MP2I : Concours blanc

1 Partie I

Il y a de nombreuses façons de représenter graphiquement le même arbre binaire non raciné. Pour vérifier que deux représentations concernent le même arbre, on peut calculer la matrice des distances entre feuilles. Deux représentations qui ont la même matrice sont équivalentes et représentent le même arbre.

Vocabulaire : dans ce sujet, on dit que deux sous-arbres (par exemple deux feuilles) sont *plus proche voisins* (ppv) si il existe un sommet du graphe qui a ces deux sous-arbres pour voisins. En d'autres termes, ces deux sous-arbres sont à une distance de 2.

1. Un graphe $G = (V, E)$ dont les sommets sont tous de degrés au moins deux vérifie :

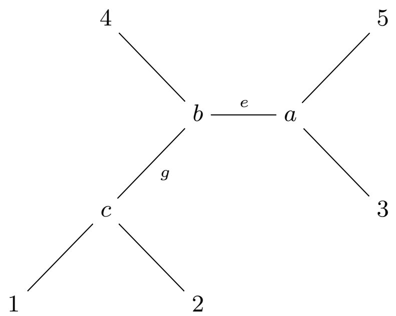
$$2\,|E| = \sum_{x \in V} \deg x \geq \sum_{x \in V} 2 = 2\,|V|$$

Donc $|E| \geq |V|$: le graphe possède un circuit.

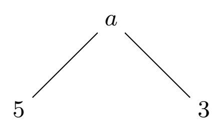
Méthode 2 Les dégrés étant tous supérieurs à 2, le graphe a au moins 3 sommets. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ un plus long chemin de G dont les sommets sont tous distincts. On est sûr que $n \geq 2$ car chaque sommet est de degré plus grand que 2. Le sommet x_n a deux voisins au moins, l'un d'eux est x_{n-1} et l'autre est l'un des x_k pour $k \leq n - 2$ (sinon, on pourrait prolonger le chemin : absurde). Cela nous donne un cycle !

2. Pour $n \geq 3$, considérons un nœud interne a voisin de 3 feuilles. Comme le graphe est connexe, une 4ème feuille (elle existe car $n \geq 4$) peut accéder à ce nœud par un chemin. Mais ce chemin passerait par une des trois branches incidentes à a, ce qui est impossible puisque ce sont des cul-de-sac. Absurde.

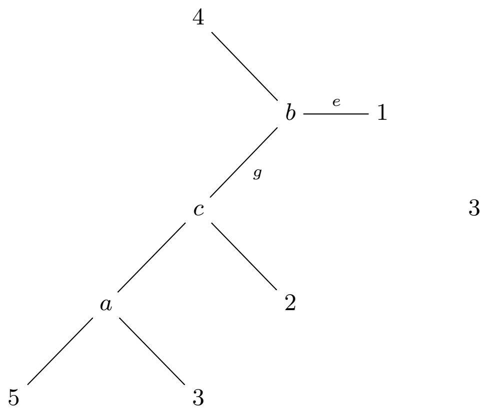
3. (a) On fait un NNI centrée sur la branche g. Par commodité on note a, b, c les sommets internes (ceux de degrés ≥ 1).

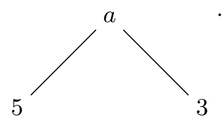


Faire un NNI centré sur g consiste à échanger un sous-arbre de b avec un sous-arbre de c. Ici, il s'agit déchanger le sous-arbre feuille d'étiquette 1 avec le sous-arbre

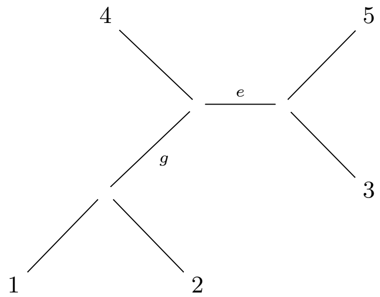


pour obtenir :

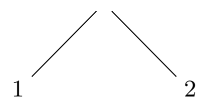
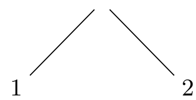


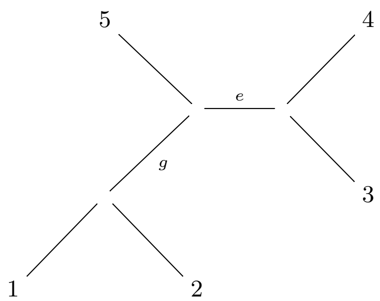
On a bien que les feuilles d'étiquettes 1 et 4 sont ppv, et que la feuille d'étiquette 2 est ppv avec  .

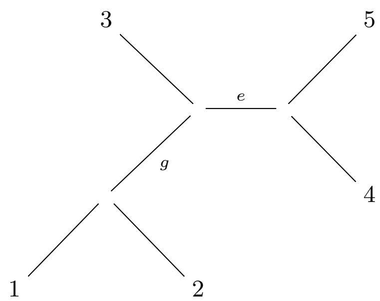
(b) On considère toujours l'arbre T suivant :



On calcule ses voisins dans $G_{\mathrm{NNI}(5)}$. il possède deux branches internes g et e autour desquelles ont peut faire des NNI.

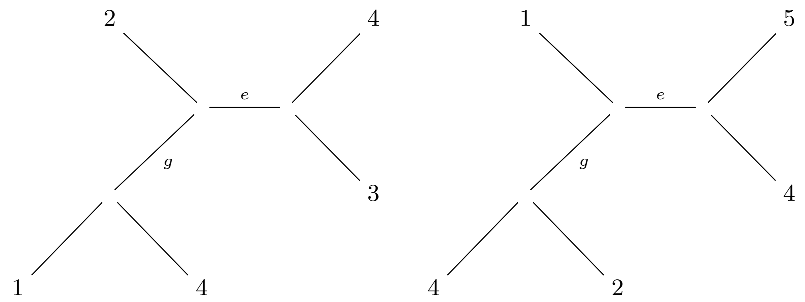
Autour de e : on peut échanger (les feuilles d'étiquettes) 4 et 5 de sorte que 4 et 3 soient proches voisins possibles (distance 2). Ou bien on peut échanger 5 et  de sorte que 3 et  soient plus proches voisins possibles. Ce sont les deux seules possibilités à permutation circulaire près.





