

Programme de colles n°21

semaine du 16 au 20 mars

Dimension des espaces vectoriels

- Famille génératrice. Partie génératrice.
- Famille libre, liée. Partie libre, liée.
- Ajout d'un vecteur à une famille libre.
- Dans un espace engendré par une famille de n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.
- Base, coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$.
- Définition d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Théorème de la base extraite, existence de base.
- Toutes les bases ont même cardinal ; dimension d'un espace vectoriel.
- Dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Dimension d'un produit fini d'ev de dimension finie.
- Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.
- Rang d'une famille de vecteurs.
- Théorème de la base incomplète.
- Dimension d'un sev d'un ev de dimension finie. Cas d'égalité.
- Liberté d'une famille de polynômes à degré distincts.
- Base de polynômes à degré échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$.
- Application : formule de Taylor polynomiale.
- Interpolation de Lagrange.
- Somme de deux sev ; somme directe de deux sev ; sev supplémentaires.
- Caractérisation d'une somme directe de deux sev par l'intersection.
- Tout sev de dimension finie a un supplémentaire.
- Dimension de la somme de deux sev (formule de Grassmann).
- Base adaptée à une décomposition en somme directe de deux sev.
- Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est combinaison linéaire (à support fini) des autres.
- Dans un espace engendré par une famille de n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.
- Décomposition unique d'un vecteur dans une base.
- Dimension d'un produit de deux espaces de dimension finie.
- Définir la dimension d'un espace de dimension finie (i.e. il existe une base de cardinal fini et toutes les bases ont même cardinal).
- Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.
- Si F est un sev d'un ev E de dimension finie alors $\dim F \leq \dim E$.
- Toute famille de polynômes non nuls de degré distincts est libre.
- Formule de Taylor polynomiale.
- Montrer que deux espaces sont en somme directe si et seulement si 0 se décompose de manière unique, si et seulement si l'intersection de ces sev est $\{0\}$.
- Formule de Grassmann.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Montrer qu'une famille est libre.
- Montrer qu'une famille est une base.
- Déterminer le rang d'une famille finie de vecteurs.
- Montrer que deux espaces sont en somme directe.
- Montrer que deux espaces sont supplémentaires.

Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

- Représentation géométrique.
- Les limites éventuelles sont des points fixes de f .
- Utilisation de la croissance de f et du signe de $f(x) - x$ pour l'étude des variations de u .
- Étude dans le cas f croissant ; dans le cas f décroissant.
- Application de l'inégalité des accroissements finis.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Savoir étudier une suite de ce type dans le cas où f est croissant ; f décroissant.
- Savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis pour étudier ces suites.