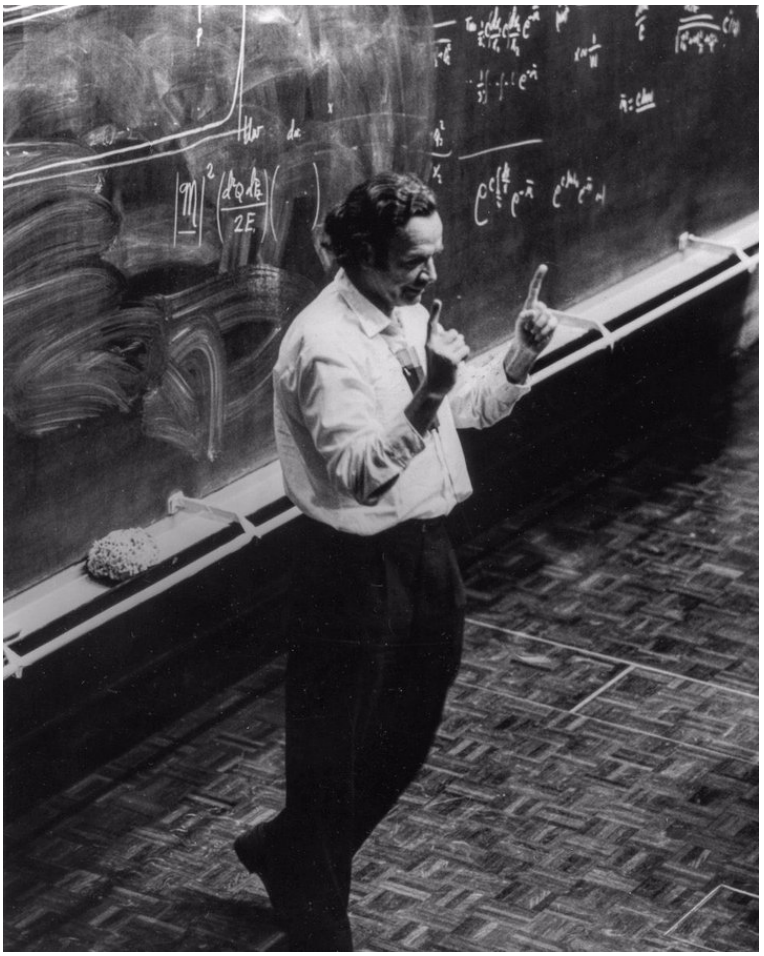
Cahier d'entraînement

— en physique et en chimie —



Richard Feynman (1918–1988)

Cette photo a été prise alors que Richard Feynman donnait un cours au CERN en 1970.

Feynman est un physicien américain, l'un des plus influents de la seconde moitié du XX^{e} siècle, en raison notamment de ses travaux sur l'électrodynamique quantique, les quarks et l'hélium superfluide.

Il a notamment marqué l'histoire de la physique par ses cours, réputés passionnants.

Ce cahier d'entraînement a été écrit collectivement par des professeurs en classes préparatoires scientifiques.

Coordination

Colas Bardavid et Jimmy Roussel

Équipe des participants

Stéphane Bargot, Claire Boggio, Cécile Bonnand, Alexis Brès, Geoffroy Burgunder, Erwan Capitaine, Caroline Chevalier, Maxime Defosseux, Raphaëlle Delagrange, Alexis Drouard, Gaelle Dumas, Alexandre Fafin, Jean-Julien Fleck, Aéla Fortun, Florence Goutverg, Chahira Hajlaoui, Mathieu Hebding, Quinot Isabelle, Lucas Henry, Didier Hérisson, Jean-Christophe Imbert, Fanny Jospitre, Tom Kristensen, Emmanuelle Laage, Catherine Lavainne, Maxence Miguel-Brebion, Anne-Sophie Moreau, Louis Péault, Valentin Quint, Alain Robichon, Caroline Rossi-Gendron, Nancy Saussac, Anthony Yip

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

Le pictogramme du bulldozer a été créé par Ayub Irawan (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Twitter. L'illustration est utilisée à des fins pédagogiques et les droits restent réservés.

Version 1.01 — 27 avril 2023

Sommaire

Mode d'emploi du cahier d'entraînement v

Généralités

☐ fiche 1. Conversions 3

☐ fiche 2. Signaux 9

Électricité

☐ fiche 3. Étude des circuits électriques I 15

☐ fiche 4. Étude des circuits électriques II 21

☐ fiche 5. Étude des filtres 32

☐ fiche 6. Énergie et puissance électriques 41

☐ fiche 7. Amplificateurs linéaires intégrés 52

Optique

☐ fiche 8. Sources lumineuses et lois de Snell-Descartes 64

☐ fiche 9. Lentilles 68

Mécanique

☐ fiche 10. Cinématique 76

☐ fiche 11. Principe fondamental de la dynamique 83

☐ fiche 12. Approche énergétique en mécanique 90

☐ fiche 13. Moment cinétique 97

Életromagnétisme

☐ fiche 14. Champ électrique 103

☐ fiche 15. Particule dans un champ électromagnétique 109

☐ fiche 16. Champ magnétique 116

☐ fiche 17. Induction 125

Thermodynamique

☐ fiche 18. Gaz parfaits 133
☐ fiche 19. Premier Principe 138
☐ fiche 20. Second principe et machines thermiques 145
☐ fiche 21. Statique des fluides 152

Chimie

☐ fiche 22. Fondamentaux de la chimie des solutions 161
☐ fiche 23. Fondamentaux de la chimie en phase gazeuse 169
☐ fiche 24. Réactions chimiques 176
☐ fiche 25. Cinétique chimique 184

Chiffres significatifs et incertitudes

☐ fiche 26. Chiffres significatifs et incertitudes 193

Mode d'emploi

Qu'est-ce que le cahier d'entraînement ?

Le *cahier d'entraînement en physique/chimie* est un outil destiné à renforcer l'acquisition de **réflexes utiles en physique et en chimie**.

Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur ; travailler avec ce cahier d'entraînement vous permettra en revanche d'aborder avec plus d'aisance les exercices de physique/chimie.

Pour donner une analogie, on pourrait dire que ce cahier d'entraînement est comparable aux **exercices de musculation** qu'un athlète fait : ils sont nécessaires pour mieux réussir le jour J lors de la compétition ; mais ils ne sont pas suffisants : certes un coureur de sprint fait de la musculation, mais il fait également tout un tas d'autres choses.

Il a été conçu par une large équipe de professeurs en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter un outil utile et qui vous apportera de l'aide.

Comment est-il organisé ?

Le cahier est organisé en *fiches d'entraînement*, chacune correspondant à un thème issu du programme de première année d'enseignement supérieur.

Les thèmes choisis sont dans l'ensemble au programme de toutes les CPGE. De rares thèmes sont spécifiques à la filière PCSI, mais les intitulés sont suffisamment clairs pour que vous identifiiez facilement les fiches qui vous concernent.

Chaque fiche est composée d'une suite de petits exercices, appelés *entraînements*, dont le temps de résolution estimé est indiqué par une ( ), deux (), trois () ou quatre () horloges.

Les exercices « bulldozer »

Certains entraînements sont accompagnés d'un pictogramme représentant un bulldozer.

Ces entraînements sont **basiques et transversaux**.

Les compétences qu'ils mettent en jeu ne sont pas forcément spécifiques au thème de la fiche et peuvent être transversales.

Ce pictogramme a été choisi car le bulldozer permet de construire les fondations, et que c'est sur des fondations solides que l'on bâtit les plus beaux édifices.

Comment utiliser ce cahier ?

Le cahier d'entraînement ne doit pas remplacer vos TD. Il s'agit d'un outil à utiliser en complément de votre travail « normal » en physique (apprentissage du cours, recherche de TD, recherche des DM).

Un travail personnalisé.

Le cahier d'entraînement est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez vos entraînements en fonction des difficultés que vous rencontrez, des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Pratiquez l'entraînement à un rythme régulier : **une dizaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire dix fiches par jour pendant les vacances ».

Un travail efficace.

Utilisez les réponses et les corrigés de façon appropriée : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant d'aller les regarder. Il faut vraiment **chercher les entraînements** jusqu'au bout afin que le corrigé vous soit profitable.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahier.entrainement@gmail.com`.

Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris en haut à gauche de chaque fiche.

Énoncés

Conversions

Prérequis
Unités du Système international. Écriture scientifique.

Unités et multiples

Entraînement 1.1 — Multiples du mètre.

Écrire les longueurs suivantes en mètre et en écriture scientifique.

a) 1 dm .....
c) 3 mm .....
e) 5,2 pm ....
b) 2,5 km ....
d) 7,2 nm ....
f) 13 fm .....

Entraînement 1.2 — Multiples du mètre *bis*.

Écrire les longueurs suivantes en mètre et en écriture scientifique.

a) 150 km ....
c) 234 cm ....
e) 0,23 mm ..
b) 0,7 pm ....
d) 120 nm ....
f) 0,41 nm ...

Entraînement 1.3 — Vitesse d'un électron.

La vitesse d'un électron est $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_e}}$, où $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$ est la charge d'un électron, $U = 0{,}150\,\text{kV}$ est une différence de potentiel et $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-28}\,\text{g}$ est la masse d'un électron.

a) Calculer v en m/s .....
b) Calculer v en km/h .....

Entraînement 1.4 — Avec des joules.

On considère la grandeur $T = 0{,}67\,\text{kW} \cdot \text{h}$. *On rappelle que* $1\,\text{J} = 1\,\text{W} \cdot \text{s}$.

Convertir T en joule, en utilisant le multiple le mieux adapté .....

Entraînement 1.5 — Valeur d'une résistance.

La résistance d'un fil en cuivre est donnée par la formule $R = \dfrac{\ell}{\gamma S}$, où $\gamma = 59\,\text{MS/m}$ est la conductivité du cuivre, où $\ell = 1{,}0 \cdot 10^3\,\text{cm}$ est la longueur du fil et où $S = 3{,}1\,\text{mm}^2$ est sa section.

*L'unité des résistances est l'*ohm*, notée « Ω ». L'unité notée « S » est le* siemens *; on a* $1\,\Omega = 1\,\text{S}^{-1}$.

Calculer R (en ohm) .....

Entraînement 1.6 — Ronna, ronto, quetta et quecto.

