

# Programme de colles n°29

semaine du 1 au 5 juin

## Matrices et applications linéaires

- Matrice d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases. Matrice d'un endomorphisme dans une base.
- Matrice dans la base  $(1, i)$  de  $\mathbb{C}$  vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur  $a + ib$ .
- Isomorphismes d'espaces vectoriels de  $\mathcal{L}(E, F)$  sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  induit par le choix d'un couple de bases. Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ .
- Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire donnée par sa matrice.
- Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.
- Isomorphismes d'espaces vectoriels et d'anneaux de  $\mathcal{L}(E)$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  induit par le choix d'une base.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Noyau, Image, rang d'une matrice.
- Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équation du noyau.
- Les opérations sur les colonnes conservent l'image. Les opérations sur les lignes conservent le noyau.
- Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice.
- $AX = B$  est compatible si et seulement si  $B \in \text{Im}(A)$ . Structure affine de l'ensemble des solutions.
- Rang d'un système homogène, dimension de l'espace des solutions.
- Caractérisation des matrices inversibles par son noyau, son image, son rang.
- Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.
- Si  $A$  est inversible, le système  $AX = B$  est de Cramer c'est-à-dire possède une unique solution.
- Toute matrice inversible à gauche ou à droite est inversible.
- Matrice de passage d'une base à une autre.
- Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.
- Effet du changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.
- Matrices équivalentes.
- Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est de rang  $r$ , il existe un couple de bases dans lequel  $u$  a pour matrice  $J_r$  (la matrice  $J_r$  ayant tous ses coefficients nuls à l'exception des  $r$  premiers coefficients diagonaux qui sont égaux à 1).

- Une matrice est de rang  $r$  si et seulement si elle est équivalente à  $J_r$ . Classification des matrices équivalentes par le rang.
- Invariance du rang par transposition.
- Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.
- Matrices semblables.
- Exemple de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
- Trace d'une matrice carrée. Linéarité,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , invariance par similitude.
- Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité,  $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$ .
- Trace d'un projecteur.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si sa matrice dans un couple quelconque de base est inversible.
- Les opérations sur les colonnes conservent l'image. Les opérations sur les lignes conservent le noyau.
- Effet du changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire.
- Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est de rang  $r$ , il existe un couple de bases dans lequel  $u$  a pour matrice  $J_r$  (la matrice  $J_r$  ayant tous ses coefficients nuls à l'exception des  $r$  premiers coefficients diagonaux qui sont égaux à 1).
- Linéarité de la trace d'une matrice carrée,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , invariance par similitude.

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Écrire la matrice d'une application linéaire
- Retrouver une application linéaire étant donnée sa matrice dans un couple de bases.
- Savoir reconnaître la matrice d'une rotation plane et savoir déterminer les caractéristiques de cette rotation.
- Déterminer les matrices de passage d'une base à une autre.
- Déterminer le rang et le noyau d'une application linéaire étant donnée sa matrice.
- Recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme est simple.
- Recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.