# Programme de colles n°16

semaine du 26 au 30 janvier

## Dérivabilité

- Dérivabilité en un point, nombre dérivé.
- Caractérisation : $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en $a$. Si c'est le cas, écriture de ce développement limité à l'aide de $f(a)$ et $f'(a)$.
- La dérivabilité entraîne la continuité.
- Interprétation géométrique et cinématique.
- Dérivabilité à gauche et à droite.
- Opérations sur les nombres dérivés : combinaison linéaires, produit, quotient, composition, bijection réciproque.
- Dérivée d'une fonction sur un intervalle.
- Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.
- Opérations sur ces fonctions : combinaison linéaires, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, bijection réciproque.
- Point critique.
- Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle.
- Égalité des accroissements finis.
- Fonctions lipschitziennes.
- Inégalité des accroissements finis.
- Caractérisation des fonctions constantes, monotones, strictement monotones qui sont dérivables sur un intervalle.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Cas des fonctions à valeurs complexes (en particulier, l'inégalité des accroissement finie est toujours valide (admis pour l'instant), le théorème de Rolle ne s'étend pas).

**Reprendre aussi les preuves sur les dérivées des fonctions usuelles.**

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en $a$. Si c'est le cas, écriture de ce développement limité à l'aide de $f(a)$ et $f'(a)$.
- La dérivabilité entraîne la continuité (refaire la preuve de l'écriture du développement limité à l'ordre 1 de $f$ en $a$).
- Opérations sur les nombres dérivés (combinaison linéaire, produit, inverse, composé, bijection réciproque).
- Formule de Leibniz.
- Condition nécessaire d'extremum local en $a \in \mathring{I}$. Savoir aussi donner des contre-exemples pour montrer que les hypothèses sont nécessaires.
- Égalité des accroissements finis.
- Inégalité des accroissements finis.
- Caractérisation des fonctions constantes et monotones définies et dérivables sur un intervalle.
- Caractérisation des fonctions strictement monotones définies et dérivables sur un intervalle.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Écrire sans faute l'adjectif « lipschitzienne ».
- Savoir calculer une dérivée sans erreur de calcul.
- Ne pas confondre définition du nombre dérivé et théorème de la limite de la dérivée.

- Savoir étudier la dérivabilité en $a$ d'une fonction par le taux d'accroissement et par le théorème de la limite de la dérivée.
- Savoir déterminer l'ensemble des points où une fonction est dérivable (d'abord ceux où elle est dérivable par opération sur les fonctions dérivables puis étudier la dérivabilité en les autres). Cas des fonctions composées avec valeur absolue, racine, Arcsin, Arccos ; cas des fonctions définies par morceaux...
- Savoir utiliser la formule de Leibniz pour calculer des dérivées de produits de fonctions.
- Savoir Trouver les extremums locaux d'une fonction dérivables.
- Savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis pour obtenir des inégalités.
- Savoir Calculer des dérivées $n$-ième de fraction rationnelle.

## Fractions rationnelles

- Corps $\mathbb{K}(\mathrm{X})$.
- Forme irréductible d'une fraction rationnelle.
- Degré, partie entière.
- Racine et pôles. Multiplicités.
- Fonction rationnelle.
- Décomposition en éléments simples
    - Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
    - Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
    - Application au calcul de dérivées $k$-ièmes.
    - Application au calcul de primitive.
    - Si $\alpha$ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X-\alpha}$.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Existence et unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle.
- Si $\alpha$ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X-\alpha}$.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Déterminer la partie entière d'une fraction rationnelle.
- Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
- Calcul de dérivées $k$-ièmes d'une fraction rationnelle.
- Calcul de primitive d'une fraction rationnelle.