Programme de colles n°15

semaine du 19 au 23 janvier

Polynômes

- Définition de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.
- Degré d'un polynôme, coefficient dominant, polynôme unitaire.
- Degré d'une somme. Ensemble $\mathbb{K}_\mathrm{n}[\mathrm{X}]$ des polynômes de degré inférieur à n.
- Degré d'un d'un produit.
- Intégrité de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
- Composée.
- Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs et multiples.
- Caractérisation des couples de polynômes associés
- Théorème de la division euclidienne. Algorithme.
- Fonction polynomiale associée à un polynôme.
- Racine d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.
- Méthode de Horner.
- Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par le degré.
- Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
- Formule d'interpolation de Lagrange.
- Polynôme scindé sur $\mathbb{K}[X]$.
- Relations entre coefficients et racines (l'expression de la somme et produit des racines doivent être connues ; les autres doivent être retrouvées rapidement).
- Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit.
- Dérivée formelle d'un polynôme.
- Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
- Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit, formule de Leibniz.
- Formule de Taylor polynomiale.
- Multiplicité d'une racine, caractérisation par les polynômes dérivés successifs.
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$:
  - PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.
  - Algorithme d'Euclide.
  - L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD.
  - Tous les PGCD de A et B sont associés ; un seul est unitaire et est noté $A \wedge B$.
  - Relation de Bezout. Détermination d'un couple de Bezout par l'algorithme d'Euclide étendu.
  - PPCM
  - Couples de polynômes premiers entre eux.
  - Théorème de Bezout.
  - Lemme de Gauss.
  - Généralisation à un nombre fini de polynômes.
- Théorème de D'Alembert-Gauss.
- Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
- Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités.
- Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux s'ils n'ont pas de racine commune.
- Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.
- Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Reprendre aussi la résolution des équations du second degré avec les nombres complexes et celles du type $z^n = \alpha$.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Degré d'une somme de polynômes.
- Degré d'un produit de polynômes.
- $(PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0)$ et pour $P \neq 0$, $PQ_1 = PQ_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2$.
- Équivalence entre $P(\alpha) = 0$ et $X - \alpha$ divise P.
- Si $a_1, \ldots, a_p$ sont des racines distinctes de P alors $\prod_{x=1}^{p}(X - a_i)$ divise P.
- Formule de Leibniz.
- Formule de Taylor polynomiale.
- Somme et produit des racines d'un polynôme scindé.
- Exercice de cours : trouver les polynômes tels que $P(X) = P(X-1)$.
- Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Faire la différence entre polynôme et fonction polynomiale.
- Utiliser les propriétés « un polynôme ayant une infinité de racine est le polynôme nul » et « deux polynômes de degré d qui coïncident sur $d+1$ points sont égaux ».

Dérivabilité

Cette semaine : cours uniquement.

- Dérivabilité en un point, nombre dérivé.
- Caractérisation : f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Si c'est le cas, écriture de ce développement limité à l'aide de $f(a)$ et $f'(a)$.
- La dérivabilité entraîne la continuité.
- Interprétation géométrique et cinématique.
- Dérivabilité à gauche et à droite.
- Opérations sur les nombres dérivés : combinaison linéaires, produit, quotient, composition, bijection réciproque.
- Dérivée d'une fonction sur un intervalle.
- Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.
- Opérations sur ces fonctions : combinaison linéaires, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, bijection réciproque.
- Point critique.
- Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle.
- Égalité des accroissements finis.
- Fonctions lipschitziennes.
- Inégalité des accroissements finis.

Reprendre aussi les preuves sur les dérivées des fonctions usuelles.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Si c'est le cas, écriture de ce développement limité à l'aide de $f(a)$ et $f'(a)$.
- La dérivabilité entraîne la continuité (refaire la preuve de l'écriture du développement limité à l'ordre 1 de f en a).
- Opérations sur les nombres dérivés (combinaison linéaire, produit, inverse, composé, bijection réciproque).
- Formule de Leibniz.
- Condition nécessaire d'extremum local en $a \in \overset{\circ}{I}$. Savoir aussi donner des contre-exemples pour montrer que les hypothèses sont nécessaires.
- Égalité des accroissements finis.
- Inégalité des accroissements finis.