Autour de g : on peut échanger 4 et 1 de sorte que 4 et 2 soient proches voisins possibles (distance 2). Ou bien on peut échanger 4 et 2 de sorte que 4 et 1 soient plus proches voisins possibles.

Ce sont les deux seules possibilités à permutation circulaire près.



En résumé, T possède 4 voisins dans $G_{\mathrm{NNI}(5)}$.

4. $B(1)$ est un singleton contenant l'arbre feuille d'étiquette 1.

   $B(2)$ est aussi un singleton : les deux feuilles sont reliées entre elles et il n'y a pas de nœud interne. Montrons le. Dans un arbre de $B(2)$, il y a N nœuds internes et 2 feuilles. Alors la somme des degrés vaut $2 + 3N$ et elle est égale à $2(2 + N - 1)$ puisque a) un habitant de $B(2)$ est un arbre et b) la somme des degrés est le double du nombre d'arêtes. Alors $N = 0$.

   Autre méthode : si un arbre G de $B(2)$ a un nœud interne x_0 relié à ses deux feuilles f_1, f_2, alors ce nœud est lui même relié à un second nœud interne x_2. Et le nœud x_2 est voisin de deux nouveaux nœuds internes x_2, x_3 puisque le graphe ne comporte pas de cycle ni de multi-arête. Tous les autres nœuds du graphe sont de degré 3. Enlevons x_0, f_1, f_2. Dans le graphe G' obtenu, x_1 est de degré 2 et tous les autres sommets sont de degré 3 : il y alors un cycle dans G' donc dans G, ce qui est ABSURDE. Si les deux feuilles sont reliées à deux nœuds internes distincts, il y a au moins un troisième nœud interne. On retire les feuilles. Par argument de degré le nouveau graphe possède un cycle : ABSURDE aussi.

   Bref, les deux feuilles d'un arbre de $B(2)$ sont reliées, il n'y a pas de nœud interne et les étiquettes sont 1 et 2 : il vient que $B(2)$ est un singleton.

5. Deux méthodes :

   En utilisant la relation $|E| = |V| - 1$ du cours. Il y a disons N nœuds dont n feuilles et p branches. On a donc $p = N - 1$ puisqu'on à affaire à des arbres.

   Il y a alors $N - n$ nœuds internes (donc de degré 3). La somme des degrés étant le double du nombre d'arcs, on a

   $$n + 3(N - n) = 2p = 2(N - 1)$$

   On en tire $N = 2n - 2$ puis $p = N - 1 = 2n - 3$

   Par récurrence On se convainc facilement que la propriété est vraie pour $B(3)$.

   Supposons qu'elle soit vraie pour $B(n)$. Considérons $t \in B(n+1)$. Si on enlève la feuille $n+1$ à T, on obtient un arbre raciné à n feuilles de racine notée r. Supprimons r et fusionnons les deux branches incidentes à r en une seule. On obtient un arbre $T' \in B(n)$ pour lequel HR s'applique. T' a $2n - 2$ nœuds. Or T a deux nœuds de plus : r et la feuille $n + 1$. Ainsi, le nombre de nœuds de T' est

   $$(2n - 2) + 2 = 2n = 2(n + 1) - 2.$$

   Hérédité OK.

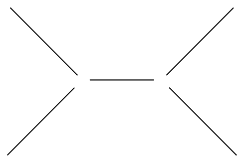
   Remarque. Pour la méthode par récurrence, il faut partir d'un arbre de $B(n+1)$ et lui retirer des nœuds pour en faire un arbre de $B(n)$ et non (comme je l'ai vu dans beaucoup de copies) compléter un arbre de $B(n)$ pour obtenir un arbre de $B(n + 1)$.

En effet, dans ce second cas, la propriété du nombre de nœuds est certes vraie pour l'arbre complété MAIS on ne sait pas si tous les arbres de $B(n+1)$ sont bien obtenus de cette manière !

6. Un arbre de $B(4)$ possède $4-2$ nœuds internes et $2\times 4-3=5$ branches. Quatre de ces branches relient une feuille à un nœud interne.

   Les deux nœuds internes sont voisins sinon un sommet de degré 3 est relié à 3 feuilles (notées a, b, c) et l'autre nœud interne est relié à la feuille restante et au moins à une des feuilles a, b, c. Cela change le degré de cette dernière : ABSURDE.

   Ainsi, les deux nœuds internes d'un arbre de $B(4)$ sont voisins, ce qui fait que le squelette d'un arbre de $B(4)$ a la forme suivante :



7. Présence d'au moins un nœud interne : voir prop 4.1 puis deux : voir 4.2
8. (a) Pour former un arbre non raciné à partir d'un arbre de racine r, notons a, b les deux sous-arbres voisins de r. Fusionnons les branches $\{a, r\}$ et $\{r, b\}$ en la branche $\{a, b\}$ et supprimons r. L'arbre obtenu est dans $B(n)$. Notons φ cette application de $RB(n)$ dans $B(n)$.

   Considérons un arbre non raciné $T \in B(n)$. on obtient un antécédent de T en coupant une branche $\{a, b\}$ en deux branches $\{a, r\}$ et $\{r, b\}$ où r est un nouveau nœud. Il y a $2n-3$ possibilité de faire cela et elles nous donnent $2n-3$ arbres racinés distincts. Ces arbres constituent $\varphi^{-1}(T)$.