En novembre 2022, lors de la 27e réunion de la Conférence générale des poids et mesures, a été officialisée l'existence de quatre nouveaux préfixes dans le système international :

Facteur multiplicatif	Préfixe	Symbole
10^{27}	ronna	R
10^{-27}	ronto	r
10^{30}	quetta	Q
10^{-30}	quecto	q

On donne les masses de quelques objets :

Soleil	Jupiter	Terre	proton	électron
$1{,}99 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$	$1{,}90 \cdot 10^{27}\,\text{kg}$	$5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$	$1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$	$9{,}10 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$

Convertir ces masses en utilisant ces nouveaux préfixes (en écriture scientifique).

a) Soleil (en Rg) .....

b) Soleil (en Qg) .....

c) Jupiter (en Rg) .....

d) Jupiter (en Qg) .....

e) Terre (en Rg) .....

f) Terre (en Qg) .....

g) proton (en rg) .....

h) proton (en qg) .....

i) électron (en rg) .....

j) électron (en qg) .....

Règle de trois et pourcentages

Entraînement 1.7 — Un peu de cuisine.

Les ingrédients pour un gâteau sont : 4 œufs, 200 g de farine, 160 g de beurre, 100 g de sucre et 4 g de sel. On décide de faire la recette avec 5 œufs. Combien de grammes faut-il de

a) farine ? .....

b) beurre ? .....

c) sucre ? .....

d) sel ? .....

Entraînement 1.8 — Pourcentages.

Convertir en pourcentage :

a) 0,1 .....

b) 0,007 .....

c) $\frac{1}{2}$ .....

d) $\frac{1}{20}$ .....

e) $\frac{9}{5}$ .....

f) un quart de 2 % .....

Entraînement 1.9 — Énergie en France 1.

La consommation d'énergie primaire en France (en 2020) est : nucléaire 40,0 %, pétrole 28,1 %, gaz 15,8 %, biomasse 4,4 %, charbon 2,5 % hydraulique 2,4 %, éolien 1,6 %.

Quel pourcentage occupent les autres énergies (solaire, biocarburants, *etc.*) ? .....

Entraînement 1.10 — Énergie en France 2.

La consommation primaire totale en France est de 2 571 TWh.

À l'aide des données de l'entraînement précédent, calculer (en « TWh ») les énergies créées par les sources suivantes :

a) nucléaire .....

b) pétrole .....

c) gaz .....

d) biomasse .....

e) charbon .....

f) hydraulique .....

g) éolien .....

h) autre .....

Entraînement 1.11 — Abondance des éléments dans la croûte terrestre.

L'abondance chimique d'un élément peut être exprimée en « parties par centaine » (notée %, on parle communément de « pourcentage »), en « parties par millier » (notée ‰, on parle aussi de « pour mille ») ou encore en « partie par millions » (notée « ppm »).

Les abondances de quelques éléments chimiques constituant la croûte terrestre sont :

Silicium	Or	Hydrogène	Fer	Oxygène	Cuivre
275‰	$1{,}0 \cdot 10^{-7}$ %	1,4 ‰	50 000 ppm	46 %	50 ppm

Quel est l'élément le moins abondant ? .....

Longueurs, surfaces et volumes

Entraînement 1.12 — Taille d'un atome.

La taille d'un atome est de l'ordre de 0,1 nm.

a) Quelle est sa taille en m (écriture scientifique) ? .....

b) Quelle est sa taille en m (écriture décimale) ? .....

Entraînement 1.13 — Alpha du centaure.

La vitesse de la lumière dans le vide est $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s. Une année dure 365,25 jours. Alpha du centaure est à une distance de 4,7 années-lumière de la Terre.

a) Quelle est cette distance en m (écriture scientifique) ? .....

b) Quelle est cette distance en km (écriture scientifique) ? .....

Entraînement 1.14 — Avec des hectares.

La superficie de la France est de 672 051 km^2. L'île danoise de Bornholm (au nord de la Pologne) a une superficie de 589 km^2. Un hectare (ha) est la surface d'un carré de 100 m de côté.

Donner les superficies suivantes :

a) un hectare (en m^2) .....

b) un hectare (en km^2) .....

c) la France (en m^2) .....

d) la France (en ha) .....

e) Bornholm (en m^2) .....

f) Bornholm (en ha) .....

Entraînement 1.15 — Volume.

a) Peut-on faire tenir 150 mL d'huile dans un flacon de $2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3$? .....

b) Peut-on faire tenir 1,5 L d'eau dans un flacon de $7{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$? .....

Masse volumique, densité et concentration

Entraînement 1.16 — Masse volumique.

Une bouteille d'eau de 1 L a une masse de 1 kg. Un verre doseur rempli indique, pour la même graduation, eau : 40 cL et farine : 250 g.

a) Quelle est la masse volumique de l'eau en $\mathrm{kg/m}^3$? .....

b) Quelle est la masse volumique de la farine ? .....

Entraînement 1.17 — Densité.

La densité d'un corps est le rapport $\dfrac{\rho_{\text{corps}}}{1\,000\,\mathrm{kg/m}^3}$, où ρ_{corps} est la masse volumique du corps en question.

a) Une barre de fer de volume 100 mL pèse 787 g. Quelle est la densité du fer ? .....

b) Un cristal de calcium a une densité de 1,6. Quelle est sa masse volumique (en $\mathrm{kg/m}^3$) ?

Entraînement 1.18 — Un combat de masse.

On possède un cube de 10 cm en plomb de masse volumique $11{,}20\,\mathrm{g/cm}^3$ et une boule de rayon 15 cm en or de masse volumique $19\,300\,\mathrm{kg/m}^3$. On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Lequel possède la plus grande masse ? .....

Entraînement 1.19 — Prendre le volant ?

Le taux maximal d'alcool dans le sang pour pouvoir conduire est de 0,5 g d'alcool pour 1 L de sang.

A-t-on le droit de conduire avec 2 mg d'alcool dans $1\,000\,\mathrm{mm}^3$ de sang ? .....

Autour de la vitesse

Entraînement 1.20 — Le guépard ou la voiture ?

Un guépard court à 28 m/s et un automobiliste conduit une voiture à 110 km/h sur l'autoroute.

Lequel est le plus rapide ? .....

Entraînement 1.21 — Classement de vitesses.

On considère les vitesses suivantes : 20 km/h, 10 m/s, 1 année-lumière/an, 22 mm/ns, 30 dm/s et 60 cm/ms.

a) Laquelle est la plus petite ? .....

b) Laquelle est la plus grande ? .....

Entraînement 1.22 — Vitesses angulaires.

La petite aiguille d'une montre fait un tour en 1 h, la Terre effectue le tour du Soleil en 365,25 j.

Quelles sont leurs vitesses angulaires :

a) en tours/min (l'aiguille) ? .....

b) en rad/s (l'aiguille) ? .....

c) en tours/min (la Terre) ? .....

d) en rad/s (la Terre) ? .....

Réponses mélangées

$10\ 000\,\text{m}^2$ $30\,\text{dm/s}$ $625\,\text{kg/m}^3$ $0{,}017\,\text{tr/min}$ $62\,\text{TWh}$ $1 \cdot 10^{-1}\,\text{m}$

oui $1{,}90 \cdot 10^{3}\,\text{Rg}$ $7{,}87$ $722\,\text{TWh}$ $1{,}99 \cdot 10^{3}\,\text{Qg}$ $7{,}2 \cdot 10^{-9}\,\text{m}$ $1{,}90\,\text{Qg}$

$134\,\text{TWh}$ $0{,}000\ 000\ 000\ 1\,\text{m}$ $406\,\text{TWh}$ $7 \cdot 10^{-13}\,\text{m}$ $4{,}33 \cdot 10^{13}\,\text{km}$ $113\,\text{TWh}$

$9{,}10 \cdot 10^{2}\,\text{qg}$ l'or $2{,}6 \cdot 10^{7}\,\text{km/h}$ $200\,\text{g}$ $9{,}10 \cdot 10^{-1}\,\text{rg}$ $1{,}67 \cdot 10^{6}\,\text{qg}$ $3 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$

$5{,}89 \cdot 10^{4}\,\text{ha}$ voiture $1{,}99 \cdot 10^{6}\,\text{Rg}$ $4{,}43 \cdot 10^{16}\,\text{m}$ $0{,}001\ 7\,\text{rad/s}$ $2{,}3 \cdot 10^{-4}\,\text{m}$

$180\,\%$ 10% $1{,}20 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$ $250\,\text{g}$ $1{,}50 \cdot 10^{5}\,\text{m}$ $125\,\text{g}$ $6{,}72 \cdot 10^{7}\,\text{ha}$

La boule en or $5\,\%$ $64\,\text{TWh}$ $1{,}67 \cdot 10^{3}\,\text{rg}$ $0{,}01\,\text{km}^2$ $1{,}99 \cdot 10^{-7}\,\text{rad/s}$

$5{,}5 \cdot 10^{-2}\,\Omega$ $1 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$ oui $1{,}6 \times 10^{3}\,\text{kg/m}^3$ $5{,}97 \cdot 10^{-3}\,\text{Qg}$ $6{,}72 \cdot 10^{11}\,\text{m}^2$

1 année-lumière/an $50\,\%$ $1{,}90 \cdot 10^{-6}\,\text{tr/min}$ $2{,}34\,\text{m}$ $5{,}2\%$ $1 \cdot 10^{3}\,\text{kg/m}^3$

$5{,}97\,\text{Rg}$ $0{,}7\,\%$ $41\,\text{TWh}$ $5\,\text{g}$ $4{,}1 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$ $5{,}2 \cdot 10^{-12}\,\text{m}$ $0{,}5\,\%$ non

$2{,}4\,\text{MJ}$ $1{,}03 \times 10^{3}\,\text{TWh}$ $5{,}89 \cdot 10^{8}\,\text{m}^2$ $7{,}3 \cdot 10^{6}\,\text{m/s}$ $2{,}5 \cdot 10^{3}\,\text{m}$ $1{,}3 \cdot 10^{-14}\,\text{m}$

▶ Réponses et corrigés page 200

Signaux

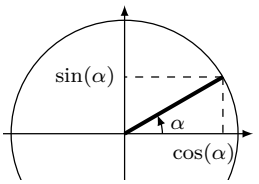
Prérequis
Fonctions trigonométriques.
Signaux périodiques (fréquence, période, pulsation, longueur d'onde, phase).

Autour des fonctions trigonométriques

Entraînement 2.1 — Cercle trigonométrique.

