

Programme de colles n°18

semaine du 9 au 13 février

Introduction aux espaces vectoriels

- Structure de $\mathbb{K}$ -ev.
- Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$ -ev. En particulier $\mathbb{K}^n$; $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- ev des fonctions d'un ensemble dans un ev. En particulier les fonctions réelles, complexes, les suites.
- Combinaison linéaires d'une famille finie de vecteurs.
- Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires.
- Combinaison linéaires d'une famille quelconque de vecteurs.
- Sous-espace engendré par une famille de vecteurs.
- Sous-espaces vectoriels.
 - Définition
 - Caractérisation
 - Intersection d'une famille de sev.
 - Espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.
- $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est le plus petit sev contenant $\mathcal{F}$.
- Ajout d'un vecteur à $\text{Vect}(\mathcal{F})$.
- Applications linéaires
 - Définition : application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
 - Image et noyau.
 - Caractérisation de l'injectivité par l'étude du noyau.
 - L'image directe d'un sev et l'image réciproque d'un sev par une application linéaire sont des sev.
 - $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
 - Composée d'applications linéaires. Bilinéarité de la composition.
 - Bijection réciproque

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- L'intersection de sev est un sev.
- $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est le plus petit sev contenant $\mathcal{F}$.
- Donner des exemples d'espace vectoriel (et prouver que ce sont des espaces vectoriels). Au moins un inclus dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, un dans $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et un dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- L'image directe d'un sev par une application linéaire est un sev
- L'image réciproque d'un sev par une application linéaire est un sev
- Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à 0.
- $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
- La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.
- La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Savoir montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel et donc un espace vectoriel.
- Savoir montrer qu'un ensemble est l'espace vectoriel engendré par une famille donc est un espace vectoriel.
- Savoir montrer qu'une application est linéaire.
- Montrer qu'une application linéaire est injective en étudiant son noyau.
- Savoir déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire.
- Montrer qu'un ensemble est un sev car c'est l'image directe d'un sev ou le noyau d'une application linéaire.