Programme de colles n°5

semaine du 13 au 17 octobre

Équations et inéquations

- Distinction entre « l'équation a t'elle une solution ? », « Quelle est une solution ? », « Quelles sont les solutions ? ».
- Relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$, compatibilité avec les opérations de corps. Inéquations.
- Méthodes de résolutions :
  - Opérations algébriques. Opérations préservant les équivalences, les implications.
  - Séparation de cas.
  - Raisonnement par analyse-synthèse.
  - Possibilité de rajouter des inéquations, par exemple pour résoudre $\sqrt{x+1} \leqslant x$ par équivalences.
  - Étude d'une fonction pour résoudre des inéquations.
- Racines carrées d'un nombre complexe. Calcul via la forme exponentielle et via la forme algébrique.
- Résolution des équations du 2nd degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.
- Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour zéro, factorisation de $P(z)$ par $z - a$ (admis).
- Racines n-ièmes de l'unité.
- Racines n-ièmes d'un nombre complexe donné sous forme trigonométrique. Représentation géométrique.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Montrer que tout complexe non nul admet deux racines carrées.
- Stabilité de $\mathbb{U}_n$ par produit, quotient, conjugaison.
- Montrer que $\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k,\ k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}$ où $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}$.
- Montrer que la somme des racines n-ième de l'unité est nulle (pour $n \geqslant 2$).

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Savoir travailler sur l'inégalité $A \geqslant \sqrt{B}$ par équivalence.
- Savoir étudier une fonction pour résoudre une équation.
- Retrouver le système donnant les racines carrées (sous forme algébrique) d'un nombre complexe et le résoudre.
- Résoudre une équation du second degré en complexe.
- Résoudre l'équation $z^n = a$.

Ensembles, applications, relations

Cette semaine : cours uniquement.

- Ensemble, appartenance, ensemble vide.
- Inclusion, partie (ou sous-ensemble), ensemble des parties d'un ensembles.
- Opérations sur les parties d'un ensemble : union, intersection, différence, complémentaire, produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
- Recouvrement disjoint, partition.
- Application d'un ensemble E (non vide) dans un ensemble F.
- Graphe d'une application.
- Ensemble $\mathscr{F}(E, F)$ des applications de E dans F (noté aussi F^E).
- Famille d'élément d'un ensemble.
- Fonction identité, fonction indicatrice d'un ensemble.
- Restrictions, prolongements.
- Injection, surjection, bijection.
  - Définitions.
  - f^{-1} vérifie $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$.
  - Si g vérifie $f \circ g = \mathrm{id}$ et $g \circ f = \mathrm{id}$ alors f est bijective et $f^{-1} = g$.
  - f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
  - Composée de deux injections, surjections, bijections.
- Image directe, image réciproque.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Montrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}\right.$ est une bijection.
- Composée de deux injections, surjections.
- f^{-1} vérifie $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$.
- Si g vérifie $f \circ g = \mathrm{id}$ et $g \circ f = \mathrm{id}$ alors f est bijective et $f^{-1} = g$.
- Bijection réciproque d'une composée.