Sur le cercle trigonométrique ci-contre, $\cos(\alpha)$ se lit sur l'axe des abscisses et $\sin(\alpha)$ se lit sur l'axe des ordonnées.

Exprimer les fonctions suivantes en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.



a) $\sin(\alpha+\pi)$ .....

c) $\sin(\alpha+\pi/2)$ .....

b) $\cos(\alpha+\pi/2)$ .....

d) $\sin(\pi/2-\alpha)$ .....

Entraînement 2.2 — Dérivée de signaux.

Pour chaque signal ci-dessous, calculer sa dérivée par rapport à t.

a) $\sin(2t)$ .....

c) $\cos(t)\times\sin(t)$ .....

b) $\cos^2(t+4)$ .....

Entraînement 2.3 — Transformer des sommes de signaux en produits.

On rappelle les formules trigonométriques :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b).$$

Mettre les signaux suivants sous la forme $C\cos(\Omega t)\cos(\omega t)$ ou $C\sin(\Omega t)\sin(\omega t)$ (où les constantes C, Ω et ω s'exprimeront en fonction de A, ω_1 et ω_2).

a) $A\cos(\omega_1 t)+A\cos(\omega_2 t)$ .....

b) $A\cos(\omega_1 t)-A\cos(\omega_2 t)$ .....

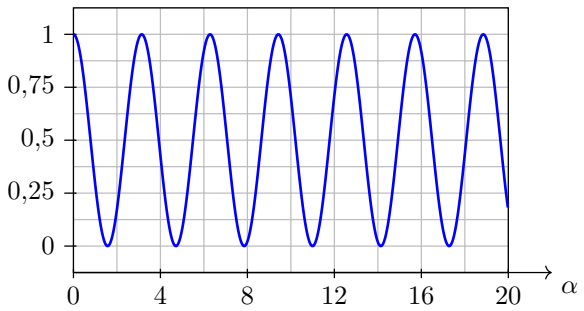
Entraînement 2.4 — Formules d'addition.

Mettre le signal $A\sin(\omega t+\varphi)$ sous la forme $B\cos(\omega t)+C\sin(\omega t)$, où B et C dont des constantes à exprimer en fonction de A et φ.

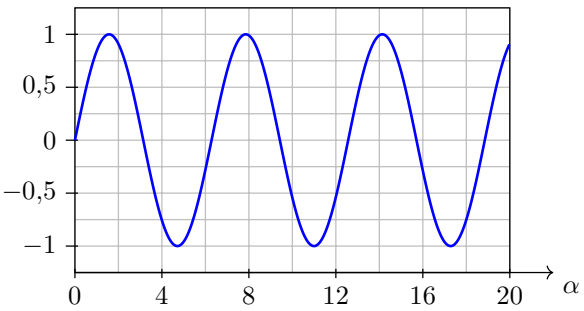
.....

Entraînement 2.5 — Représentations graphiques.

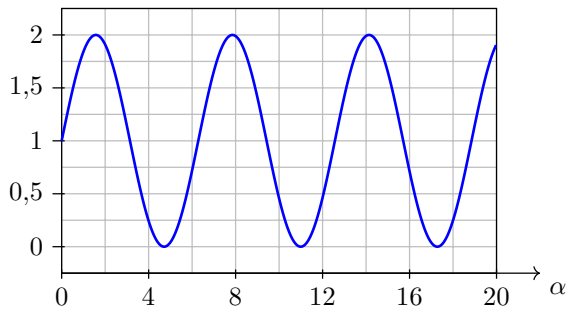
courbe 1



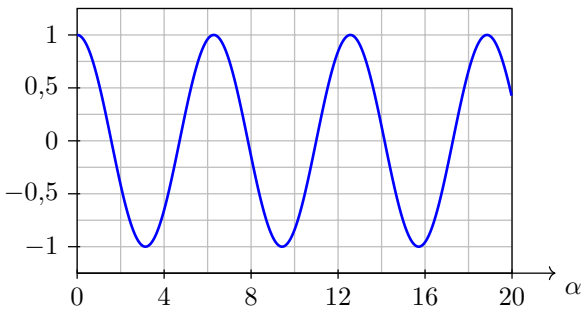
courbe 2



courbe 3



courbe 4



Pour les quatre graphiques ci-dessus, α est exprimé en radians.

Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

a) $\sin(\alpha)$ .....

b) $\cos(\alpha)$ .....

c) $1+\sin(\alpha)$ .....

d) $\cos^2(\alpha)$ .....

Entraînement 2.6 — Formules trigonométriques.

Le signal $\cos(\omega t)+\sin(\omega t)$ peut s'écrire sous la forme :

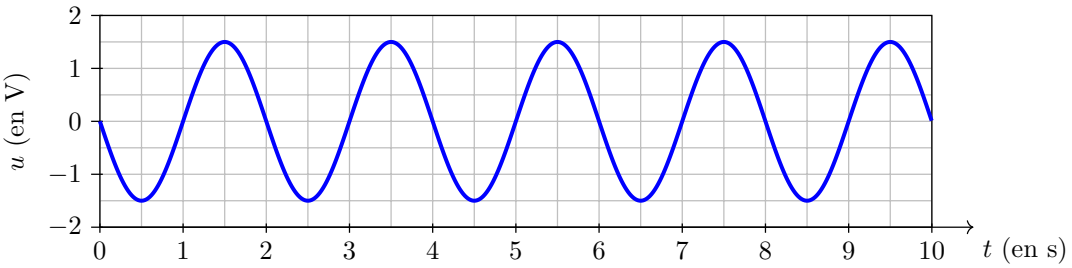
(a) $\cos^2(\omega t+\pi/4)$ (b) $2\cos(\omega t+\pi/4)$ (c) $\sqrt{2}\sin(\omega t+\pi/4)$

.....

Étude graphique

Entraînement 2.7 — Paramètres d'un signal sinusoïdal.

En travaux pratiques, vous faites l'acquisition d'une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ et obtenez l'oscillogramme ci-dessous.



Par lecture graphique ou par le calcul, déterminer :

a) l'amplitude U_0 .....

b) la phase à l'origine φ .....

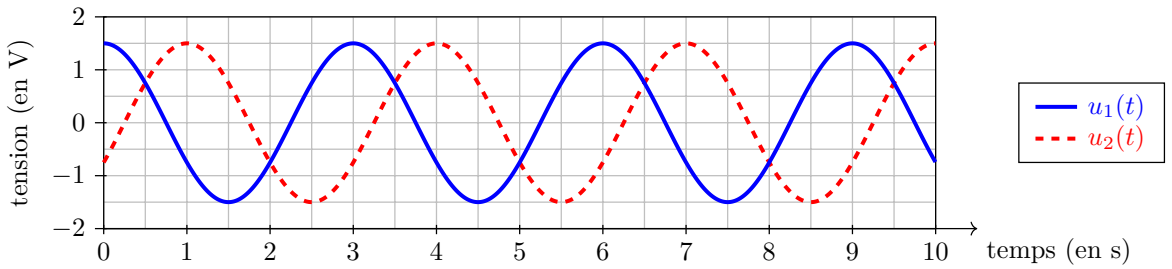
c) la période T .....

d) la fréquence f .....

e) la pulsation ω. .....

Entraînement 2.8 — Différence de phase.

La figure ci-dessous donne les représentations graphiques de deux signaux : le signal $u_1(t) = U_0 \cos(\omega t)$ et le signal $u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, où on a $\omega = \frac{2\pi}{3}$ rad · s^{-1}.



a) Le signal $u_2(t)$ est-il en avance ou en retard sur $u_1(t)$? .....

b) En déduire le signe de φ. .....

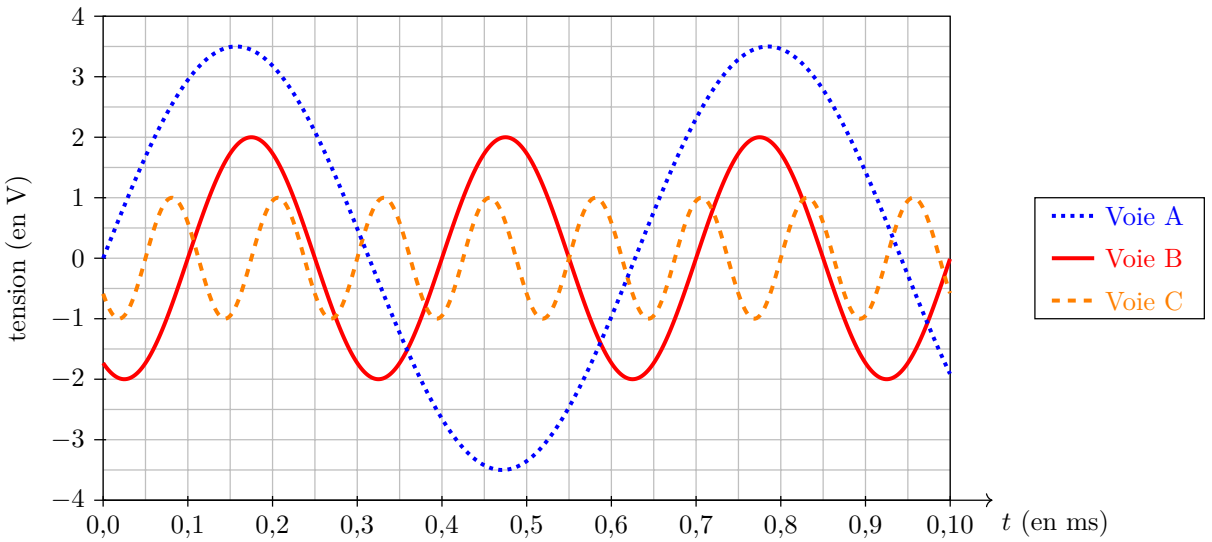
c) Déterminer graphiquement φ. .....

Entraînement 2.9 — Qui est qui ?

En travaux pratiques, vous faites l'acquisition de trois signaux périodiques : $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$.

Malheureusement, vous ne vous souvenez pas quelle voie d'acquisition vous avez utilisée pour chaque signal !

Vous savez que la tension $u_1(t)$ a pour période 300 µs, que la tension $u_2(t)$ a pour fréquence 8,0 kHz et que la tension $u_3(t)$ a pour pulsation $1 \times 10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.



Attribuer chacun des graphes au signal qui lui correspond.

a) Voie A ..... b) Voie B ..... c) Voie C .....

