Programme de colles n°8

semaine du 17 au 21 novembre

Équations différentielles linéaires

- Équations différentielles linéaires du premier ordre : $y' + a(x)y = b$ où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle.
  - Définition, équation homogène.
  - Cas particulier des équations à coefficients constants.
  - Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
  - Principe de superposition.
  - Résolution de l'équation homogène.
  - Variation de la constante.
  - Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.
- Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.
  - Définition, équation homogène,...
  - Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
  - Résolution de l'équation homogène (cas complexe et cas réel).
  - Théorème de superposition.
  - Recherche d'une solution particulière dans les cas suivants :
    - Cas où le second membre est de la forme $x \mapsto p(x)$ où p est un polynôme.
    - Cas où le second membre est de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$.
    - Cas où le second membre est de la forme $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$
  - Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy (admis).

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Équations différentielles linéaires du premier ordre.
  - Les solutions sont sommes d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
  - Principe de superposition.
  - L'ensemble des solutions d'une équation homogène est stable par combinaison linéaire et contient la fonction nulle.
  - Retrouver l'équation vérifiée par la « constante » dans la méthode de la variation de la constante.
- Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.
  - Les solutions sont sommes d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
  - Principe de superposition.
  - L'ensemble des solutions d'une équation homogène est stable par combinaison linéaire et contient la fonction nulle.

Arithmétique des entiers

Cette semaine : cours uniquement ; pas d'exercice.

- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples d'entiers associés.
- Théorème de la division euclidienne.
- PGCD de deux entiers relatifs dont au moins un est non nul :
  - Définition.
  - Calcul via l'algorithme d'Euclide.

- L'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $\operatorname{pgcd} a, b$.
- $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs de a et b.
- $ac \wedge bc = (a \wedge b) \times c$ pour $c \in \mathbb{N}^*$.
- Relation de Bézout.
- Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
- Extension à nombre fini d'entiers : PGCD, relation de Bézout.

- ppcm de deux entiers relatifs non nuls :
  - Définition.
  - $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$ (admis)
- Nombres premiers entre eux :
  - Définition.
  - Théorème de Bézout.
  - Lemme de Gauss.
  - Forme irréductible d'un rationnel.
  - Si a et b sont premiers entre eux et divisent n alors ab divise n.
  - Si a et b sont premiers à n alors ab est premier à n.
  - Généralisation à nombre fini d'entiers : nombres premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.
- Nombres premiers :
  - Définition.
  - Tout nombre $a > 1$ admet un diviseur premier p. De plus si a n'est pas premier, on peut prendre $p \leqslant \sqrt{a}$.
  - Crible d'Eratosthène.
  - Il existe une infinité de nombres premiers.
  - Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.
- Valuation p-adique
  - Définition.
  - Valuation p-adique d'un produit.
  - Caractérisation de la divisibilité.
  - Expression du PGCD et du PPCM.
- Congruences
  - Relation de congruence sur $\mathbb{Z}$.
  - Opérations : somme et produit.
  - Utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n.
  - Petit théorème de Fermat.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Correction totale de l'algorithme d'Euclide.
- Résolution de $8x + 6y = 4$.
- Tout nombre $a > 1$ admet un diviseur premier p. De plus si a n'est pas premier, on peut prendre $p \leqslant \sqrt{a}$.
- Valuation p-adique d'une somme et d'un produit.
- Si p est primier, il divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$; en déduire que pour tout entier n on a $(n+1)^p \equiv n^p + 1 \ [p]$. Donner l'idée pour finir la preuve du petit théorème de Fermat.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Savoir utiliser la propriété : si d divise a et b alors d divise toute combinaison linéaire (à coefficients entiers) de a et b.
- Trouver des propriétés du PGCD en considérant un diviseur commun.
- Calcul de $a \wedge b$ et $a \vee b$
  - via l'algorithme d'Euclide et la propriété $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$,
  - par l'expression à l'aide des valuations p-adiques,
  - s'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$ alors $a \wedge b = 1$.
- Déterminer un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
- Si $a \wedge n = 1$, savoir trouver et utiliser un inverse de a modulo n pour résoudre l'équation $ax \equiv b \ [n]$.
- Savoir rédiger une résolution d'équation par analyse-synthèse.
- Calculs factionnaires :
  - Savoir réduire une fraction via un calcul de PGCD.
  - Savoir faire une somme de deux (ou plus) fractions en mettant au même dénominateur via un calcul de PPCM.