Programme de colles n°19

semaine du 16 au 20 février

Introduction aux espaces vectoriels

Reprise du programme précédent.

Analyse asymptotique

- Relation d'équivalence, de négligeabilité, de domination pour les fonctions en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$.
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ si et seulement si $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$.
- Croissances comparées des fonctions usuelles : $x \mapsto \ln^\beta(x)$, $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{\gamma x}$ en 0 et en $+\infty$.
- Opérations sur les équivalents : produits, quotient, puissances.
- Équivalents classiques en 0 :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2, \qquad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x ...$$

- Règles usuelles de manipulation des équivalents..
- Règles usuelles de manipulation des symboles o et O.
- Obtention d'équivalents par encadrements.
- Propriétés conservées par les équivalents : signe, limite.
- Relations de comparaison pour les suites : adaptation des définitions et résultats relatifs aux fonctions.
- Exemples de problèmes d'analyse asymptotiques : suites d'intégrales, suites implicites.
- Formule de Stirling et traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$ (admis).

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Comparer les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto \ln^\beta(x)$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\gamma\, x}$ en 0, $+\infty$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e}^x$.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Savoir utiliser les règles de calculs sur les équivalents. En particulier ne pas sommer et composer des équivalents.
- Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour h qui tend vers 0.
- Utilisation d'équivalents pour l'obtention de limites.
- Utilisation d'équivalents pour l'étude locale du signe.
- Voir l'intérêt de $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$ dans les calculs.

Dénombrement

Cette semaine : cours uniquement.

- Cardinal d'un ensemble fini.
- Opérations sur les cardinaux (union disjointe, union de deux ensembles, complémentaire, différence, produit cartésien).
- Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective, si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.
- Cardinal de l'ensemble des applications (resp. applications injectives, resp. applications bijectives) d'un ensemble fini dans un ensemble fini.

- Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
- Nombre de parties à p-éléments
- p-listes, arrangements de k-éléments
- Points de vue combinatoire des coefficients binomiaux :
  - $\begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$
  - Formule de Pascal
  - Formule du binôme de Newton

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Calcul de $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E))$ en considérant la bijection $A \mapsto \mathbb{1}_A$ (redémontrer que c'est une bijection).
- Nombre de parties à k éléments dans un ensemble de cardinal n.
- Démonstration combinatoire de la formule de Pascal.
- Démonstration combinatoire de la formule du binôme.