Valeur moyenne et valeur efficace

La valeur moyenne U_{moy} et la valeur efficace U_{eff} d'un signal $u(t)$ périodique de période T sont définies par les formules :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

Entraînement 2.10 — Signal sinusoïdal.

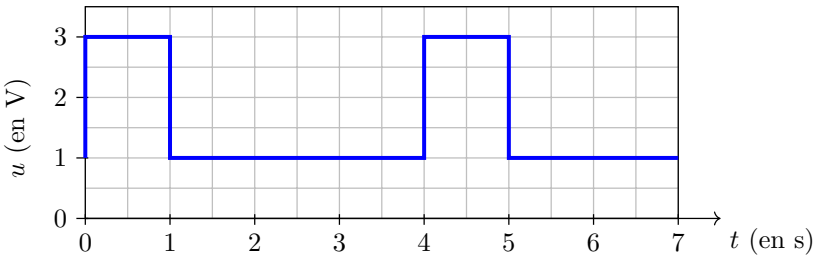
On considère le signal sinusoïdal $u(t) = U_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

a) Calculer la valeur moyenne de $u(t)$ .....

b) Calculer la valeur efficace de $u(t)$ .....

Entraînement 2.11 — Un signal carré.

On considère le signal périodique carré dissymétrique $u(t)$ représenté ci-dessous.



Calculer :

a) la valeur moyenne de $u(t)$ ..... b) la valeur efficace de $u(t)$ .....

Entraînement 2.12 — Un signal carré, sans son dessin.

On considère le signal périodique carré défini par $u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{si} \quad 0 < t \leqslant T/2 \\ 0 & \text{si} \quad T/2 < t \leqslant T. \end{cases}$

Calculer :

a) la valeur moyenne de $u(t)$ ..... b) la valeur efficace de $u(t)$ .....

Propagation d'un signal

Une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants est un signal $s(x,t)$ qui peut se mettre sous la forme

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

où f est une fonction mathématique quelconque. La grandeur c est la célérité de l'onde, c'est-à-dire sa vitesse de propagation.

Entraînement 2.13 — Éclair et tonnerre.

La foudre est une décharge électrique qui se produit pendant les orages et qui entraîne une lumière intense (l'éclair) et un grondement sourd (le tonnerre).

La lumière se propage à la vitesse $c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et le son se propage à la vitesse $c_s = 344\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Vous mesurez à l'aide d'un chronomètre la durée entre le moment où vous voyez l'éclair et le moment où vous entendez le tonnerre : vous trouvez $\Delta t = 5{,}0 \pm 0{,}5\,\mathrm{s}$.

a) On considère que la lumière se propage instantanément entre le lieu de l'éclair et votre position.

Déterminer la distance à laquelle la foudre a frappé .....

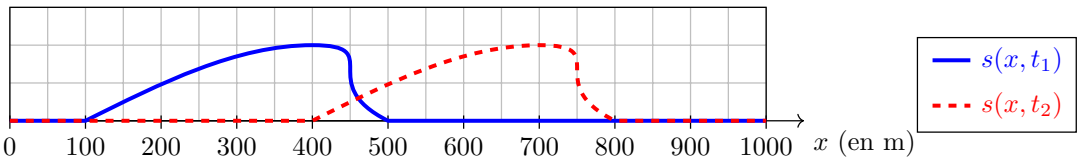
b) En déduire la durée de propagation de la lumière entre l'endroit où la foudre a frappé et votre position.

.....

c) L'hypothèse faite à la première question est-elle justifiée ? .....

Entraînement 2.14 — Vitesse de propagation.

Une vague $s(x,t)$ se propage en direction des côtes. Ci-dessous, on représente l'allure de la surface de l'eau aux instants $t_1 = 0\,\text{min}$ et $t_2 = 1\,\text{min}$.



Déterminer la vitesse de propagation de la vague en km/h. .....

Entraînement 2.15 — Onde progressive sinusoïdale.

Une onde progressive sinusoïdale a pour expression, en $x = 0$

$$s(0,t) = 2\sin(3{,}9\,t + 0{,}3\,\pi),$$

le temps t étant exprimé en secondes.

Elle se propage dans le sens des x croissants à la vitesse $c = 30\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

a) Déterminer la période T du signal. .....

b) Déterminer la longueur d'onde λ du signal. .....

c) Donner l'expression générale de $s(x,t)$. .....

Réponses mélangées

(c) 5,7 µs $-\sin(\alpha)$ $-\frac{2\pi}{3}$ rad En retard $\frac{\pi}{2}$ rad 48 cm $\varphi < 0$ oui

$2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$ $\frac{U_0}{2}$ $u_2(t)$ $A\sin(\varphi)\cos(\omega t) + A\cos(\varphi)\sin(\omega t)$

0 $\cos(\alpha)$ 1,5 V $2A\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$ $u_1(t)$ $2\cos(2t)$

Courbe 1 $-2\sin(t+4)\cos(t+4) = -\sin(2t+8)$ Courbe 4 $\frac{U_0}{\sqrt{2}}$ $\cos(\alpha)$ 2 s

$\cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$ 18 km/h $2\sin(3{,}9t - 13x + 0{,}3\pi)$ 1,5 V $\sqrt{3}$ V $u_3(t)$

1,7 km Courbe 3 $-\sin(\alpha)$ 0,5 Hz Courbe 2 1,6 s $\frac{U_0}{\sqrt{2}}$ $\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

▶ Réponses et corrigés page 203

Étude des circuits électriques I

Prérequis
Lois des nœuds. Loi des mailles. Loi d'Ohm. Montages diviseurs.

Constantes utiles
→ nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}0 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
→ charge élémentaire : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$

Autour du courant électrique

Entraînement 3.1 — Une bataille de courants.

Lequel de ces trois courants électriques présente la plus forte intensité ?

(a) 5 000 électrons durant 1 ms
(b) 0,2 mol d'électrons durant 1 an
(c) 20 milliards d'électrons durant 1 min

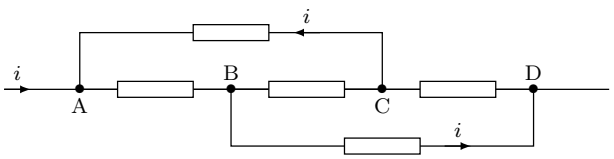
.....

Entraînement 3.2

L'intensité du courant traversant un fil de cuivre vaut $I = 4{,}0\,\text{mA}$.

Combien d'électrons traversent la section du fil pendant 10 s ? .....

Entraînement 3.3 — Loi des nœuds.



Les courants indiqués sur le schéma ci-dessus sont algébriques.

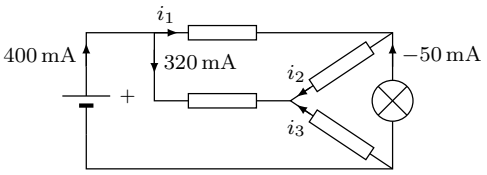
En utilisant la loi des nœuds, déterminer en fonction de i les courants suivants (on note i_{AB} le courant qui va de A vers B, etc) :

a) i_{AB} .....

b) i_{BC} .....

c) i_{CD} .....

Entraînement 3.4 — Loi des nœuds *bis*.



On considère le circuit électrique représenté ci-dessus.

À partir de la loi des nœuds, calculer l'intensité des courants sans utiliser la calculatrice.

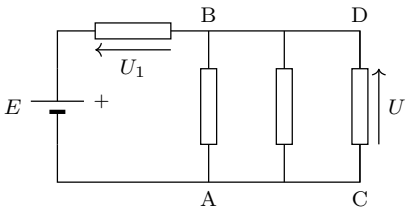
a) i_1 ..... b) i_2 ..... c) i_3 .....

Autour de la tension électrique

Entraînement 3.5 — Loi des mailles.

Un circuit électrique est formé d'une pile de f.é.m E et de quatre dipôles. Certaines tensions sont indiquées.

À partir de la loi des mailles, exprimer en fonction de E et U_1 les tensions suivantes :



a) U .....

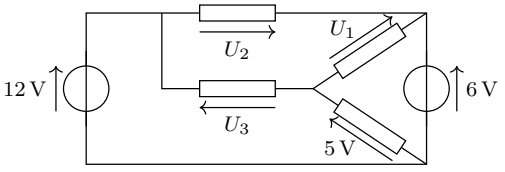
b) $U_{\text{AB}} = V(\text{A}) - V(\text{B})$ .....

c) U_{DA} .....

Entraînement 3.6 — Calculer une tension.

On considère le circuit électrique formé de deux sources idéales de tension et de quatre dipôles, comme représenté ci-contre.

À partir de la loi des mailles, calculer les tensions :



a) U_1 .....

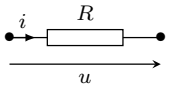
b) U_2 .....

c) U_3 .....

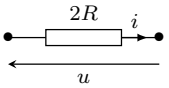
Loi d'Ohm

Entraînement 3.7 — Caractéristiques.

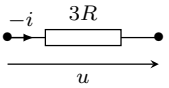
On considère les cas suivants :



Résistance 1



Résistance 2



Résistance 3

Dans chaque cas, exprimer i en fonction de u et R.

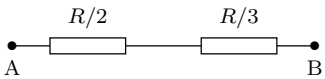
a) Résistance 1 .....

b) Résistance 2 .....

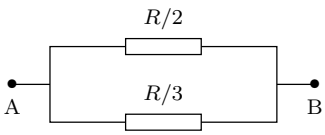
c) Résistance 3 .....

Entraînement 3.8 — Résistances associées.

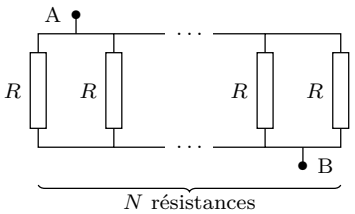
Exprimer la résistance équivalente des dipôles AB suivants :

a) 

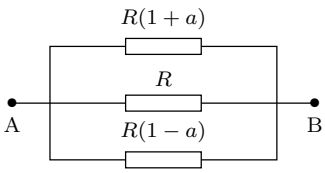
.....

b) 

.....

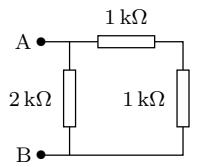
c) 

.....

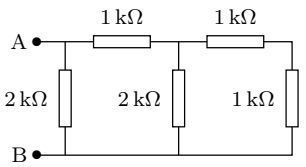
d) 

.....