   On en déduit que φ est surjective et que $\left|\varphi^{-1}(T')\right| = 2n-3$ pour tout $T' \in RB(n)$.

   Il vient que $|RB(n)| = (2n-3)\,|B(n)|$.

   Considérons un arbre raciné à $n-1$ feuilles, on lui associe un arbre non raciné à n feuilles en ajoutant un nouveau voisin (une feuille d'étiquette n) à la racine. Cette opération est injective.

   Réciproquement, considérons un arbre non raciné à n feuilles, enlevons lui sa feuille de plus grande étiquette. Le nœud auquel elle était raccordée devient la racine d'un arbre raciné à $n-1$ feuilles.

   On en déduit $\forall n \geq 2$, $|B(n+1)| = |RB(n-1)|$

   (b) On trouve, pour $n \geq 2$ que $|B(n)| = RB(n-1) = (2(n-1)-3)\,|RB(n-2)| = (2(n-1)-3)B(n-1)$ à partir des relations précédentes. On a aussi $B(3)=0$.

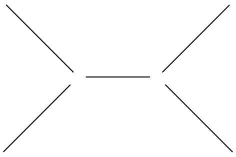
   $$|B(n)| = (2(n-1)-3)(2(n-1)-3)\dots(2\times 3-3)B(3) = (2(n-1)-3)(2(n-1)-3)\dots(2\times 2-3).$$

   C'est le produit des nombres impairs de 1 à $2(n-1)-3$. Posons $2k+1 = 2(n-1)-3$. On trouve $2k = 2n-6$ donc $k = n-3$. Ainsi, pour $n \geq 3$

   $$|B(n)| = \prod_{k=0}^{n-3}(2k+1)$$

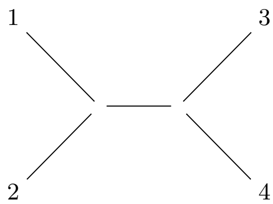
   Or, $|B(2)| = |B(1)| = 1$. Si on prend comme convention qu'un produit de zéro nombre vaut 1 (initialisation d'un produit), on a aussi $|B(2)| = \prod_{k=0}^{2-3}(2k+1) = 1$ et $|B(1)| = \prod_{k=0}^{1-3}(2k+1) = 1$.
9. On calcule d'abord le nombre d'arbres de $B(4)$

Méthode matricielle Le squellette d'un arbre de $B(4)$ a la forme suivante :



Une feuille donnée a un seul ppv (distance 2) et deux feuilles plus éloignées (distance 3). La matrice des distances entre feuilles comporte donc pour chaque ligne un 2 et deux 3 ainsi qu'un 0 en position diagonale. La matrice étant symétrique, la même observation vaut pour les colonnes.

Par exemple



a pour matrice

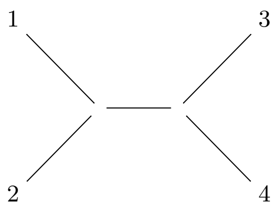
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour connaîre le nombre d'arbres de $B(4)$, il suffit de choisir une position pour le 2 dans la première ligne. Il y a 3 positions possibles, ce qui donne 3 arbres dans $B(4)$.

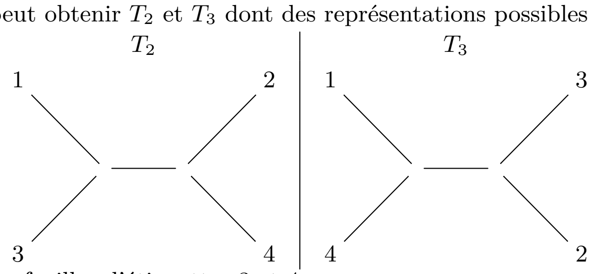
Méthode issue de la question précédente On sait que $|B(4)| = |RB(3)|$ donc

$$|B(4)| = (2 \times 3 - 3)\,|RB(2)| = 3 \times (2 \times 2 - 3)\,|RB|\,(1) = 3.$$

Considérons

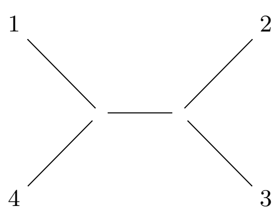


(Noté T_1). Par NNI autour de la seule branche interne on peut obtenir T_2 et T_3 dont des représentations possibles se trouvent ci-dessous.



Or, on peut passer de T_2 à T_3 en échangeant les feuilles d'étiquettes 3 et 4.

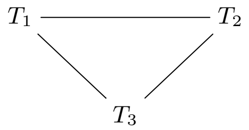
Attention, le dessin alors obtenu est



mais c'est bien le même arbre que

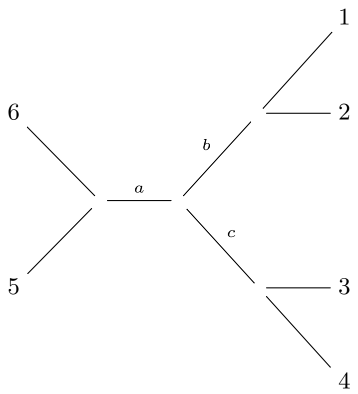
T_3 puisque la matrice des distances entre feuilles est la même.

Ainsi, T_1, T_2 et T_3 sont transformables les uns en les autres par NNI. Ceci fait que le graphe $G_{\mathrm{NNI}(4)}$ est en fait un cycle de 3 sommets :



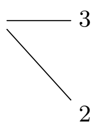
10. Il y a $2n-3$ branches dans un arbre de $B(n)$. Or, n de ces branches relient un nœud interne à une feuille. Ainsi, par arbre de $B(n)$ on trouve $2n-3-n = n-3$ branches internes. Chacune peut produire 2 NNI.

