Programme de colles n°12

semaine du 15 au 19 décembre

Structures algébriques usuelles

Reprise du programme précédent.

Calcul matriciel

- Ensembles $\mathscr{M}_{\mathrm{n,p}}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$.
- Addition, multiplication par un scalaire, combinaison linéaire.
- Matrices élémentaires. Toute matrice de $\mathscr{M}_{\mathrm{n,p}}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
- multiplication matricielle :
  - Définition.
  - Si X est un vecteur colonne, AX est la combinaison linéaire des colonnes de A.
  - Bilinéarité, associativité
  - Produit de deux matrices élémentaires. Symbole de Kronecker.
- Matrice identité, matrices scalaires.
- Transposée :
  - Définition.
  - Opérations sur les transposées : combinaison linéaires, produit.
  - Matrices symétriques et antisymétriques
- Anneau des matrices carrées $\mathscr{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$.
  - Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
  - Puissances d'une matrice carrée. Formule du binôme.
  - Matrices inversible, inverse. Groupe linéaire.
  - Inverse d'une transposée.
- Opérations élémentaires, système linéaire
  - Écriture matricielle d'un système linéaire. Système homogène associé.
  - Système compatible. $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
  - Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$ où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.
  - Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes / colonnes d'une matrice en terme de produit matriciel.
  - Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.
  - Calcul de l'inverse d'une matrice carrée par résolution d'un système linéaire ou par opérations élémentaires.
- Matrices diagonales, triangulaires. Définition, produit, inverse.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Associativité du produit matriciel.
- $E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}$.
- Inverse de la transposée.
- Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$ où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Donner des exemples de matrices non nulles de produit nul, de matrices qui ne commutent pas, de matrices non nulles dont une des puissances est nulle.
- Calculer la puissance n d'une matrice, par récurrenc, via le binôme de Newton,...
- Interpréter matriciellement un système linéaire et inversement. Résoudre le système $AX = B$ à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss.
- Calculer l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot.
- Calculer l'inverse d'une matrice en résolvant un système linéaire.

Limites et continuité des fonctions numériques.

Cette semaine : cours uniquement.

- Limites finie/infinie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Unicité.
- Limites à gauche ou à droite.
- Si f est définie en a et possède une limite en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.
- Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Unicité de la limite.
- Si f admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors f est bornée au voisinage de a.
- Image d'une suite de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$ par une fonction admettant une limite en a.
- Si pour toute suite u de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$ on a $\lim f(u_n) = \ell$ alors f a pour limite ℓ en a.
- Passage à la limite dans les inégalités.