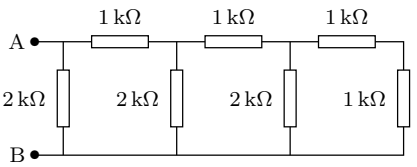
Entraînement 3.9 — Trois résistances équivalentes.



dipôle 1



dipôle 2



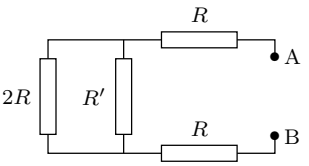
dipôle 3

Sans utiliser la calculatrice, calculer la résistance équivalente

a) du dipôle 1 ..... b) du dipôle 2 ..... c) du dipôle 3 .....

Entraînement 3.10 — Une autre résistance équivalente.

On considère le dipôle AB constitué uniquement de conducteurs ohmiques.



Exprimer la résistance équivalente du dipôle AB en fonction de R et R'. .....

Entraînement 3.11 — Quelle résistance choisir ?

La résistance équivalente d'un dipôle s'écrit

$$R_{\text{eq}} = \frac{4R(R+R')}{2R+R'}.$$

Déterminer la valeur de R' pour que

a) $R_{\text{eq}} = 3R$ ..... b) $R_{\text{eq}} = \frac{8}{3}R$ ..... c) $R_{\text{eq}} = 2R$ .....

Résoudre une équation électrique

Entraînement 3.12 — Une équation de maille.

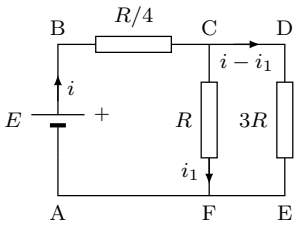
Dans un circuit, la loi des mailles se traduit par la relation $R_1 I + R_2(I_0 + I) = 2R_2 I_0$.

a) On suppose que $R_1 = 2R_2$. Exprimer I en fonction de I_0 .....

b) Exprimer I en fonction de R_1, R_2 et I_0 .....

Entraînement 3.13 — Circuit à 2 mailles.

On forme un circuit avec une pile et trois conducteurs ohmiques. On définit les courants algébriques i et i_1 comme indiqué ci-contre.



Exprimer E en fonction de i, i_1 et R en appliquant la loi des mailles dans la maille :

a) (ABCF) ....

b) (ABDE) ....

Entraînement 3.14

Dans l'entraînement précédent, les grandeurs i et i_1 vérifient le système $\begin{cases} Ri + 4Ri_1 = 4E \\ 13Ri - 12Ri_1 = 4E \end{cases}$

a) Déterminer i en fonction de E et R. .....

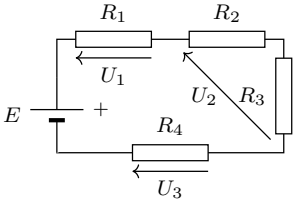
b) Déterminer i_1 en fonction de E et R. .....

Diviseurs

Entraînement 3.15 — Un diviseur de tension.

On forme un circuit avec une pile de f.é.m E et quatre conducteurs ohmiques. On définit les tensions U_1, U_2 et U_3 comme indiqué ci-contre.

Exprimer en fonction de E, R_1, R_2, R_3 et R_4, les tensions :

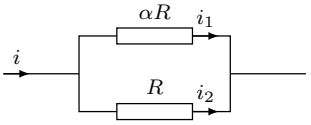


a) U_1 .....

b) U_2 .....

c) U_3 .....

Entraînement 3.16 — Un diviseur de courant.

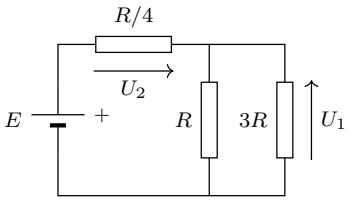


a) Pour quelle valeur de α, a-t-on $i_1 = i/3$? .....

b) Pour quelle valeur de α, a-t-on $i_2 = 3i_1$? .....

Entraînement 3.17 — Exercice de synthèse I.

On forme un circuit avec une pile et trois conducteurs ohmiques. On définit les tensions U_1 et U_2 comme indiqué ci-contre.

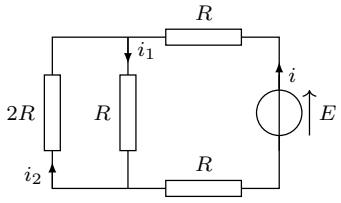


a) Calculer la résistance équivalente aux deux conducteurs ohmiques en parallèle. .....

b) À l'aide de la formule du diviseur de tension, exprimer U_1 en fonction de E et R. ...

c) Faire la même chose pour U_2. .....

Entraînement 3.18 — Exercice de synthèse II.



a) Après avoir simplifié le circuit, calculer i en fonction de E et R .....

b) En déduire i_1 à partir de la formule du diviseur de courant .....

c) En déduire i_2 .....

Réponses mélangées

$2i$	$\frac{R}{N}$	$R\left(\frac{1-a^2}{3-a^2}\right)$	$\frac{u}{2R}$	$-\frac{E}{8R}$	$1\,\text{k}\Omega$	$\frac{3E}{4R}$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{u}{3R}$	$-350\,\text{mA}$
$\frac{E}{R}$	$1\,\text{k}\Omega$	$U_1 - E$	$\frac{4R(R+R')}{2R+R'}$	$E - U_1$	$\frac{-ER_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}$	$\frac{R}{5}$	$1\,\text{k}\Omega$		
$\frac{E}{4R}$	$\frac{ER_1}{R_1+R_2+R_3+R_4}$	$\frac{1}{4}Ri + Ri_1$	$\frac{R_2}{R_1+R_2}I_0$	$7\,\text{V}$	$-\frac{u}{R}$	3	$30\,\text{mA}$		
$\frac{3E}{8R}$	0	$2{,}5\cdot 10^{17}$	$\frac{E(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3+R_4}$	$-\frac{E}{4}$	$2R$	$\frac{5}{6}R$	$-6\,\text{V}$	0	
$80\,\text{mA}$	$\frac{I_0}{3}$	i	(b)	$\frac{13}{4}Ri - 3Ri_1$	$\frac{3}{4}E$	$1\,\text{V}$	$E - U_1$	R	2

► Réponses et corrigés page 208

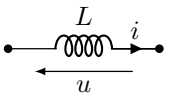
Étude des circuits électriques II

Prérequis
La fiche **Étude des circuits électriques I** et les équations différentielles.

Bobines

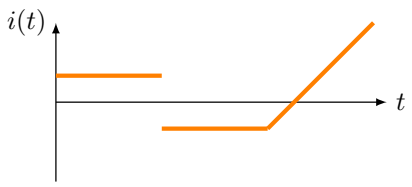
En convention récepteur, l'inductance L d'un bobine vérifie l'équation différentielle

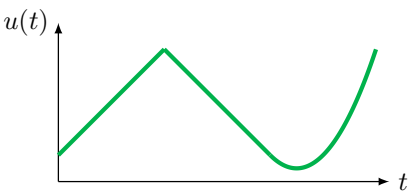
$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$



Entraînement 4.1 — Bobine ou pas ?

On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



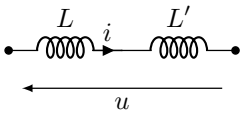


Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme une bobine ?

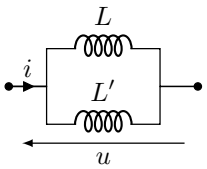
(a) oui (b) non

Entraînement 4.2 — Inductances équivalentes.

On considère deux bobines d'inductance L et L' regroupées dans les montages suivants :



montage (a)



montage (b)

a) Donner la relation entre u et i dans le montage (a) .....

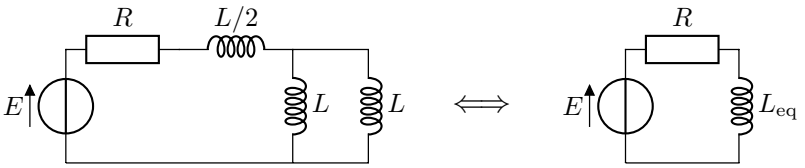
b) En déduire l'inductance équivalente du montage (a) .....

c) Donner la relation entre u et i dans le montage (b) .....

d) En déduire l'inductance équivalente du montage (b) .....

Entraînement 4.3 — Simplifions !

On souhaite remplacer les bobines par un dipôle équivalent.

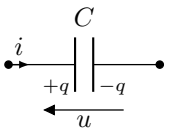


Déterminer L_{eq} .....

Condensateurs

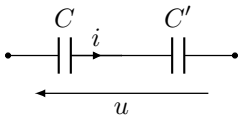
En convention récepteur, la capacité C d'un condensateur vérifie l'équation différentielle

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}.$$

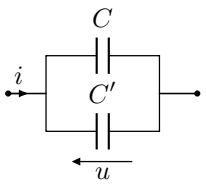


Entraînement 4.4 — Condensateurs équivalents.

On considère deux condensateurs de capacité C et C' regroupés dans les montages suivants :



montage (a)



montage (b)

a) Donner la relation entre u et i dans le montage (a) .....

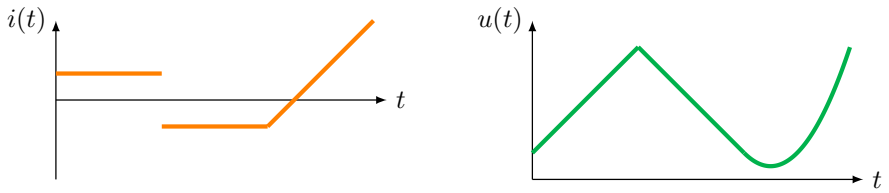
b) En déduire la capacité équivalente du montage (a) .....

c) Donner la relation entre u et i dans le montage (b) .....

d) En déduire la capacité équivalente du montage (b) .....

Entraînement 4.5 — Condensateur ou pas ?

On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



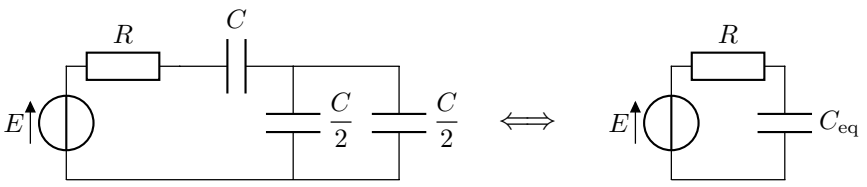
Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme un condensateur ?