    Au total, il y a $2(n-3)$ NNI possibles pour un arbre de $B(n)$: il a donc autant de voisins dans $G_{\mathrm{NNI}}(n)$.
11. Voir propriété 4.4.
12. Remarquons que la question a un sens puisqu'il y a des arbres binaires racinés qui ne sont pas un arbre chenille :

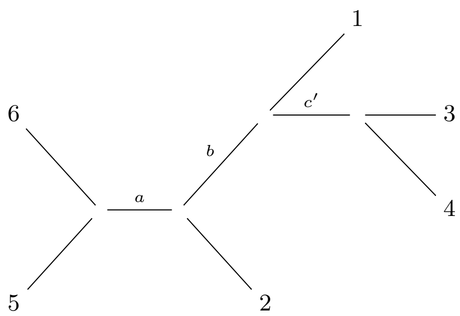


Il n'y a pas de chemin qui passe par les 3 arcs a, b, c sans passer deux fois par a.

En revanche, on constate qu'en faisant un NNI autour de b avec échange de la feuille 2 avec



, on obtient l'arbre chenille

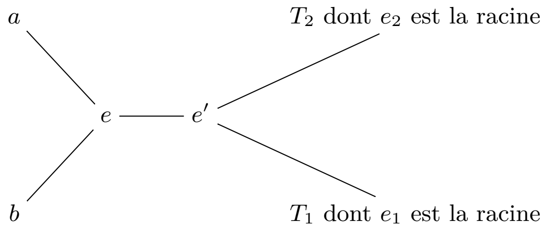


Cette fois-ci il y a un chemin qui passe sans répétition par a, b, c'.

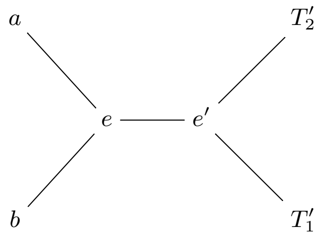
(a) Par récurrence sur n on montre que tout arbre de $B(n)$ peut être transformé en un arbre chenille par une séquence de NNI.

Pour $n \in \{3, 4\}$ les arbres de $B(n)$ sont déjà des arbres chenilles. On suppose $HR(k)$ pour tout $k \leq n$ avec $n \geq 4$. Considérons T dans $B(n+1)$.

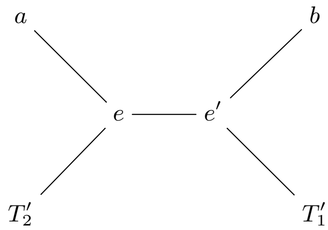
Partons d'un nœud e de T, interne et voisin de deux feuilles notées a, b. Ce nœud est voisin d'un troisième sommet e'. Le sommet e' n'est pas une feuille car $n+1>3$ et T connexe.
Notons e_1, e_2 les voisins de e' différents de e et T_1, T_2 les sous-arbres issus de e_1, e_2 :



T_1 est un arbre raciné. S'il est réduit à une feuille, on le laisse tel quel. Sinon, ajoutons une feuille d'étiquette $n+2$ (pour bien la distinguer des autres) pour occuper la place de e'. Le nouvel arbre raciné A_1 ainsi obtenu est dans $B(k)$ avec $k \leq n$ donc on peut le transformer par NNI en un arbre chenille. Par application de NNI successifs dans cet arbre chenille, on peut faire descendre $n+2$ à une extrémité pour obtenir C_1 (qui est toujours chenille). Retirons $n+2$ de C_1 pour obtenir T_1' et branchons T_1' à e'.
On agit de même pour T_2 (donc en le laissant intact si T_2 est l'arbre feuille).
Après application de ces NNI, l'arbre T est devenu T' et est de la forme



Si on fait un NNI autour de $\{e, e'\}$ dans T' (par exemple en échangeant b et T_2'), on obtient un arbre A de la forme :



Il y a un chemin qui passe par toutes las branches internes de T_1' puis par $\{e, e'\}$ et enfin par toutes les bf=ranches internes de T_2'. Ce chemin passe donc par toutes les branches internes de l'arbre A lequel a été obtenu à partir de T par une par une séquence de NNI.
Hérédité OK.

(b) On montre que tous les arbres chenilles de $B(n)$ (avec $n \geq 4$) sont transposables par NNI en l'arbre chenille A tel que

— $1, 2$ sont ppv et $n-1, n$ aussi ;

— En notant d la distance, $d(k, k+1) = 2$ si $k \in frm{-}e\mathbb{N}+1$ et $d(k, k+1) = 3$ sinon.

Soit $e \ldots, e'$ deux nœuds internes. Soit a l'étiquette d'une feuille voisine de e et a' celle d'une feuille voisine de e'. Par NNI, on peut rendre la feuille d'étiquette a voisine de e' et celle d'étiquette a' voisine de e.
Soit $e_1, \ldots, e_{2n-2}$ un chemin haliltonnien passant par tous les nœuds internes de T. Alors e_1 et e_{2n-2} sont des nœuds voisins de deux feuilles et ce sont les seuls dans ce cas.
Par itération de la remarque faite plus haut, on peut amener les deux feuilles de plus petite étiquette en e_1, puis la feuille d'étiquette 3 en e_2 et ainsi de suite. On mettra donc en feuilles voisines de e_{2n-2} celles d'étiquettes n et $n-1$.

Ainsi, tout arbre de $B(n)$ est transformable par NNI en un arbre chenille et celui-ci est transformable par NNI en A. Il vient que $G_{\text{NNi}}(n)$ est connexe.

