DM22 – Loi de Laplace

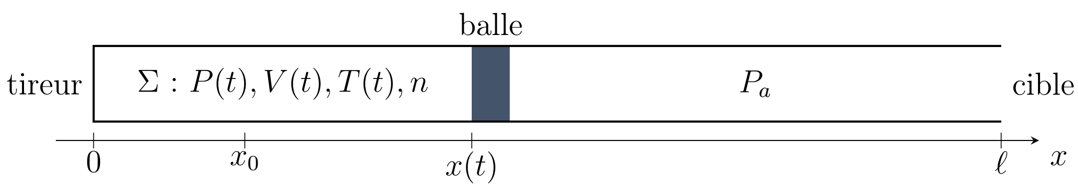
Consignes Ex. 1

C1. Les consignes de présentation sont respectées. Soyez exigeants avec la copie qui vous est rendue.
C2. Les relations obtenues sont homogènes.
C3. Les théorèmes employés sont cités et soigneusement appliqués. Les hypothèses nécessaires à leur application sont justifiées.
C4. Les raisonnements sont appliqués au système indiqué. Celui est précisé si nécessaire.

Exercice 1 – Coup de fusil

On s'intéresse à la propulsion d'une balle de fusil lors d'un coup de feu, et on cherche en particulier à évaluer l'influence de la longueur du canon de l'arme sur la vitesse de la balle à sa sortie.

Le canon est modélisé par un tube cylindrique aux parois rigides de longueur ℓ et de section interne σ. La balle de masse m, initialement à la position x_0, est repérée par sa position $x(t)$. Elle agit dans le canon comme une paroi mobile séparant une zone fermée du côté du tireur dont le contenu sera noté Σ, d'une autre zone ouverte à la pression atmosphérique P_a du côté de la cible. On fera l'hypothèse que la détonation engendre instantanément à l'instant $t = 0$ la formation d'un gaz, assimilé à un gaz parfait de coefficient isentropique γ, à très haute pression P_0 dans le système Σ dont le volume est initialement V_0. La balle est alors mise en mouvement, poussée par ce gaz jusqu'à ce qu'elle quitte le canon : pendant ce mouvement, le gaz du système Σ se détend. On négligera les forces de frottement du canon sur la balle.



La transformation est supposée suffisamment rapide pour négliger les transferts thermiques entre le système Σ et l'extérieur, et on suppose que la vitesse de la balle reste bien inférieure à la vitesse du son dans l'air : la transformation du gaz est donc supposée adiabatique et réversible.

RCO **1.** Rappeler, puis démontrer la loi de Laplace pour un gaz parfait qui subit une transformation adiabatique et réversible.

2. Montrer que le produit $Px^\gamma(t)$ reste égal à une constante lors de la détente du gaz. On donnera l'expression de cette constante en fonction de P_0, V_0, σ et γ, puis en fonction de P_0, x_0 et γ.

RCO **3.** Exprimer le travail élémentaire δW_Σ des forces de pression reçu par le système Σ pour une variation de volume $\mathrm{d}V$ associée à un déplacement $\mathrm{d}x$ de la balle. On exprimera δW_Σ en fonction notamment de $\mathrm{d}V$, puis de $\mathrm{d}x$.

4. Montrer que le travail reçu par le système Σ entre l'instant initial et un instant quelconque t s'écrit

$$W_\Sigma = \frac{P_0 \sigma x_0}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{x_0}{x(t)}\right)^{\gamma-1} - 1\right).$$

5. Sachant que $\gamma > 1$, commenter le signe de W_Σ.

6. On considère maintenant le système Σ' formé du système Σ et de la balle : $\Sigma' = \Sigma \cup \{\text{balle}\}$. Établir l'expression du travail $W_{\Sigma'}$ des forces de pression reçu par Σ' entre l'instant initial et un instant quelconque t, en fonction de P_a, σ, x_0 et $x(t)$.

7. En déduire l'expression du travail mécanique W reçu par la balle seule.

8. On suppose que, lors du tir, la pression dans le système Σ reste bien supérieure à la pression atmosphérique P_a. Justifier qu'alors, le travail W peut s'écrire

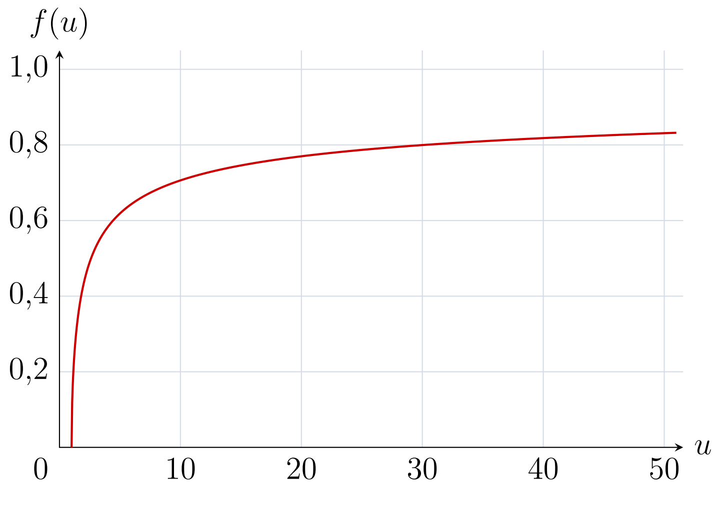
$$W \approx \frac{P_0 \sigma x_0}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{x_0}{x(t)}\right)^{\gamma - 1}\right).$$

9. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, montrer que la vitesse v_s en sortie du canon peut s'écrire

$$v_s = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{m}\left(1 - \left(\frac{x_0}{\ell}\right)^{\gamma-1}\right)},$$

où $\mathcal{E}_0$ est une énergie dont on donnera l'expression en fonction de P_0, V_0 et γ. Proposer une interprétation physique à cette énergie.

Selon le type d'explosif utilisé dans la cartouche, le coefficient γ peut varier de 1,2 à 1,4. On donne ci-dessous le graphe de la fonction $f(u) = \sqrt{1 - u^{-0,3}}$.



10. Sachant que x_0 est de l'ordre du centimètre (taille de la cartouche), que peut-on dire de l'importance de la longueur du canon sur la vitesse de la balle à sa sortie ? Quel peut être l'intérêt d'utiliser un canon plus long ?