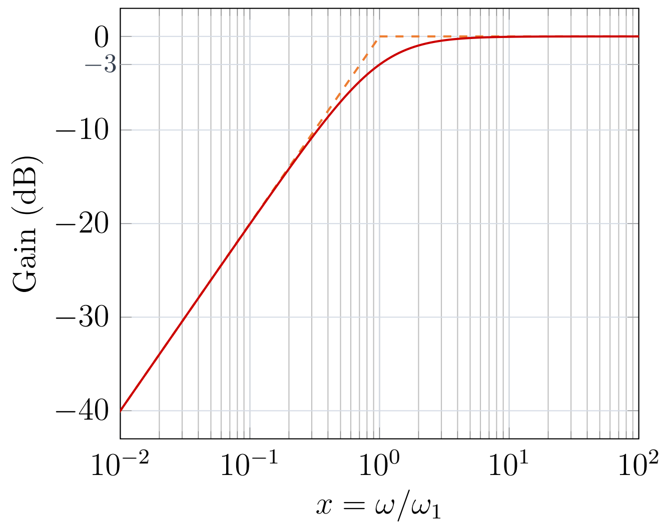


FIGURE 1 – Diagramme de Bode en amplitude du filtre ($\mathcal{F}_a$).

6. En basse fréquence :

$$\underline{H_1}(j\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} j\frac{\omega}{\omega_1} \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB},1}(\omega) \underset{\text{BF}}{\sim} 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right),$$

ce qui correspond à une asymptote de pente $+20\,\text{dB/décade}$, qui passe par le point $(\omega_1, 0\,\text{dB})$. Par ailleurs en haute fréquence :

$$\underline{H_1}(j\omega) \underset{\text{HF}}{\sim} 1 \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB},1}(\omega) \underset{\text{HF}}{\sim} 0,$$

ce qui correspond à une asymptote horizontale à $0\,\text{dB}$.
On en déduit le diagramme de Bode représenté Fig. 1.

7. A.N. : $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 16\,\text{Hz}$.
Ce filtre permet d'éliminer la composante continue du signal $u_e(t)$, sans affecter la fondamentale et les harmoniques.

8. On remplace le condensateur par un interrupteur ouvert en basse fréquence et par un fil en haute fréquence. Les circuits équivalents au filtre ($\mathcal{F}_b$) deviennent alors :

On reconnait un pont diviseur de tension en basse fréquence, d'où

$$\boxed{u_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) u_1,}$$

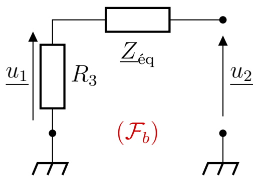
tandis qu'en haute fréquence, on a immédiatement

$$\boxed{u_2 = u_1.}$$

9. On a

$$\boxed{\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}.}$$

10. En utilisant le résultat de la question précédente, le filtre devient



On reconnait le même pont diviseur que précédemment, où $\underline{Z}_{\text{éq}}$ remplace R_2, d'où

$$\underline{u_2} = \left(1 + \frac{R_2/R_3}{1 + jR_2C_2\omega}\right)\underline{u_1}.$$

On retrouve alors la forme donnée dans l'énoncé :

$$\boxed{\underline{H_2}(j\omega) = \frac{\underline{u_2}}{\underline{u_1}} = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}, \quad \text{avec} \quad G_0 = \frac{R_2}{R_3} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}.}$$

On retrouve les limites en basse et haute fréquence

$$|\underline{H_2}(j\omega)| \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} 1 + G_0 \quad \text{et} \quad |\underline{H_2}(j\omega)| \underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

cohérentes avec la question 8.

11. A.N. : $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \approx 500\,\text{Hz}$ et $G_0 \approx 114$.
Ce filtre permet d'amplifier une première fois la composante fondamentale du signal u_e à la fréquence f_{co} par un facteur ~ 100 sans affecter les harmoniques. Il s'agit d'un filtre d'ordre 1 donc peu sélectif : les premières harmoniques seront inévitablement légèrement amplifiées.

12. Le diagramme de Bode montre que le gain du filtre $(\mathcal{F}_c)$ décroit rapidement quand on s'éloigne de sa fréquence caractéristique ($\sim 330\,\text{Hz}$). Il s'agit d'un passe-bande d'ordre 2, comme le montre les asymptotes haute et basse fréquence de pente $\pm 20\,\text{dB/décade}$.

13. La bande-passante à $-3\,\text{dB}$ correspond à l'intervalle de fréquence pour lequel le gain du filtre est supérieur à $-3\,\text{dB}$. Graphiquement, on estime $\Delta f \approx 17\,\text{Hz}$.

14. Graphiquement, on lit sur le diagramme de Bode du filtre $(\mathcal{F}_c)$ $G_{\text{dB}}(f_{\text{co}}) \approx -6\,\text{dB}$, soit $G(f_{\text{co}}) = 10^{-6/20} \approx 0{,}5$. Dans ces conditions, l'amplitude de la composante fondamentale est réduite d'un facteur deux.

15. On a $[f_{\text{co}}] = \text{T}^{-1}$, $[\mu] = \text{M}\cdot\text{L}^{-1}$, $[L] = \text{L}$ et $[T] = \text{M}\cdot\text{L}\cdot\text{T}^{-2}$. On remarque alors

$$\left[\frac{1}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right] = \text{T}^{-1}.$$

Une expression possible de la fréquence caractéristique de vibration de la corde est donc

$$\boxed{f_{\text{co}} = \frac{\alpha}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}},}$$

où α est une constante sans dimension.

Pour accorder la corde de Mi aigu, il faut augmenter f_{co}, ce qui est possible en augmentant la tension de la corde.

L'étude des modes de vibration de la corde montre que $\alpha = 1/2$.

16. Dans le spectre de u_e, on s'attend à observer :

- une composante continue d'amplitude voisine de 10 mV à la fréquence nulle ;
- la composante fondamentale à une fréquence proche de 330 Hz ;
- de nombreuses harmoniques à des fréquences multiples de celle de la fondamentale.

On retrouve tous ces éléments dans le spectre donné dans l'énoncé, il est donc raisonnable de penser qu'il s'agit du spectre du signal u_e.

17. Procédons par élimination :

- le spectre (c) comporte une composante continue à la fréquence nulle, incompatible avec un la sortie d'un filtre passe-haut ;
- la composante fondamentale et les harmoniques des spectres (b) et (d) ont des amplitudes supérieures à celle du spectre de u_e, incompatibles avec le gain haute fréquence du filtre $(\mathcal{F}_a)$ qui est unitaire ;
- le spectre (a) ne présente pas de composante continue et le reste du spectre n'est pas modifié par rapport à celui de u_e, ce qui est compatible avec la fréquence de coupure faible (16 Hz) du filtre.

Le spectre du signal u_1 est le **spectre (a)**.

18. Le **spectre (d)** est compatible avec celui de la sortie du filtre $(\mathcal{F}_b)$: la composante continue à été éliminée par le filtre $(\mathcal{F}_a)$ et la composante fondamentale a été amplifiée par un facteur 100 environ. Les harmoniques, au-delà de la fréquence de coupure f_2, sont de moins en moins amplifiées quand on s'éloigne de f_2.

19. Le spectre du signal u_3 à la sortie de $(\mathcal{F}_c)$ ne contient presque exclusivement que la composante fondamentale à la fréquence f_{co}. Le signal u_3 est donc quasi-sinusoïdal.