

Programme de colles n°25

semaine du 13 au 17 avril

Applications linéaires

- Si (e_i) famille génératrice de E et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $(f(e_i))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.
- Application linéaire de rang fini
 - Définition.
 - Majoration du rang d'une composée.
 - Invariance du rang par composition par un isomorphisme.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
- Non commutativité de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ si $\dim(E) \geq 2$.
- Formes coordonnées relativement à une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des espaces supplémentaires
- Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires : définition géométrique, caractérisation par $p \circ p = p$.
- Symétries associées à deux sous-espaces supplémentaires : définition géométrique, caractérisation par $s \circ s = \text{id}$.
- Caractérisation de l'injectivité, surjectivité, bijectivité d'une application linéaire par l'image d'une base en dimension finie.
- Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité, bijectivité.
- Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.
- Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.
- $\dim(\mathcal{L}(E, F))$ si E et F sont de dimension finie.
- Forme géométrique du théorème du rang : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S supplémentaire de $\ker(f)$ dans E alors f induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(f)$.
- Théorème du rang : si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$.
- Hyperplans :
 - Définition : noyau d'une forme linéaire non nulle.
 - Équation dans une base en dimension finie.
 - Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H alors $E = H \oplus D$. Réciproquement tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.
 - Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.
 - En dimension finie caractérisation des hyperplans par la dimension.
 - Si E est de dimension finie n , l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.
 - Système d'équations d'un sous-espace vectoriel. Cas des droites vectorielles de \mathbb{R}^2 , des droites et plans vectoriels de \mathbb{R}^3 .

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des espaces supplémentaires.
- Si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$ alors p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.
- Si $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $s \circ s = \text{id}_E$ alors s est la symétrie selon $\ker(s + \text{id}_E)$ par rapport à $\ker(s - \text{id}_E)$
- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par l'image d'une base en dimension finie.
- Caractérisation de la surjectivité d'une application linéaire par l'image d'une base en dimension finie.
- Deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.
- Forme géométrique du théorème du rang.
- Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H alors $E = H \oplus D$.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Savoir calculer le rang d'une application linéaire en calculant le rang d'une famille de vecteurs.
- Savoir utiliser le théorème du rang.