Programme de colles n°24

semaine du 7 au 10 avril

Probabilités et variables aléatoires sur un univers fini

- Vocabulaires : univers, événement, issue, événement élémentaire, événement impossible, événement contraire, événement « A et B », événement « A ou B », événements incompatibles, système complet d'événements.
- Variable aléatoire (rappel l'univers est fini).
- Probabilité, espace probabilisé fini.
- Distribution de probabilités.
- Probabilité uniforme.
- Probabilité de la réunion et de la différence de deux événements, probabilité de l'événement contraire. Croissance.
- Loi P_X d'une variable aléatoire X. On note $X \sim Y$ si X et Y ont même loi.
- Image d'une variable aléatoire par une fonction et loi associée. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
- Loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
- Probabilités conditionnelles
  - Probabilité conditionnelle de A sachant B notée $P_B(A)$ ou $P(A|B)$.
  - P_B est une probabilité sur Ω.
  - Formule des probabilités composées.
  - Formule des probabilités totales.
  - Formules de Bayes.
  - Loi conditionnelle de X sachant un événement A.
- Couples de variables aléatoires. Loi conjointe, loi marginales. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
- Indépendance
  - Couple et famille d'événements indépendants.
  - Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ le sont aussi. Extension au cas de n évènements.
  - L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
  - Couple de variables aléatoires indépendantes. Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.
  - X et Y sont indépendantes si la distribution de probabilité de (X, Y) est donnée par $P((X, y) = (x, y)) = P(X = x)P(Y = y)$.
  - Extensions aux n-uplets de variables aléatoires.
  - Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ alors $X_1 + \ldots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$.
  - Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.
  - Lemme des coalitions (pour 2 et pour n coalitions).

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Une probabilité est uniquement déterminée par la distribution de probabilité $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
- P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$
- Loi de $f(X)$ en fonction de la loi de X
- Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
- L'application P_B est une probabilité.
- Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.
- X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités (X, Y) est donnée par $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x)P(Y = y)$.
- Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Donner la loi d'une variable aléatoire.
- Reconnaître les lois usuelles.
- Utiliser les formules de Bayes.
- Utiliser la formule des probabilités composées.
- Donner la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires et les lois marginales.
- Retenir que l'indépendance dépend de la probabilité.
- Retenir que l'indépendance 2 à 2 de n événements n'entraîne pas leur indépendance. Idem pour n variables aléatoires.