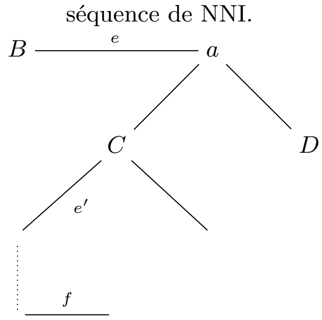
13. On constate qu'un SPR appliqué à deux branches incidentes est en fait l'identité (faire le shéma pour s'en persuader).

    On vu en Q1a) (exemple du passage de l'arbre 1 à l'arbre 2) qu'un SPR appliqué à deux branches e, f distantes de 1 (et donc, séparées de fait par une branche g) est en fait un NNI autour de la branche g (le fait que dans cet exemple, les sommets étiquetés par 1,2,3,4,5 sont des feuilles n'a aucune incidence sur le résultat).

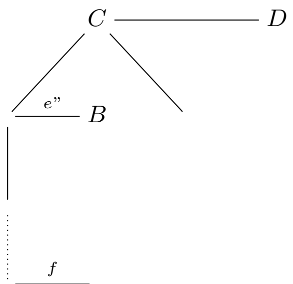
    De façon réciproque, un NNI autour d'une branche interne g, a le même résultat qu'un SPR appliqué à deux branches incidentes à g et séparées par g (idem, faire un schéma si on a besoin d'être convaincu).

    Soit T un arbre et deux branches e, f distantes de $n+1$ (avec $n \geq 1$). Il y a un chemin de branches internes les reliant : e joint deux sous-arbres B, A. L'un des deux sous-arbres (disons A) contient la branche f. Après suppression de e, A a pour racine le sommet a. Ainsi a est voisin d'un sous-arbre C dont une branche e' à la racine permet d'accéder (en plusieurs étapes) à f et d'un autre, D, ne le contenant pas. Notons e' la branche qui joint a à C.

    On montre par récurrence sur la distance entre e et f qu'un SPR entre les deux est en fait une séquence de NNI.



    Un premier SPR (donc un NNI) entre e et e' a pour effet de rendre voisins les sous-arbres C, D (ce que ferait aussi un SPR entre e et f). On obtient un arbre T' :



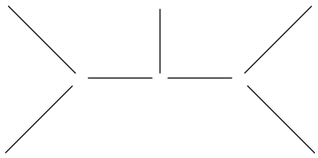
    Un SPR entre e" et f dans T' aura le même effet que le SPR direct dans T entre e et f. Par HR, il existe une suite de NNI qui ont le même effet que le SPR de entre e" et f dans T'. Donc, par une succession de NNI dans T, on obtient le même résultat que le SPR direct entre e et f.

    Le graphe $G_{\text{SPR}}(n)$ a les mêmes sommets que $G_{\text{NNI}}(n)$ (ce sont les arbres de $B(n)$) ; il contient tous les arcs de $G_{\text{NNI}}(n)$ mais il en a d'autres en plus (serait-ce la fermeture transitive de $G_{\text{NNI}}(n)$? il faudrait le montrer pour en être sûr !). Puisque $G_{\text{NNI}}(n)$ est connexe, il vient que $G_{\text{SPR}}(n)$ aussi.

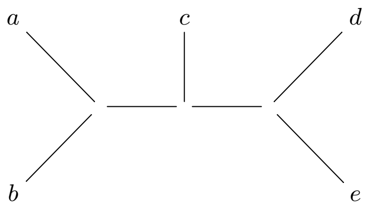
2 Étude de $G_{\mathbf{NNI}}(5)$

1. On a
$$|B(5)| = \prod_{k=0}^{5-3}(2k+1) = 1 \times 3 \times 5 = 15$$
Par la Q7, il y a $2(5-3) = 4$ voisins par sommet (donc chaque sommet est de degré 4).

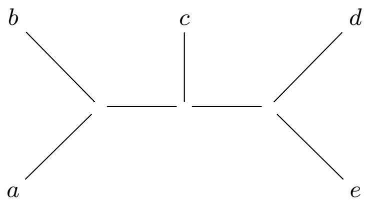
2. Un arbre de $B(5)$ possède $2 \times 5 - 2 = 8$ sommets dont 3 nœuds internes. Si un nœud interne e n'est pas voisin d'une feuille, alors il est voisin de 3 nœuds internes, ce qui n'est pas possible puisqu'il n'y a que deux nœuds internes différents de e.
Donc le squelette d'un arbre de $B(5)$ est une chenille.



3. Soit $T \in B(5)$ dont les feuilles portent les étiquettes a, b, c, d, e (des nombres distincts dans $[\![1, 5]\!]$).



On peut faire les NNI $c \leftrightarrow a$, puis $a \leftrightarrow b$ et enfin $b \leftrightarrow c$ et on revient à l'arbre de départ :



De même, un second cycle de longueur trois est obtenu en faisant les NNI $d \leftrightarrow c$, puis $e \leftrightarrow d$ et enfin $e \leftrightarrow c$.

Pour un cycle de longueur 5 : $c \leftrightarrow a$, $a \leftrightarrow d$, $d \leftrightarrow b$, $b \leftrightarrow e$, $e \leftrightarrow c$. Il y a deux choix possibles pour le premier échange ($c \leftrightarrow a$ ou $c \leftrightarrow b$), puis deux choix possibles pour le deuxième échange une fois le 1er effectué. Les autres NNI sont contraints.

Je dénombre 4 cycles de longueur cinq pour l'arbre T. L'arbre au milieu du cycle est à une distance 3 de l'arbre T.

Partant de l'arbre T, on peut faire un NNI choisi parmi 4 possibilités. Une fois ce 1er NNI effectué, on a 3 possibilités de nouveaux NNI qui mènent à un arbre différent de T (on ne peut pas refaire le même NNI que le 1er sinon on retombe sur T). Donc Partant de T, on peut atteindre $4 \times 3 = 12$ arbres en 2 NNI. Comme il y a 14 arbres différents de T, il y a bien deux arbres qui ne sont pas accessibles par T en deux mouvements.

