

Programme de colles n°30

semaine du 8 au 13 juin

Espérance et variance

- Espérance :
 - Définition.
 - Variable aléatoire centrée.
 - Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.
 - Formule du transfert.
 - Espérance d'un produit de variables indépendantes.
 - Espérance d'une variable constante, de $\mathbb{1}_A$, d'une variable de loi $\mathcal{B}(p)$ ou $\mathcal{B}(n, p)$.
- Variance et écart type :
 - Définitions.
 - Variable aléatoire réduite. $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
 - $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$,
 - $V(aX + b) = a^2 V(X)$,
 - Variance d'une variable de loi $\mathcal{B}(p)$ ou $\mathcal{B}(n, p)$.
- Covariance
 - Définition et relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
 - Variables aléatoires décorrélées.
 - Variance d'une somme, cas de variables aléatoires décorrélées.
- Inégalité de Markov
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Montrer que $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.
- Linéarité, croissance de l'espérance. Inégalité triangulaire.
- Formule du transfert.
- Montrer que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- Variance d'une somme de n variables aléatoires.
- Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale.
- Inégalité de Markov

Les points suivants sont à savoir particulièrement bien faire :

- Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire.
- Utiliser l'inégalité de Markov et celle de Bienaymé-Tchebychev.

Déterminants

Cette semaine : questions de cours uniquement. Pas d'exercices.

- Forme n -linéaire alternée sur un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .
 - Définition.
 - Antisymétrie, effet d'une permutation.
 - image d'une famille liée.
- Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
 - Définition : si \mathcal{B} est une base, il existe une unique forme n linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
 - Expression en fonction des coordonnées
 - Dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée d'un parallélogramme, comme volume orienté du parallélépipède.
 - Comparaison de $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$.
 - Caractérisation des bases.
- Déterminant d'un endomorphisme.
 - Définition.
 - Déterminant d'une composée.
 - Caractérisation des automorphismes.
 - L'application \det induit un morphisme de $\text{GL}_n(E)$ dans \mathbb{K}^* .
- Déterminant d'une matrice carrée.
 - Définition.
 - Déterminant d'un produit et relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
 - Caractérisation des matrices inversibles.
 - L'application \det induit un morphisme de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K}^* .
 - Déterminant de la transposée.
 - Effet des opérations élémentaires.
 - Calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.
 - Développement par rapport à une colonne ou une ligne.

Les démonstrations suivantes sont à connaître (les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement) :

- Image d'une famille liée par une forme n -linéaire alternée.
- Caractérisation d'un automorphisme par son déterminant.
- Déterminant de la transposée.