Programme de colles n°11

semaine du 8 au 12 décembre

Structures algébriques usuelles

- Lois de composition interne :
  - Partie stable.
  - Associativité.
  - Élément neutre.
  - Élément inversible. Produit d'éléments inversibles.
  - Commutativité.
  - Distributivité.
- Groupe
  - Définition.
  - Groupe des permutations d'un ensemble.
  - Groupe produit
  - Sous-groupe.
- Morphisme de groupes :
  - Définition.
  - Image directe et image réciproque d'un sous-groupe.
  - Noyau et image.
  - Isomorphisme.
- Anneaux :
  - Définition.
  - Si a et b commutent, factorisation de $a^n - b^n$.
  - Binôme de Newton (pour des éléments qui commutent).
  - Groupe des inversibles.
  - Anneau intègre.
  - Sous-anneau.
  - Morphisme et isomorphisme d'anneaux.
  - Corps.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Unicité de l'élément neutre (s'il existe) et de l'inverse d'un élément (si l'élément est inversible).
- L'inverse x^{-1} d'un élément x inversible est inversible et $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$. Un produit d'éléments inversibles est inversible et inverse du produit.
- Montrer que le groupe S_X des permutations d'un ensemble X est bien un groupe.
- L'image directe d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un groupe.
- L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un groupe.
- Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes par son noyau.
- Dans un anneau, et pour des éléments qui commutent, factorisation de $a^n - b^n$.
- Binôme de Newton (pour des éléments qui commutent).

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Savoir montrer qu'un ensemble est un groupe, anneau, corps.
- Savoir montrer qu'une fonction est un morphisme de groupes, d'anneaux.
- Savoir montrer qu'un morphisme est injectif en étudiant son noyau.

Calcul matriciel

- Ensembles $\mathscr{M}_{\mathrm{n,p}}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$.
- Addition, multiplication par un scalaire, combinaison linéaire.
- Matrices élémentaires. Toute matrice de $\mathscr{M}_{\mathrm{n,p}}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
- multiplication matricielle :
  - Définition.
  - Si X est un vecteur colonne, AX est la combinaison linéaire des colonnes de A.
  - Bilinéarité, associativité
  - Produit de deux matrices élémentaires. Symbole de Kronecker.
- Matrice identité, matrices scalaires.
- Transposée :
  - Définition.
  - Opérations sur les transposées : combinaison linéaires, produit.
  - Matrices symétriques et antisymétriques
- Anneau des matrices carrées $\mathscr{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$.
  - Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
  - Puissances d'une matrice carrée. Formule du binôme.
  - Matrices inversible, inverse. Groupe linéaire.
  - Inverse d'une transposée.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Associativité du produit matriciel.
- $E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}$.
- Inverse de la transposée.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Donner des exemples de matrices non nulles de produit nul, de matrices qui ne commutent pas, de matrices non nulles dont une des puissances est nulle.
- Calculer la puissance n d'une matrice, par récurrenc, via le binôme de Newton,...