La relation $\ll$ est ppv avec $\gg$ suffit à déterminer l'arbre T : les classes d'équivalences de T sont $\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}$. On peut accéder en au plus 3 mouvements n'importe quelle partition (par exemple $\{c, d\}, \{b\}, \{a, e\}$).

4. Voir figire 1.

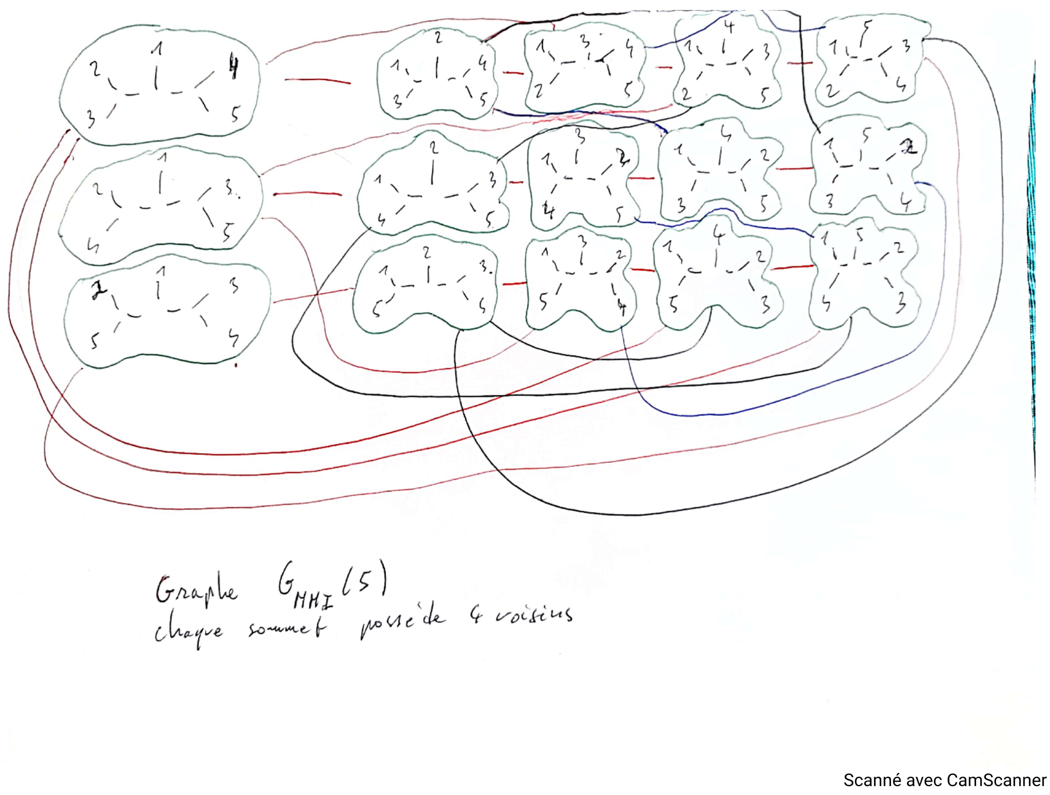
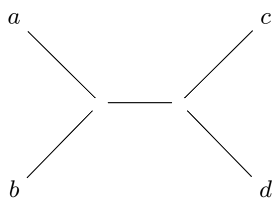


Figure 1 – $G_{\mathrm{NNI}}(5)$

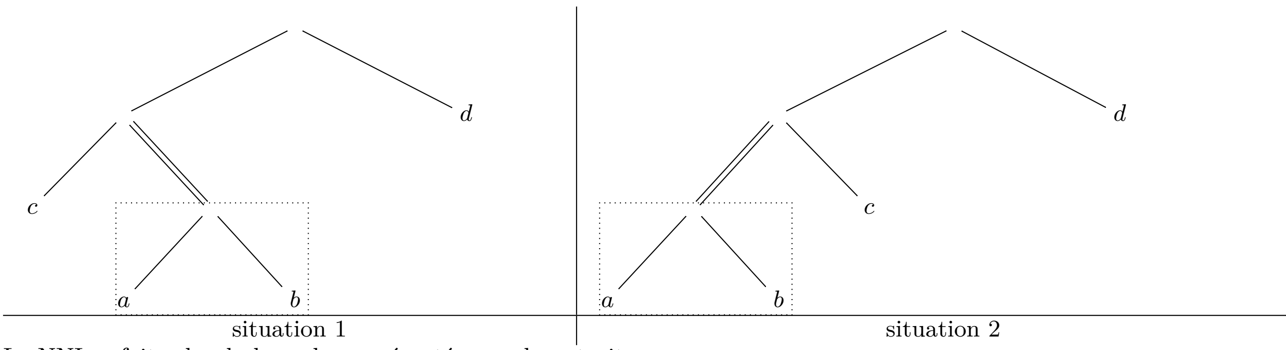
3 Construction de $G_{\mathbf{NNI}(n)}$

5. Codes
6. **voisinsNNI**. Considérons une branche sur laquelle faire un NNI :



Pour fixer les idées considérons que le maximum des étiquettes soit contenu dans d et que le maximum des étiquettes de b soit plus grand que celui de a. Nous notons cela abusivement $d \geq \max(a, b, c)$ et $b \geq a$.

Il y a alors deux façons de représenter cet arbre selon que $c \geq b$ ou non.



situation 1 situation 2

Le NNI se fait selon la branche représentée par deux traits.

Ainsi d reste toujours à droite.

