Programme de colles n°3

semaine du 29 septembre au 3 octobre

Fonctions numériques de la variable réelle

Reprise du programme précédent.

Nombres complexes

- Nombres complexes : définition, forme algébrique, parties réelle et imaginaire.
- Opérations sur les nombres complexes.
- Calculs algébriques avec les nombres complexes : $\sum_{k=0}^{n} z^k = \ldots$, $a^n - b^n = \ldots$, binôme de Newton, sommes triangulaires, ...
- Point du plan associé à un nombre complexe ; affixe d'un point, affixe d'un vecteur.
- Conjugaison : définition, compatibilité avec les opérations, interprétation géométrique.
- Module : définition, module d'un produit et d'un quotient, inégalité triangulaire (et cas d'égalité).
- Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.
- Nombres complexes de module 1.
- Forme trigonométrique $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ $(r > 0)$ d'un complexe non nul.
- Arguments d'un nombre complexe. Arguments d'un produit, d'un quotient.
- Exponentielle complexe :
  - définition,
  - exponentielle d'une somme,
  - module et arguments de e^z.
  - $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$ si et seulement si $z - z' \in 2\,\mathrm{i}\,\pi\mathbb{Z}$.
  - Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.
- Formules d'Euler, de Moivre.
- Factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$. Factorisation de $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$.
- Linéarisation de $\cos^m(\theta)\sin^n(\theta)$.
- Calculs de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
- Calculs de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- Transformer $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t - \varphi)$.
- Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.
- Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité.
- Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
- Similidutes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Calcul de $\sum_{k=0}^{n} z^k$.
- Factorisation de $a^n - b^n$.
- Formule du binôme de Newton.
- Compatibilité de la conjugaison et du module vis à vis des opérations.
- Inégalité triangulaire pour le module.
- $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$ si et seulement si $z - z' \in 2\,\mathrm{i}\,\pi\mathbb{Z}$.
- Factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$.
- Calculs de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
- Donner la définition géométrique et les expressions complexes des transformations du plan.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Mettre un nombre complexe sous forme algébrique.
- Mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique.
- Factoriser $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$. Retrouver les formules pour $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$.
- Transformer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en une expression ne faisant intervenir que $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- Linéariser $\cos^m(\theta)\sin^n(\theta)$.
- Transformer $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\ \cos(t - \varphi)$.
- Savoir utiliser les complexes pour étudier l'alignement et l'orthogonalité.

Fonctions de la variable réelle et à valeurs complexes

- Extension aux fonctions à valeurs complexes des définitions des fonctions à valeurs réelles (parité, périodicité, fonction bornée, ...).
- Dérivée des fonctions à valeurs complexes.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Dérivation de $\exp \circ \varphi$.