(a) oui (b) non

.....

Entraînement 4.6 — Simplifions !

On considère le montage suivant, constitué de plusieurs condensateurs, d'un générateur et d'un conducteur ohmique. On souhaite remplacer les condensateurs par un dipôle équivalent.



Déterminer C_{eq} .....

Conditions initiales et régime stationnaire

On utilisera dans cette partie les notations suivantes pour une grandeur donnée x :

- $x(0^-) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} x(t)$
- $x(0^+) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} x(t)$
- $x(+\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$.

Entraînement 4.7 — Condensateurs et bobines en régime stationnaire.

En régime stationnaire, toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps.

a) Dans ce cas, un condensateur se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé (b) une source de tension (c) un interrupteur ouvert

.....

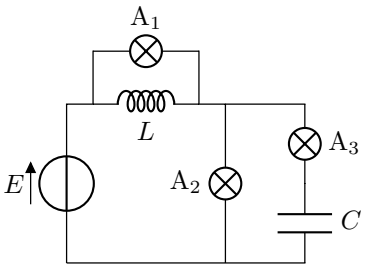
b) Quant à la bobine, elle se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé (b) une source de courant (c) un interrupteur ouvert

.....

Entraînement 4.8 — Éclairage en régime permanent.

On considère le circuit constitué de lampes (symbolisées par —⊗—) que l'on peut assimiler à des résistances qui brillent quand elles sont parcourues par un courant électrique.



Le régime permanent étant établi, la ou les ampoules qui brillent sont :

(a) l'ampoule A_1 (b) l'ampoule A_2 (c) l'ampoule A_3

.....

Entraînement 4.9 — Relations de continuité.

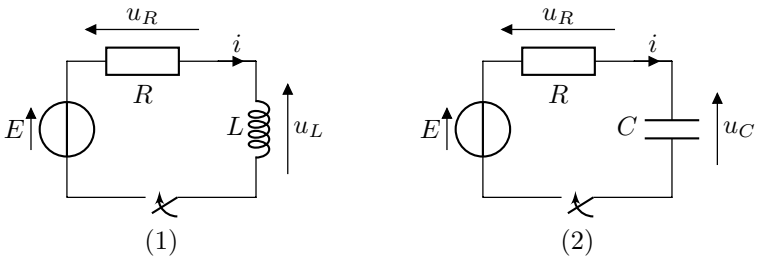
Dans ce QCM, plusieurs réponses sont possibles pour chaque question.

a) Aux bornes de quel(s) dipôle(s) la tension est-elle toujours continue ?

(a) une résistance
(b) une bobine
(c) un condensateur
(d) un interrupteur fermé

.....

On considère les deux circuits (1) et (2) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.
On suppose de plus que le condensateur est initialement déchargé.



b) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (1) ?

(a) i (b) u_L (c) u_R

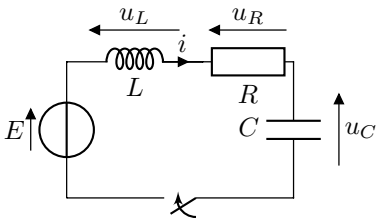
.....

c) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (2) ?

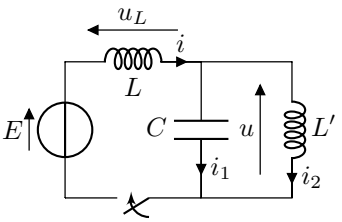
(a) i (b) u_C (c) u_R

.....

On considère à présent les deux circuits (3) et (4) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. On suppose de plus que les condensateurs sont initialement déchargés.



(3)



(4)

d) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (3) ?

ⓐ i ⓑ u_L ⓒ u_R ⓓ u_C .....

e) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (4) ?

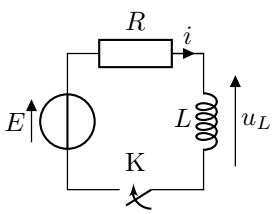
ⓐ i ⓑ i_1 ⓒ u ⓓ u_L .....

Entraînement 4.10 — Conditions initiales pour circuits du premier ordre.

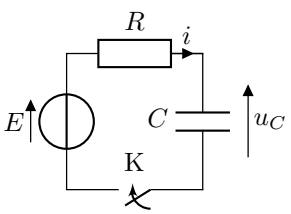
On considère trois circuits constitués de générateurs de tension de fém constante E, de conducteurs de résistance R ainsi que de condensateurs de capacité C et d'une bobine d'inductance L.

L'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$.

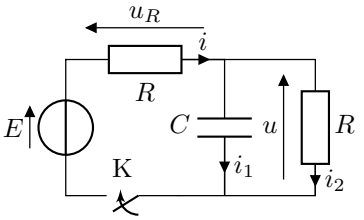
Tous les condensateurs sont initialement déchargés.



(1)



(2)



(3)

On considère dans un premier temps le circuit (1).

a) Exprimer $i(0^+)$ .....

b) Exprimer $u_L(0^+)$ .....

On considère à présent le circuit (2).

c) Exprimer $i(0^+)$ .....

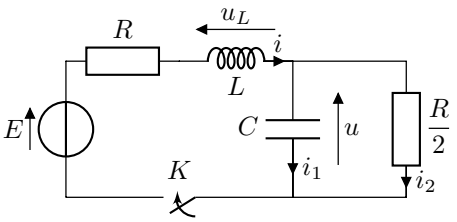
On considère finalement le circuit (3).

d) Exprimer $u_R(0^+)$ .....

e) En déduire $i_1(0^+)$ .....

Entraînement 4.11 — Circuit à deux mailles.

Le circuit suivant, constitué de deux mailles indépendantes, est alimenté par un générateur de tension de fém E constante.



Pour ce circuit, on considère de plus que :

- l'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$;
- le condensateur est initialement déchargé.

Exprimer :

a) $u(0^+)$ .....

b) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$ .....

c) $i(+\infty)$ .....

d) $u(+\infty)$ .....

Circuits du premier ordre

On dit qu'un circuit est *du premier ordre* quand il est régi par une équation différentielle qui se met sous la forme canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t) \qquad (*)$$

où τ est la constante de temps représentative de la durée du régime transitoire.

Quand l'équation différentielle est écrite comme dans $(*)$, on dit qu'elle est *sous forme canonique*.

Entraînement 4.12 — Constantes de temps.

On donne des exemples d'équations différentielles régissant des grandeurs électriques d'un circuit.

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la constante de temps τ.

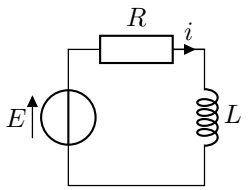
a) $L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = E - Ri(t)$ .....

b) $RC\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = E - 2u_C(t)$ .....

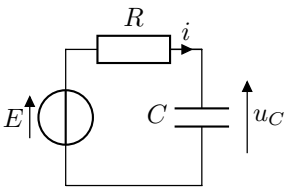
Entraînement 4.13 — Des mises en équations.

On cherche à obtenir l'équation différentielle qui régit le comportement d'une grandeur électrique dans chacun des circuits suivants.

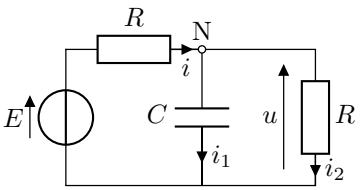
Cette équation devra être donnée sous forme canonique.



(1)



(2)



(3)

On considère le circuit (1).

a) À partir de la loi des mailles, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$

.....

On considère maintenant le circuit (2). Déterminer :

b) l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ .....

c) l'équation différentielle pour le courant $i(t)$ .....

On considère enfin le circuit (3) qui comporte deux mailles. En appliquant la loi des nœuds au point N, déterminer :

d) la relation entre le courant $i(t)$, la tension $u(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ ..

e) En déduire l'équation différentielle pour la tension $u(t)$ ...

Entraînement 4.14 — Allez, on s'entraîne !

N'oubliez pas d'exprimer une solution particulière avant d'appliquer les conditions initiales !

a) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u_C(t) = \dfrac{E}{\tau}$ avec $u_C(0) = 0$ .....

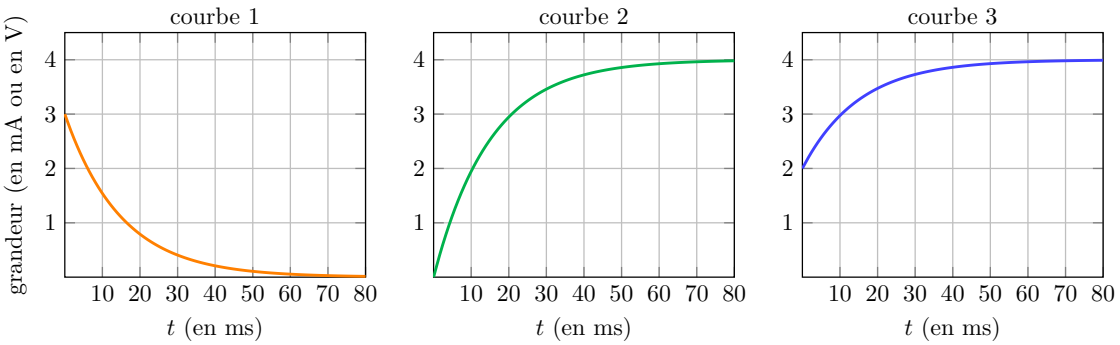
b) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}i(t) = 0$ avec $i(0) = \dfrac{E}{R}$ .....

c) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u(t) = \dfrac{E}{2\tau}$ avec $u(0) = \dfrac{E}{2}$ .....

Entraînement 4.15 — Analyse de courbes.

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois grandeurs au cours du temps :

- deux tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
- une intensité $i(t)$.



a) On a

$$u_1(t) = E_1\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

.....

b) On a

$$u_2(t) = E_2\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-t/\tau}}{2}\right).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

.....

c) On a

$$i(t) = \frac{E_1}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

.....

Déterminer les valeurs numériques de :

d) E_1 .....

e) E_2 .....

f) R .....

Circuits du second ordre

Entraînement 4.16 — Équation canonique.

De nombreux circuits du second-ordre sont en fait des oscillateurs dont l'équation canonique est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x(t) = f(t),$$

où ω_0 est appelée *pulsation propre* et Q *facteur de qualité*.