La première fonction détermine la plus grande étiquette. La seconde fabrique un nœud à partir de deux arbres en choisissant qui va de quel côté :

```
let rec nmax = function Feuille x -> x | Noeud(_, a)-> nmax a;;
let ranger t1 t2 = if nmax t1 > nmax t2 then Noeud(t2,t1) else Noeud(t1,t2);;
```

Ensuite, on constitue un échange entre un nœud et un autre nœud situé un cran plus profond.

```
let vNNIg t =
  match t with
  | Noeud(c, Noeud(a,b)) -> (*b >= a et b>= c*)
    [ Noeud(a,Noeud(c,b)) (*a<->c*);
      Noeud(ranger c a, b) (*b<->c*)]
  | _ -> [];;

let vNNId t =
  match t with
  | Noeud(Noeud(a,b),c) -> (*b >= a et c >= b*)
    [Noeud(a,Noeud(b,c)) (*a<->c*);
     Noeud(b,Noeud(a,c)) (*b<->c*)]
  | _ -> []
;;

let vNNI t = (vNNIg t)@(vNNId t);;
```

A partir d'un arbre, on effectue tous les NNI sur son fils gauche sans toucher au droit et tous les NNI sur son fils droit sans toucher au gauche :

```
let rec voisinsNNI t =
```

```
  match t with
  | Noeud(g,d) ->
    List.map (fun x -> Noeud(x,d)) ((vNNI g) @ (voisinsNNI g))
    @
    List.map (fun x -> Noeud(x,g)) ((vNNI d) @ (voisinsNNI d))
  | _ -> [];;
```

7. Voici :

```
(*on fait un parcours en largeur :
  - la liste afaire représente la file des sommets à traiter;
  - fait est le graphe partiellement construit.

  *)
let rec construire fait afaire vus =
  let absent vus t =
    List.for_all
      (fun t' -> not @@ egaux t t')
      vus in
  match afaire with
  | [] -> fait
  | t :: q ->
    let voisins = voisinsNNI t in
    let nouveaux = List.filter (absent vus) voisins in
    construire
      ((t, voisins)::fait)
      (q @ nouveaux)
      (nouveaux @ vus)
;;

let grapheNNI n =
  construire [] [chenille n] [chenille n];;
```

On admet que l'appel **voisinsNNI t** produit bien la liste des voisins de **t**.
La fonction **grapheNNI** effectue un parcours en largeur. La (liste traitée comme une) file **afaire** contient les sommets verts (à traiter), la liste **vus** répertorie les sommets déjà rencontrés (donc non bleus), la liste **fait** contient les sommets rouges (et leurs voisins).
La terminaison est assurée parce que le nombre de sommets du graphe est fini et qu'un même sommet est ajouté au plus une fois dans la file **afaire** (grâce à la liste **vus**). La correction est assurée car le graphe est connexe et donc qu'un parcours en largeur depuis n'importe quel sommet (ici **chenille n**) va aborder tous les sommets du graphe.

4 $G_{\mathbf{SPR}}(n)$ est hamiltonien

8. Considérons deux arbres t_1, t_2 distincts de $G_{\text{SPR}}(n+1)_{\mid S_i}$. pour le premier la feuille $n+1$ est reliée à un nœud v_1 qui a deux autres voisins a_1, b_1. Pour le second, la feuille $n+1$ est reliée à un nœud v_2 qui a deux autres voisins a_2, b_2.
Dans l'arbre t_1, $\{a_2, b_2\}$ est une branche ; dans t_2, $\{a_1, b_1\}$ est une branche.
Si on fait un SPR dans t_1 entre la branche $\{v_1, n+1\}$ et la branche $\{a_2, v_2\}$, on crée une branche $\{a_1, b_1\}$, on insère un nouveau sommet v_2 entre a_2 et v_2, on supprime $\{a_2, v_2\}$ et on connecte v_2 à a_2, b_2 et $n+1$: bref, on a construit l'abre t_2.
Ainsi tous les sommets de $G_{\text{SPR}}(n+1)_{\mid S_i}$ sont voisins : c'est un graphe complet.
9. Soient t_i, t_j dans $G_{\text{SPR}}(n)$ reliés entre eux. Il y a donc un SPR sur deux branches u, v de t_i qui permet d'obtenir t_j. On suppose que $n \geq 3$: ainsi, il y a au moins une branche qui n'est pas concernée par ce SPR (donc qui n'est pas modifiée). Cette branche est la même dans $t-i$ et t_j.
Construisons un arbre de t'_i de S_i à partir de cette branche non affectée par le SPR et un autre arbre t'_j de S_j à partir de cette même branche. Il se trouve que $\{u, v\}$ est une branche dans t'_i puisque le point d'accroche de $n+1$ ne les concerne pas.

En effectuant un SPR sur u, v dans t'_i on retrouve bien t'_j.

10. On a que $G_{\mathrm{SPR}}(4)$ est hamiltonien comme on l'a vu lors d'une quetsion précédente (tracer $G_{\mathrm{NNI}}(4)$).
Admettons que $G_{\mathrm{SPR}}(n)$ est hamiltonnien. On a que $G_{\mathrm{SPR}}(n) = \bigcup_{t_i \in G_{\mathrm{SPR}}(n)} S_i$.
On relie tous les S_i entre eux (question précédente). On obtient un cycle C qui passe une fois et une seule par chaque S_i puisque $G_{\mathrm{SPR}}(n)$ est hamiltonnien (il relie un représentant t_i d'un S_i à un représentant t_j d'un S_j). Or, chaque S_i étant complet, il possède un cycle hamiltonien partant de chaque t_i : cela nous donne un cycle hamiltonien pour $G_{\mathrm{SPR}}(n+1)$.

