Programme de colles n°14

semaine du 12 au 16 janvier

Limites et continuité des fonctions numériques.

Reprise du programme précédent.

Polynômes

Exercices sur la résolution des équations du second degré avec les nombres complexes et des équations du type $z^n = \alpha$.
Pour les notions nouvelles, cours uniquement.

- Définition de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.
- Degré d'un polynôme, coefficient dominant, polynôme unitaire.
- Degré d'une somme. Ensemble $\mathbb{K}_\mathrm{n}[\mathrm{X}]$ des polynômes de degré inférieur à n.
- Degré d'un d'un produit.
- Intégrité de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
- Composée.
- Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs et multiples.
- Caractérisation des couples de polynômes associés
- Théorème de la division euclidienne. Algorithme.
- Fonction polynomiale associée à un polynôme.
- Racine d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.
- Méthode de Horner.
- Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par le degré.
- Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
- Formule d'interpolation de Lagrange.
- Polynôme scindé sur $\mathbb{K}[X]$.
- Relations entre coefficients et racines (l'expression de la somme et produit des racines doivent être connues ; les autres doivent être retrouvées rapidement).
- Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit.
- Dérivée formelle d'un polynôme.
- Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
- Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit, formule de Leibniz.
- Formule de Taylor polynomiale.
- Multiplicité d'une racine, caractérisation par les polynômes dérivés successifs.
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$:
  - PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.
  - Algorithme d'Euclide.
  - L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD.
  - Tous les PGCD de A et B sont associés ; un seul est unitaire et est noté $A \wedge B$.
  - Relation de Bezout. Détermination d'un couple de Bezout par l'algorithme d'Euclide étendu.
  - PPCM
  - Couples de polynômes premiers entre eux.
  - Théorème de Bezout.
  - Lemme de Gauss.
  - Généralisation à un nombre fini de polynômes.
- Théorème de D'Alembert-Gauss.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Degré d'une somme de polynômes.
- Degré d'un produit de polynômes.
- $(PQ = 0 \Rightarrow P = 0$ ou $Q = 0)$ et pour $P \neq 0$, $PQ_1 = PQ_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2$.
- Équivalence entre $P(\alpha) = 0$ et $X - \alpha$ divise P.
- Si $a_1, \ldots, a_p$ sont des racines distinctes de P alors $\prod_{x=1}^{p}(X - a_i)$ divise P.
- Formule de Leibniz.
- Formule de Taylor polynomiale.
- Somme et produit des racines d'un polynôme scindé.
- Exercice de cours : trouver les polynômes tels que $P(X) = P(X - 1)$.