Donner la dimension de :

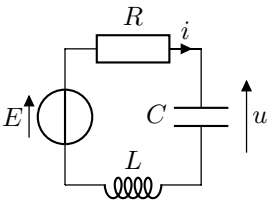
a) ω_0 ..... b) Q .....

On considère l'équation $RC\dfrac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i(t) = 0$. Exprimer :

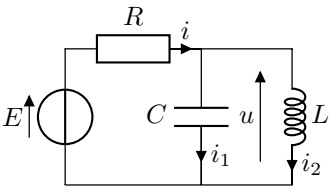
c) ω_0 ..... d) Q .....

Entraînement 4.17 — Mise en équation.

On considère les deux circuits suivants, pour lesquels les fém des générateurs de tension E sont constantes.



montage 1



montage 2

À l'aide de la loi des mailles et des nœuds, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u :

a) Dans le montage 1 .....

b) Dans le montage 2 .....

Entraînement 4.18 — Équations type « oscillateur harmonique ».

a) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,(u_C(t) - E) = 0$ avec $\begin{cases} u_C(0) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \end{cases}$.

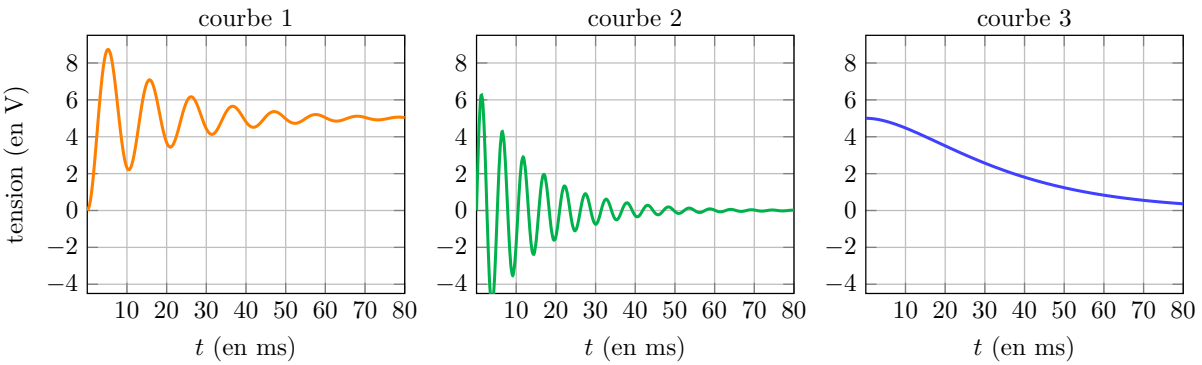
b) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\, i(t) = 0$ avec $\begin{cases} i(0) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) = \dfrac{E}{L} \end{cases}$ .....

Entraînement 4.19 — Réponses d'un circuit du second-ordre.

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$ au cours du temps.

Toutes ces grandeurs évoluent suivant une équation différentielle du type

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x(t) = \mathrm{C^{te}}.$$



a) Quelle courbe est associée au plus grand facteur de qualité Q ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

b) On a

$$u_1(t) = a\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - b\mathrm{e}^{-t/\tau_2}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

c) On a

$$u_2(t) = E\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

d) On a

$$u_3(t) = E\Big[1 - (\cos(\Omega' t) + a\sin(\Omega' t))\mathrm{e}^{-t/\tau'}\Big].$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

e) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-pulsation Ω qui intervient dans $u_2(t)$

Réponses mélangées

$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L'\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (b) Q est sans dimension $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = \dfrac{E}{LC}$

$\dfrac{CC'}{C+C'}$ 4 V (a), (c) et (d) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2}{RC}u = \dfrac{E}{RC}$ $1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

$R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ (a) $\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}i(t) = 0$ $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C'}\right)i$ (a) (c) et (d)

$[\omega_0] = T^{-1}$ $i = (C + C')\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (b) $\dfrac{L}{R}$ 1,3 kΩ $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u}{L} + \dfrac{u}{L'}$

$\dfrac{E}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ (c) 0 $\dfrac{1}{3}E$ (c) 0 (a) $\dfrac{RC}{2}$ 0 (b)

E (c) $i(t) = \dfrac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ $u_C(t) = \dfrac{1}{2}E$ $L + L'$ (a), (b) et (c) $\dfrac{2E}{3R}$

$\dfrac{C}{2}$ (b) $i = \dfrac{u}{R} + C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (a) et (c) $u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ $C + C'$

$\dfrac{E}{R}$ (b) $\dfrac{LL'}{L+L'}$ $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = 0$ $\dfrac{E}{R}$ E

$E \times (1 - \cos(\omega_0 t))$ $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$ (b) $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}u_C = \dfrac{1}{RC}E$ (a) 4 V L

▶ Réponses et corrigés page 213

Étude des filtres

Prérequis
Trigonométrie. Nombres complexes. Association de dipôles. Signaux périodiques. Spectres de Fourier.

Nombres complexes et association de dipôles

Entraînement 5.1 — Un entraînement fondamental.

Un nombre complexe peut se mettre sous les formes suivantes :

- $\underline{Z} = a + \mathrm{j}b$ avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire ;
- $\underline{Z} = Z_0 \exp(\mathrm{j}\varphi) = Z_0\big(\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)\big)$ avec $Z_0 \geqslant 0$ son module et $\varphi \in \mathbb{R}$ un argument.

a) Exprimer Z_0 en fonction de a et b. .....

b) On suppose $a \neq 0$. Exprimer $\tan(\varphi)$ en fonction de a et b. .....

On suppose que $\varphi \in]-\pi, \pi]$.

c) Si $a \geqslant 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$ (c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$ (e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$
(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$ (d) $\varphi \in]-\pi, 0]$ (f) $\varphi \in]-\pi/2, 0]$

.....

d) Si $a > 0$ et $b \leqslant 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$ (c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$ (e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$
(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$ (d) $\varphi \in]-\pi, 0]$ (f) $\varphi \in]-\pi/2, 0]$

.....

Entraînement 5.2 — Impédances complexes des composants de base.

Les impédances complexes d'un résistor de résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C auxquels on impose une pulsation ω sont respectivement :

$$\underline{Z}_R = R, \qquad \underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega \qquad \text{et} \qquad \underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}.$$

Calculer le module Z_0 et l'argument $\varphi \in]-\pi, \pi]$ de chacune de ces impédances.

a) Z_0 de $\underline{Z}_R$. ... c) Z_0 de $\underline{Z}_L$. ... e) Z_0 de $\underline{Z}_C$. ...

b) φ de $\underline{Z}_R$. .... d) φ de $\underline{Z}_L$. .... f) φ de $\underline{Z}_C$. ....

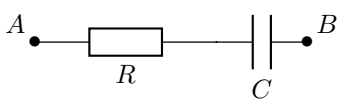
Entraînement 5.3 — Associations de dipôles.

On rappelle la règle pour déterminer l'impédance complexe équivalente à celle de dipôles associés :

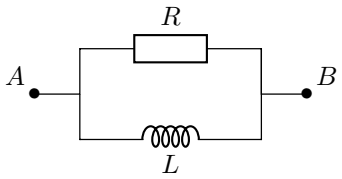
- ► si les dipôles sont en série : $\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_i \underline{Z}_i$
- ► si les dipôles sont en parallèle : $\underline{Z}_{\text{eq}} = \dfrac{1}{\sum_i 1/\underline{Z}_i}$.

À l'aide de ces règles, déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}_{\text{AB}}$ des associations de dipôles suivants :

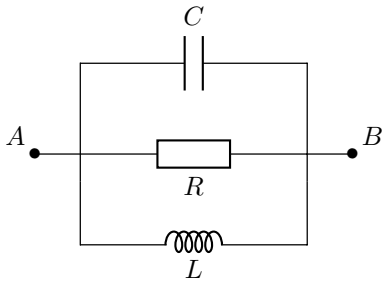
a)



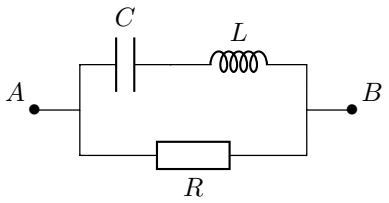
b)



c)



d)



a) $\underline{Z}_{\text{AB}} =$ .....

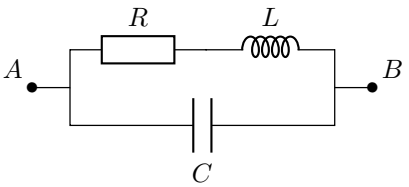
b) $\underline{Z}_{\text{AB}} =$ .....

c) $\underline{Z}_{\text{AB}} =$ .....

d) $\underline{Z}_{\text{AB}} =$ .....

Entraînement 5.4 — À la recherche de la bonne impédance.

Un groupe d'étudiants doit trouver l'impédance $\underline{Z}_{\text{AB}}$ du dipôle AB ci-dessous :



Quelle proposition correspond à l'impédance du dipôle AB ?

(a) $\underline{Z}_{\text{AB}} = \dfrac{R + \text{j}L\omega}{1 - LC\omega^2 + \text{j}RC\omega}$ (b) $\underline{Z}_{\text{AB}} = \dfrac{R + \text{j}L\omega}{1 + LC\omega^2 + \text{j}RC\omega}$ (c) $\underline{Z}_{\text{AB}} = \dfrac{R + \text{j}L\omega}{1 + LC\omega^2 - \text{j}RC\omega}$

.....

Signaux périodiques

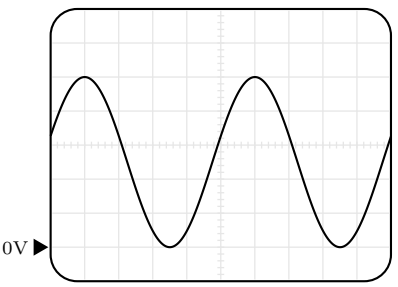
Entraînement 5.5 — Analyse du signal provenant d'un GBF.

En TP, un élève observe à l'oscilloscope la tension délivrée par un générateur de basses fréquences (GBF).

Aider cet élève à analyser le signal de tension mesuré ci-contre en déterminant sa fréquence f_0 et son amplitude U_0.

a) f_0 .....

b) U_0 .....



base de temps : 20 µs/division
calibre vertical : 1 V/division

Entraînement 5.6 — Expression d'une tension.

