

Programme de colles n°9

semaine du 24 au 28 novembre

Arithmétique des entiers

Reprise du programme précédent. Exercice sur tout le chapitre.

- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples d'entiers associés.
- Théorème de la division euclidienne.
- PGCD de deux entiers relatifs dont au moins un est non nul :
 - Définition.
 - Calcul via l'algorithme d'Euclide.
 - L'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $\text{pgcd } a, b$.
 - $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs de a et b .
 - $ac \wedge bc = (a \wedge b) \times c$ pour $c \in \mathbb{N}^*$.
 - Relation de Bézout.
 - Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
 - Extension à nombre fini d'entiers : PGCD, relation de Bézout.
- ppcm de deux entiers relatifs non nuls :
 - Définition.
 - $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$ (admis)
- Nombres premiers entre eux :
 - Définition.
 - Théorème de Bézout.
 - Lemme de Gauss.
 - Forme irréductible d'un rationnel.
 - Si a et b sont premiers entre eux et divisent n alors ab divise n .
 - Si a et b sont premiers à n alors ab est premier à n .
 - Généralisation à nombre fini d'entiers : nombres premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.
- Nombres premiers :
 - Définition.
 - Tout nombre $a > 1$ admet un diviseur premier p . De plus si a n'est pas premier, on peut prendre $p \leq \sqrt{a}$.
 - Crible d'Eratosthène.
 - Il existe une infinité de nombres premiers.
 - Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.
- Valuation p -adique
 - Définition.
 - Valuation p -adique d'un produit.
 - Caractérisation de la divisibilité.
 - Expression du PGCD et du PPCM.
- Congruences
 - Relation de congruence sur $\mathbb{Z}$.
 - Opérations : somme et produit.
 - Utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n .
 - Petit théorème de Fermat.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Correction totale de l'algorithme d'Euclide.
- Résolution de $8x + 6y = 4$.

- Tout nombre $a > 1$ admet un diviseur premier p . De plus si a n'est pas premier, on peut prendre $p \leq \sqrt{a}$.
- Valuation p -adique d'une somme et d'un produit.
- Si p est premier, il divise $\binom{p}{k}$ pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$; en déduire que pour tout entier n on a $(n+1)^p \equiv n^p + 1 \pmod{p}$. Donner l'idée pour finir la preuve du petit théorème de Fermat.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Savoir utiliser la propriété : si d divise a et b alors d divise toute combinaison linéaire (à coefficients entiers) de a et b .
- Trouver des propriétés du PGCD en considérant un diviseur commun.
- Calcul de $a \wedge b$ et $a \vee b$
 - via l'algorithme d'Euclide et la propriété $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$,
 - par l'expression à l'aide des valuations p -adiques,
 - s'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$ alors $a \wedge b = 1$.
- Déterminer un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
- Si $a \wedge n = 1$, savoir trouver et utiliser un inverse de a modulo n pour résoudre l'équation $ax \equiv b \pmod{n}$.
- Savoir rédiger une résolution d'équation par analyse-synthèse.
- Calculs fractionnaires :
 - Savoir réduire une fraction via un calcul de PGCD.
 - Savoir faire une somme de deux (ou plus) fractions en mettant au même dénominateur via un calcul de PPCM.

Limites des suites numériques

Cette semaine : cours uniquement.

- Suite convergente et divergente. Suite réelle divergente vers $+\infty$ et $-\infty$.
- Unicité de la limite.
- Toute suite convergente est bornée.
- Si (u_n) converge vers $\ell > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
- Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.
- Théorèmes d'existence de limites :
 - Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration.
 - Théorème de la limite monotone.
 - Théorème des suites adjacentes.
- Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.
- Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Unicité de la limite.
- Une suite convergente est bornée.
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Théorèmes d'encadrement.
- Théorème de la limite monotone.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^x$.