Programme de colles n°23

semaine du 30 mars au 3 avril

Développements limités

En commençant par les développements limités en 0. Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0.

- Définition, unicité des coefficients, troncature
- Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.
- Primitive d'un développement limité.
- Formule de Taylor-Young.
- Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produits, composés. Utilisation de la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement limité.
- Développements limités à tout ordre en 0 de exp, cos, sin, ch, sh, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan.
- Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.
- Applications des développements limités :
  - Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un dl. à l'ordre 1.
  - Signe au voisinage de a.
  - Calcul d'équivalent et de limites.
  - Position d'une courbe par rapport à sa tangente.
  - Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.
  - Détermination d'asymptotes.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Développement limité d'une fonction paire / impaire.
- Retrouver les développements limités en 0 :
  - À tout ordre : exp, cos, sin, ch, sh, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan.
  - À l'ordre 3 : tan
- Formule de Taylor Young (première étape se ramener en 0).
- Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un dl. à l'ordre 1.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Calculer le développement limité d'une fonction par opérations sur les développements limités.
- Utiliser des développements limités pour trouver des limites ou équivalents, pour prolonger les fonctions, pour déterminer les asymptotes, pour trouver la position relative d'une courbe et d'une tangente ou d'une courbe et d'une asymptote.
- Ne pas dériver un développement limité.