DM22 – Loi de Laplace
Correction

Exercice 1 – Coup de fusil

1. Loi de Laplace : pour une transforamtion adiabatique réversible d'un gaz parfait :

$$PV^\gamma = \text{cste}.$$

Démo : cf. cours.

2. Le gaz système Σ est formé d'un GP qui subit une détente adiabatique réversible. D'après la loi de Laplace :

$$PV^\gamma(t) = P_0 V_0^\gamma.$$

Or le volume s'écrit $V(t) = \sigma x(t)$, d'où

$$\boxed{Px^\gamma(t) = P_0\left(\frac{V_0}{\sigma}\right)^\gamma = P_0 x_0^\gamma.}$$

3. Puisque Σ subit une transformation réversible, le travail élémentaire reçu s'écrit

$$\boxed{\delta W_\Sigma = -P\mathrm{d}V = -P\sigma\mathrm{d}x,}$$

où P est bien la pression du système.

4. D'après la loi de Laplace, on a

$$P = P_0\left(\frac{x_0}{x(t)}\right)^\gamma.$$

En injectant dans l'expression du travail élémentaire, puis en intégrant entre x_0 et $x(t)$, on obtient

$$W_\Sigma = -P_0\sigma x_0^\gamma \int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\chi}{\chi^\gamma} = -P_0\sigma x_0^\gamma \left[\frac{-1}{\gamma-1}\times\frac{1}{\chi^{\gamma-1}}\right]_{x_0}^{x(t)},$$

soit

$$\boxed{W_\Sigma = \frac{P_0\sigma x_0}{\gamma-1}\left(\left(\frac{x_0}{x(t)}\right)^{\gamma-1} - 1\right)}.$$

5. Avec $\gamma > 1$, on a

$$\boxed{W_\Sigma < 0,}$$

ce qui est attendu car le gaz subit une **détente**.

6. La transformation subie par Σ' est monobare à la pression P_a, d'où

$$\boxed{W_{\Sigma'} = -P_a \sigma(x(t) - x_0).}$$

7. Le travail reçu par la balle seule s'écrit

$$W = W_{\Sigma'} - W_{\Sigma}, \quad \text{soit} \quad \boxed{W = \frac{P_0 \sigma x_0}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{x_0}{x(t)}\right)^{\gamma-1}\right) - P_a \sigma(x(t) - x_0).}$$

8. En négligeant de travail des forces de pression extérieures sur la balle, on obtient

$$\boxed{W \approx \frac{P_0 \sigma x_0}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{x_0}{x(t)}\right)^{\gamma-1}\right).}$$

Rq : Cette simplification est raisonnable tant que la longueur du canon n'est pas trop grande. Sans ordre de grandeur pour P_0, il est toutefois difficile de donner une longueur caractéristique au delà de laquelle l'hypothèse n'est plus raisonnable.

9. On applique le TEC à la balle dans le référentiel terrestre supposé galiléen, entre les positions x_0 et ℓ, où la vitesse de la balle passe de 0 à v_s. Seules les forces de pression travaillent, d'où

$$\frac{1}{2} m v_s^2 = W(\ell) = \frac{P_0 \sigma x_0}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{x_0}{\ell}\right)^{\gamma-1}\right), \quad \text{soit} \quad v_s = \sqrt{\frac{2 P_0 \sigma x_0}{m(\gamma - 1)}\left(1 - \left(\frac{x_0}{\ell}\right)^{\gamma-1}\right)}.$$

On a donc

$$\boxed{v_s = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{m}\left(1 - \left(\frac{x_0}{\ell}\right)^{\gamma-1}\right)},} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mathcal{E}_0 = \frac{P_0 \sigma x_0}{\gamma - 1}.}$$

$\mathcal{E}_0$ correspond à l'énergie libérée lors de la détonation de la cartouche.

10. On remarque que $v_s = v_0 f(\ell/x_0)$ pour un coefficient isentropique intermédiaire $\gamma = 1{,}3$, avec $v_0 = \sqrt{2\mathcal{E}_0/m}$.

Pour un pistolet, on a $\ell/x_0 \approx 20$, tandis que pour un fusil, on a $\ell/x_0 \approx 50$. Entre les deux et pour une même cartouche, la différence de vitesse est inférieure à 10 % de v_0, ce qui est faible. **L'influence de la longueur du canon sur la vitesse d'éjection de la balle est donc faible**.

En revanche, utilisation d'un canon plus long permet de mieux guider et stabiliser la balle : **un canon plus long autorise des tirs plus précis**.