Programme de colles n°6

semaine du 3 au 7 novembre

Ensembles, applications, relations

- Ensemble, appartenance, ensemble vide.
- Inclusion, partie (ou sous-ensemble), ensemble des parties d'un ensembles.
- Opérations sur les parties d'un ensemble : union, intersection, différence, complémentaire, produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
- Recouvrement disjoint, partition.
- Application d'un ensemble E (non vide) dans un ensemble F.
- Graphe d'une application.
- Ensemble $\mathscr{F}(E, F)$ des applications de E dans F (noté aussi F^E).
- Famille d'élément d'un ensemble.
- Fonction identité, fonction indicatrice d'un ensemble.
- Restrictions, prolongements.
- Injection, surjection, bijection.
  - Définitions.
  - f^{-1} vérifie $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$.
  - Si g vérifie $f \circ g = \mathrm{id}$ et $g \circ f = \mathrm{id}$ alors f est bijective et $f^{-1} = g$.
  - f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
  - Composée de deux injections, surjections, bijections.
- Image directe, image réciproque.
- Relation d'ordre. Ordre partiel, total.
- Relation d'équivalence.
- Classes d'équivalences. Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Montrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$ est une bijection.
- Composée de deux injections, surjections.
- f^{-1} vérifie $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$.
- Si g vérifie $f \circ g = \mathrm{id}$ et $g \circ f = \mathrm{id}$ alors f est bijective et $f^{-1} = g$.
- Bijection réciproque d'une composée.
- Montrer que deux classes d'équivalence sont soit égales, soit disjointes.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Faire le lien entre connecteur logique et opérations ensemblistes.
- Montrer l'égalité de deux ensembles par une double inclusion.
- Ne pas confondre image directe d'une partie et image d'un élément.
- Ne pas confondre image réciproque d'une partie et (dans le cas d'une fonction bijective) image d'un élément par la bijection réciproque. En particulier ne pas croire que la notation $f^{-1}(B)$ signifie f bijective.
- Savoir montrer qu'une fonction est injective.
- Savoir montrer qu'une fonction est surjective.
- Savoir montrer qu'une relation est une relation d'ordre ; d'équivalence.

Généralités sur les suites et suites usuelles

- Suite minorée, majorée, bornée.
- Monotonie, stricte monotonie.
- Suite stationnaire.
- Suites arithmétiques.
- Suite géométriques.
- Suites arithmético-géométriques.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- (u_n) est bornée ssi $(|u_n|)$ est majorée.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Savoir en fonction de la raison les variations et la convergence/divergence d'une suite géométrique.
- Étude d'une suite arithmético-géométrique ou d'une suite récurrente linéaires d'ordre 2 (termes général ; la monotonie éventuelle et la limite éventuelle s'obtiennent via l'étude de suites géométriques et les opérations usuelles).

Calculs de primitives et d'intégrales

Cette semaine : exercices simples uniquement.

- Définition d'une primitive d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes.
- Lien entre intégrales et primitives.
- Description des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.
- La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f. Pour calculer une primitive on peut calculer une intégrale.
- Intégration par parties.
- Changement de variables.
- Primitives des fonctions classiques : inverse, trigonométrique, hyperboliques, puissances, exponentielles, logarithmes, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
- Primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Trouver une primitive de ln.
- Trouver une primitive de $x \mapsto x\sin(x)$ (exercice de cours).
- Trouver une primitive de $x \mapsto x\,\mathrm{Arctan}(x)$ (exercice de cours).
- Calculer $\displaystyle\int_0^t \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ où $t \in [-1;1]$ (exercice de cours).

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Calculer une primitive par un calcul d'intégrale.
- Calculer les primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ en considérant $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Calculer les primitives de $\cos^m \sin^n$ en linéarisant.
- Calculer les primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et $x \mapsto \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$.
- Reconnaître les dérivées de fonctions composées.