Programme de colles n°10

semaine du 1 au 5 décembre

Limites des suites numériques

- Suite convergente et divergente. Suite réelle divergente vers $+\infty$ et $-\infty$.
- Unicité de la limite.
- Toute suite convergente est bornée.
- Si (u_n) converge vers $\ell > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
- Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.
- Théorèmes d'existence de limites :
  - Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration.
  - Théorème de la limite monotone.
  - Théorème des suites adjacentes.
- Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.
- Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle.
- Suites extraites :
  - Définition d'une suite extraite.
  - Si une suite a une limite, ses suites extraites ont la même limite.
  - Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont même limite ℓ alors (u_n) tend vers ℓ.
  - Théorème de Bolzano-Weierstrass.
- Limite des suites géométriques.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Unicité de la limite.
- Une suite convergente est bornée.
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Théorèmes d'encadrement.
- Théorème de la limite monotone.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e}^x$.
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ alors (u_n) tend vers ℓ.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Savoir calculer une limite à l'aide des opérations et des limites de fonctions (croissances comparées, limites de taux d'accroissements, ...)
- Utiliser une majoration de la forme $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ où (v_n) converge vers 0 pour obtenir la limite de (u_n).
- Utiliser les suites extraites pour montrer une divergence.
- Ne pas confondre le théorème de passage à la limite dans les inégalités et le théorème d'encadrement.

Groupe

- Lois de composition interne :
  - Partie stable.
  - Associativité.
  - Élément neutre.
  - Élément inversible. Produit d'éléments inversibles.
  - Commutativité.
  - Distributivité.
- Groupe
  - Définition.
  - Groupe des permutations d'un ensemble.
  - Groupe produit
  - Sous-groupe.
- Morphisme de groupes :
  - Définition.
  - Image directe et image réciproque d'un sous-groupe.
  - Noyau et image.
  - Isomorphisme.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Unicité de l'élément neutre (s'il existe) et de l'inverse d'un élément (si l'élément est inversible).
- L'inverse x^{-1} d'un élément x inversible est inversible et $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$. Un produit d'éléments inversibles est inversible et inverse du produit.
- Montrer que le groupe S_X des permutations d'un ensemble X est bien un groupe.
- L'image directe d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un groupe.
- L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un groupe.
- Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes par son noyau.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Savoir montrer qu'un ensemble est un groupe
- Savoir montrer qu'une fonction est un morphisme de groupes