

Programme de colles n°26

semaine du 4 au 8 mai

Séries numériques

- Série ; Suite des sommes partielles ;
- Série convergente ; série divergente.
- Suite des restes partiels et somme d'une série convergente.
- Opérations sur les séries convergentes.
- Si une série converge alors son terme général tend vers 0. Divergence grossière.
- Lien suite-série. La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
- Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.
- Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
- Critères de majoration pour les séries à termes positifs.
- Critères d'équivalence pour les séries à termes positifs.
- Comparaison série-intégrale.
- Séries de Riemann.
- Séries absolument convergentes, sommabilité de (u_n) .
 - Définition.
 - L'absolue convergence implique la convergence (réciproque fausse).
 - Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite de réels positifs, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
- Théorème des séries alternées. Si la suite réelle (u_n) converge en décroissant vers 0 alors $\sum(-1)^n u_n$ converge. Signe et majoration en valeur absolue des restes partiels.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Étudier la convergence de $\sum z^n$ en fonction de $z \in \mathbb{C}$.
- Étudier la convergence de $\sum \frac{1}{n}$ en utilisant une comparaison série-intégrale.
- Étudier la convergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \neq 1$ en utilisant une comparaison série-intégrale.
- Critères de majoration pour les séries à termes positifs.
- Critères d'équivalence pour les séries à termes positifs.
- Convergence d'une série alternée vérifiant les hypothèses du théorème des séries alternées.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Reconnaître une série géométrique, étudier sa convergence et calculer sa somme si elle converge.
- Reconnaître une série télescopique, étudier sa convergence et calculer sa somme si elle converge.
- Utiliser les critères de comparaison pour montrer qu'une série à termes positifs converge ou diverge. Ne pas étudier la suite des sommes partielles.
- Savoir faire une comparaison série-intégrale.
- Montrer qu'une série est absolument convergente donc convergente.
- Savoir reconnaître une série alternée et utiliser le théorème des séries alternées.

Intégration

Exercice de calculs d'intégrales (cours du début d'année).