Programme de colles n°13

semaine du 5 au 9 janvier

Limites et continuité des fonctions numériques.

- Limites finie/infinie en $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Unicité.
- Limites à gauche ou à droite.
- Si f est définie en a et possède une limite en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.
- Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.
- Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration.
- Théorème de la limite aux bornes, théorème de la limite monotone.
- Opérations sur les limites.
- Droites Asymptotes à une courbe.
- Fonction continue en a, continuité à gauche et à droite, fonction continue sur un intervalle.
- Opérations sur les fonctions continues.
- Théorème des valeurs intermédiaires, corollaire.
- Image d'un intervalle par une fonction continue.
- Une fonction injective, continue sur un intervalle et à valeurs réelles est strictement monotone.
- Théorème de la bijection.
- Théorème des bornes atteintes
- Image d'un segment par une fonction continue.
- Extension au cas des fonctions à valeurs complexes.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Unicité de la limite.
- Si f admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors f est bornée au voisinage de a.
- Image d'une suite de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$ par une fonction admettant une limite en a.
- Si pour toute suite u de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$ on a $\lim f(u_n) = \ell$ alors f a pour limite ℓ en a.
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration.
- Théorème des valeurs intermédiaires (preuve par dichotomie).
- Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Justifier qu'une fonction définie par « morceaux » est continue.
- Prolonger une fonction par continuité.
- Étude de fonctions.
- Ne pas confondre le théorème de passage à la limite dans les inégalités et le théorème d'encadrement.
- Savoir utiliser les théorèmes des valeurs intermédiaires et de la bijection pour montrer l'existence (et l'unicité) d'une solution à $f(x) = \lambda$. Savoir que ces théorèmes ne montrent pas la non existence de solution.