Appendice

Proposition 4.1. *Dans un arbre de $B(n)$ avec $n \geq 3$, il y a au moins un nœud interne voisin de deux feuilles.*

Démonstration. **Méthode 1** Puisque $n \geq 2$, le nombre de nœuds internes est d'au moins $2n-2-n \geq 2$. Il existe au moins un nœud interne voisin de deux feuilles. Si ce n'est pas le cas, enlevons de T toutes les branches qui partent d'un nœud interne et joignent une feuille (donc enlevons toutes les feuilles).

Le graphe restant est non vide et vérifie que tous les degrés sont plus grands que 2, donc il possède un cycle. C'est absurde car ce cycle serait un cycle de T.

Méthode 2 Si $n > 2$, les feuilles ne peuvent être reliées entre elles. Il y a n feuilles et elles sont chacune reliées à un nœud interne. Or il y a $n-2$ nœuds internes. Par lemme des tiroirs, il existe un nœud interne relié à deux feuilles.

On peut faire mieux si $n \geq 4$: nous savons que le nœud identifié à la question précédente est relié à deux feuilles mais pas trois par Q3. Enlevons le ≪ tiroir ≫ représentant ce nœud et les deux feuilles qu'il contient. Il reste donc $n-2$ feuilles à connecter à $n-3$ nœuds internes. Là encore, le lemme des tiroirs nous donne qu'un nœud interne distinct du précédent est lui aussi relié à 2 feuilles ce qui nous donne une autre preuve de la propriété 4.2. □

Proposition 4.2. *Soit $n \geq 4$. Pour tout $T \in B(n)$ il existe deux nœuds internes x, y possédant deux feuilles comme voisins.*

Démonstration. On sait que T possède $n-2 \geq 2$ nœuds internes.

Si $n = 4$, alors y a deux nœuds internes x, y. Si x ou y est voisin de 3 feuilles, le graphe ne peut être connexe. Donc x, y sont voisins. Tous les autres sommets (au nombre de 4) sont des feuilles. Ainsi x, y sont chacun voisins de 2 feuilles.

Hérédité. On suppose que pour tout arbre de $B(n)$ il existe deux nœuds internes x, y possédant deux feuilles comme voisins. Soit $T \in B(n+1)$. Considérons un nœud interne x voisin de deux feuilles (il en existe un par une propriété précédente). En enlevant les deux feuilles voisines de ce nœud interne, on obtient un arbre $T' \in B(n)$. Par HR, T' a deux nœuds internes voisins de deux feuilles. L'un de ces deux nœuds n'est donc pas le voisin de e dans T'. Alors c'est aussi un nœud de T et comme il est différent de e, cela fait dans T un deuxième nœud interne voisin de deux feuilles. □

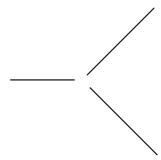
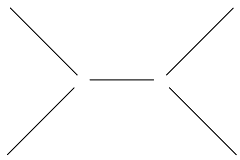
Proposition 4.3. *Un arbre de $B(n)$ est une chenille si et seulement si tout nœud interne est voisin d'au moins une feuille.*

Démonstration. **Condition nécessaire** Dans un arbre chenille, chaque nœud interne est voisin d'au moins une feuille.

En effet, si un nœud interne est voisin de 3 nœuds internes, les 3 branches u, v, w adjacentes à ce nœud sont internes. Aucun chemin ne peut passer par u, v et w sans repasser par l'une d'entre elle puisqu'il n'y a pas de cycle dans un arbre.

Condition suffisante On montre par récurrence sur le nombre de feuille n que ≪ si un arbre de $B(n)$ vérifie que tous les nœuds internes sont voisins d'au moiins une feuille, alors il existe un chemin passant par toutes les branches internes exactement une fois ≫.

Soit un arbre binaire raciné T vérifiant que tout nœud interne est voisin d'une feuille.

Observons que s'il y a 4 feuilles ou moins dans T, le graphe a pour squelette  ou . Ce sont deux arbres vérifiant la propriété et ils sont chenilles (le 1er parce qu'il n'y a pas de branche interne, le second car il n'y en a qu'une).

On suppose $HR(k)$ pour tout $k \leq n$ avec $n \geq 4$. Soit $T \in B(n+1)$ dont les nœuds internes sont tous voisins d'au moins une feuille.

Partons d'un nœud interne e voisin de deux feuilles (voir proposition plus haut). Le sommet e est voisin d'un autre nœud interne e' (sinon T n'aurait que 3 feuilles ce qui est exclu car $n > 3$). La branche $\{e, e'\}$ est interne dans T. Enlevons les deux feuilles voisines de e pour obtenir T'. Le sommet e devient une feuille de T'. L'arbre T' est dans $B(n+1-2+1) = B(n)$ et vérifie les conditions de $HR(n)$ donc il y a un chemin qui passe exactement une fois par toutes les branches internes de T'. Ajoutons e à ce chemin, cela nous donne un chemin qui passe exactement une fois par toutes les branches internes de T.

□

Proposition 4.4. *Dans un arbre chenille de $B(n)$ avec $n \geq 3$, il y a exactement deux nœuds internes voisins de deux feuilles, tous les autres sont voisins d'une seule feuille.*

Démonstration. On raisonne par récurrence.

C'est bien sûr vrai pour l'arbre unique de $B(4)$ dont le squelette a déjà été étudié.

Soit T un arbre chenille de $B(n+1)$ avec $n \geq 4$ et e un nœud interne à deux feuilles voisines. Le troisième voisin, noté e', est un nœud interne puisque $n+1 > 4$. On enlève les deux feuilles de e. Dans l'arbre modifié T' (qui appartient à $B(n)$), e est une feuille et e' est donc voisin de deux feuilles.

Par HR au rang n, T' possède exactement un sommet en plus de e' qui est interne et voisin de deux feuilles. Ainsi, en remettant les feuilles voisines de e, on en déduit que T possède exactement un sommet différent de e et voisin de deux feuilles. □