Programme de colles n°28

semaine du 25 au 29 mai

Intégration

- Continuité uniforme. Exemple des fonctions lipschitziennes.
- Théorème de Heine.
- Subdivision d'un segment ; pas d'une subdivision.
- Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux.
- Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment.
- Construction de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment par la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier inférieure à la fonction et par la borne inférieure de celles supérieures à la fonction. Interprétation géométrique.
- Sommes de Riemann (et en particulier les sommes de Riemann régulières à gauche/droite) : définition, propriétés.
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, croissance, positivité, relation de Chasles.
- Majoration de la valeur absolue d'une intégrale par l'intégrale des valeurs absolue (inégalité triangulaire).
- Si f est continue sur un segment et de signe constant, l'intégrale de f est nulle si et seulement si f est la fonction nulle.
- Soit f une fonction continue, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en x_0. Les primitives diffèrent d'une constante.
- Calculs d'intégrales au moyen de primitives, d'intégrations par parties ou de changements de variables.
- Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0.
- Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.
- Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.
- Extension au cas des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs complexes. En particulier majoration du module d'une intégrale et inégalité de Taylor-Lagrange.
- $\forall z \in \mathbb{C},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$

Reprendre également les calculs pratiques d'intégrales (cours du début d'année)

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Si f est continue sur un segment et de signe constant, l'intégrale de f est nulle si et seulement si f est la fonction nulle.
- Soit f une fonction continue, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en x_0.
- Intégrale d'une fonction continue paire ou impaire sur un segment centré en 0.
- Intégrale d'une fonction continue périodique sur un intervalle de période.
- $\forall z \in \mathbb{C},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Calculer une intégrale (reprendre le cours de début d'année).
- Reconnaître qu'une somme est une somme de Riemann régulière à gauche/droite.
- Étudier les fonctions du type $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Savoir quand et comment majorer $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|$.
- Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Sous-espaces affines et équations linéaires

- Sous-espaces affines d'un espace vectoriel
  - Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : point et vecteurs.
  - Translation.
  - Sous-espaces affines d'un espace vectoriel, direction.
  - Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
  - Hyperplan affine.
  - Intersection de sous espaces affines.
- Équations linéaires
  - Définition : équations de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $a \in F$.
  - Exemple des systèmes linéaires, des équations différentielles linéaires, des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométrique, polynômes interpolateurs, ...
  - Théorème de superposition.
  - Théorème de structure : l'ensemble des solutions d'une équation linéaire est soit vide soit un espace affine dirigé par $\ker(u)$.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Une intersection de sous-espace affine est soit vide soit un sous-espace affine.
- Théorème de superposition pour les équations linéaires.
- Théorème de structure : l'ensemble des solutions d'une équation linéaire est soit vide soit un espace affine dirigé par $\ker(u)$.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Savoir résoudre des systèmes linéaires, des équations différentielles linéaires, des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométrique, ...