

Programme de colles n°20

semaine du 9 au 13 mars

Dénombrement

- Cardinal d'un ensemble fini.
- Opérations sur les cardinaux (union disjointe, union de deux ensembles, complémentaire, différence, produit cartésien).
- Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective, si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.
- Cardinal de l'ensemble des applications (resp. applications injectives, resp. applications bijectives) d'un ensemble fini dans un ensemble fini.
- Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
- Nombre de parties à p -éléments
- p -listes, arrangements de k -éléments
- Points de vue combinatoire des coefficients binomiaux :
 - $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
 - Formule de Pascal
 - Formule du binôme de Newton

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Calcul de $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$ en considérant la bijection $A \mapsto 1_A$ (redémontrer que c'est une bijection).
- Nombre de parties à k éléments dans un ensemble de cardinal n .
- Démonstration combinatoire de la formule de Pascal.
- Démonstration combinatoire de la formule du binôme.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Modéliser pour se ramener au cours en dénombrant des objets mathématiques.

Dimension des espaces vectoriels

Cette semaine : cours uniquement.

- Famille génératrice. Partie génératrice.
- Famille libre, liée. Partie libre, liée.
- Ajout d'un vecteur à une famille libre.
- Dans un espace engendré par une famille de n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.
- Base, coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$.
- Définition d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Théorème de la base extraite, existence de base.
- Toutes les bases ont même cardinal ; dimension d'un espace vectoriel.
- Dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Dimension d'un produit fini d'ev de dimension finie.
- Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.
- Rang d'une famille de vecteurs.

- Théorème de la base incomplète.
- Dimension d'un sev d'un ev de dimension finie. Cas d'égalité.
- Liberté d'une famille de polynômes à degré distincts.
- Base de polynômes à degré échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$.
- Application : formule de Taylor polynomiale.
- Interpolation de Lagrange.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est combinaison linéaire (à support fini) des autres.
- Dans un espace engendré par une famille de n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.
- Décomposition unique d'un vecteur dans une base.
- Dimension d'un produit de deux espaces de dimension finie.
- Définir la dimension d'un espace de dimension finie (i.e. il existe une base de cardinal fini et toutes les bases ont même cardinal).
- Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.
- Si F est un sev d'un ev E de dimension finie alors $\dim F \leq \dim E$.
- Toute famille de polynômes non nuls de degré distincts est libre.
- Formule de Taylor polynomiale.