Nous disposons d'une tension sinusoïdale $u(t)$ de période $T_0 = 1\,\text{ms}$, d'amplitude $U_0 = 2\,\text{V}$ et de phase à l'origine $\varphi = 0\,\text{rad}$.

Parmi les propositions ci-dessous laquelle correspond à l'expression littérale de cette tension $u(t)$?

(a) $u(t) = U_0 \cos\left(\dfrac{t}{T_0}\right)$

(b) $u(t) = \dfrac{U_0}{2} \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0} t\right)$

(c) $u(t) = \dfrac{U_0}{2} \cos\left(\dfrac{t}{T_0}\right)$

(d) $u(t) = U_0 \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0} t\right)$

.....

Entraînement 5.7 — Modulation d'amplitude.

On considère un signal modulé, de la forme

$$s(t) = S_0 \cos\left(2\pi f_p t\right) \times \Big(1 + m\cos(2\pi f_0 t)\Big) \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 < m < 1 \\ f_p > f_0. \end{cases}$$

a) On rappelle que

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b). \end{cases}$$

En calculant $\cos(a+b) + \cos(a-b)$, trouver une formule pour $\cos(a)\cos(b)$.

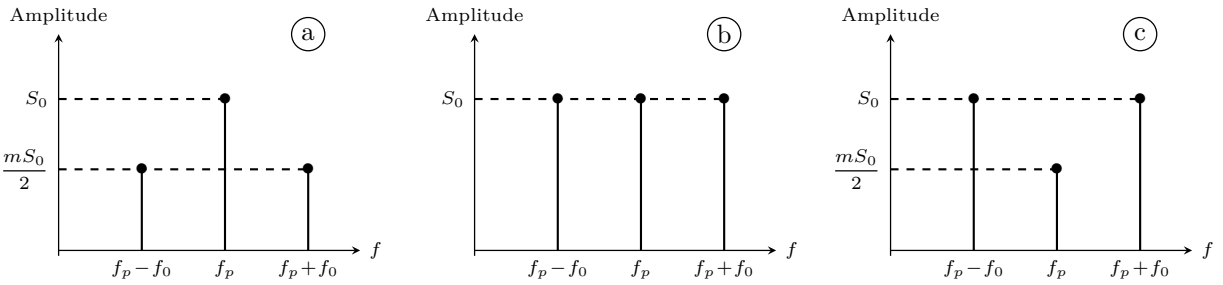
.....

b) Développer $s(t)$ et faire apparaître des sommes de cosinus.

.....

On constate que le signal $s(t)$ peut s'écrire comme la somme de trois signaux sinusoïdaux d'amplitudes et de fréquences spécifiques. On représente les différentes amplitudes des composantes de $s(t)$ en fonction de leur fréquence. Cette représentation est appelée spectre en amplitude de $s(t)$.

Le but de cet entraînement est de déterminer lequel des spectres ci-dessous (ⓐ, ⓑ ou ⓒ) est celui du signal $s(t)$.



c) Donner l'amplitude de la composante de fréquence f_p de $s(t)$ .....

d) Donner l'amplitude de la composante de fréquence $f_p + f_0$ de $s(t)$ ..

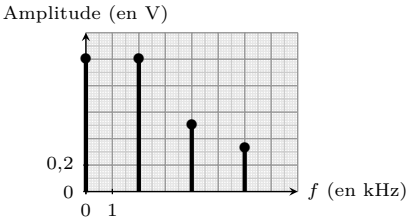
e) Donner l'amplitude de la composante de fréquence $f_p - f_0$ de $s(t)$ ..

f) Déterminer le spectre (ⓐ, ⓑ ou ⓒ) correspondant à $s(t)$ .....

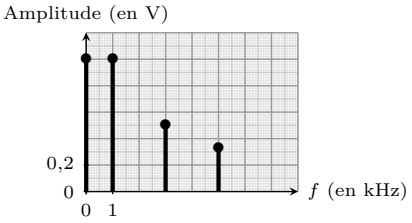
Entraînement 5.8 — Pêle-mêle.

Un étudiant dispose de quatre spectres en amplitude et de quatre signaux. Malheureusement, l'ensemble est mélangé. Pouvez-vous l'aider à associer le bon signal au bon spectre (ⓐ, ⓑ, ⓒ ou ⓓ) ?

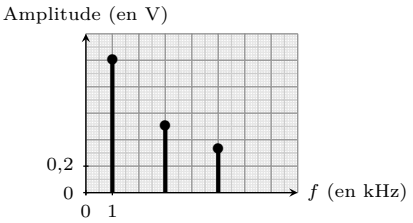
Spectre ⓐ



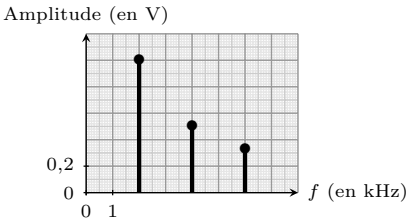
Spectre ⓑ



Spectre ⓒ



Spectre ⓓ



Signal n° 1

$$A_1\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{3}\cos(5\omega_0 t)\right)$$

avec $A_1 = 1$ V et $f_0 = 1$ kHz

Signal n° 2

$$A_2\left(1 + \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)\right)$$

avec $A_2 = 1$ V et $f_0 = 2$ kHz

Signal n° 3

$$A_3\Big(\cos((\omega_0 - \omega_1)t) + \frac{1}{2}\cos((\omega_0 + \omega_1)t) + \frac{1}{3}\cos((\omega_0 + 3\omega_1)t)\Big)$$

avec $A_3 = 1$ V, $f_0 = 3$ kHz et $f_1 = 1$ kHz

Signal n° 4

$$A_4\left(1 + \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(5\omega_0 t)\right)$$

avec $A_4 = 1$ V et $f_0 = 1$ kHz

a) Spectre du signal n° 1 ..... ☐

b) Spectre du signal n° 2 ..... ☐

c) Spectre du signal n° 3 ..... ☐

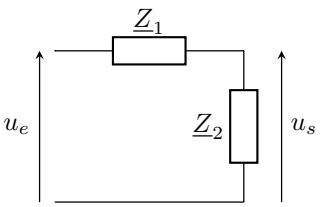
d) Spectre du signal n° 4 ..... ☐

Fonctions de transfert

Entraînement 5.9 — Filtre passe-bande.

Nous disposons du filtre ci-contre, constitué de deux dipôles dont les impédances complexes sont :

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega} \quad \text{avec} \quad C = 47\,\text{nF} \text{ et } R = 1\,\text{k}\Omega.$$



Nous souhaitons écrire la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$ sous sa forme canonique :

$$\underline{H}(\mathrm{j}x) = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

a) À l'aide d'un pont diviseur de tension, exprimer $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$ .....

b) Identifier H_0 .....

c) Identifier Q .....

d) Identifier et calculer ω_0 .

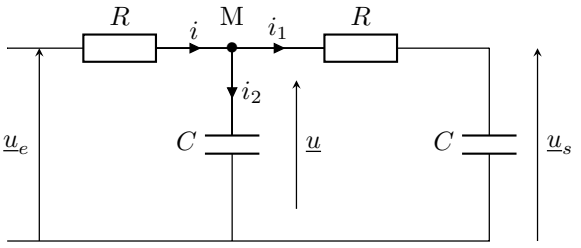
Entraînement 5.10 — Filtre du second ordre.

Nous disposons d'un filtre passe-bas de fonction de transfert :

$$\underline{H}(\mathrm{j}x) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{H_0}{1+\frac{\mathrm{j}x}{Q}-x^2}$$

avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. On a $C = 10\,\mu\text{F}$ et $R = 220\,\Omega$.

Un étudiant obtient les trois égalités suivantes :



$$R\underline{i} = \underline{u}_e - \underline{u}, \qquad R\underline{i}_1 = \underline{u} - \underline{u}_s \qquad \text{et} \qquad R\underline{i}_2 = \mathrm{j}RC\omega\underline{u}.$$

a) À l'aide de la loi des noeuds, exprimer $\underline{i}$ en fonction de $\underline{i}_1$ et $\underline{i}_2$. .....

b) Utiliser la réponse précédente et les trois égalités fournies pour exprimer $\underline{u}_e$ en fonction de $\underline{u}$ et $\underline{u}_s$.

.....

L'étudiant montre grâce à un pont diviseur de tension que $\underline{u} = (1+\mathrm{j}RC\omega)\underline{u}_s$.

c) En déduire la fonction de transfert simplifiée $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$. .....

En comparant la réponse précédente à la forme canonique de $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$ donnée, identifier

d) H_0 ..... e) ω_0 ..... f) Q .....

De la fonction de transfert au diagramme de Bode

Entraînement 5.11 — Calcul de gain en décibel.

On considère les fonctions de transfert suivantes : $\underline{H}_1 = 3{,}0$ et $\underline{H}_2 = \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_3 = 1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_1}$.

Le gain en décibel G_{dB} d'un filtre se détermine à partir de la relation :

$$G_{\text{dB}} = 20\log\left(|\underline{H}|\right).$$

Déterminer le gain en décibel associé aux différentes fonctions de transfert ou combinaisons de fonctions de transfert ci-dessous.

a) $\underline{H}_1$ ..... d) $\underline{H}_1 - \underline{H}_2$ ....

b) $\underline{H}_2$ ..... e) $\dfrac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}$ .....

c) $\underline{H}_3$ ..... f) $\underline{H}_2 \times \underline{H}_3$ ....

Entraînement 5.12 — Calcul de phase.

On reprend les mêmes fonctions de transfert que précédemment : $\underline{H}_1 = 3{,}0$ et $\underline{H}_2 = \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_3 = 1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_1}$.

Le déphase φ introduit par un filtre entre les signaux d'entrée et de sortie se détermine à partir de la relation :

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arctan\left(\frac{\mathsf{Im}(\underline{H})}{\mathsf{Re}(\underline{H})}\right).$$

Déterminer le déphasage associé aux différentes fonctions de transfert ou combinaisons de fonctions de transfert ci-dessous.

a) $\underline{H}_1$ ..... d) $\underline{H}_1 - \underline{H}_2$ ....

b) $\underline{H}_2$ ..... e) $\dfrac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}$ .....

c) $\underline{H}_3$ ..... f) $\underline{H}_2 \times \underline{H}_3$ ....

Entraînement 5.13 — Diagramme de Bode en phase.

On utilise un filtre passe-haut de fonction de transfert $\underline{H}(\mathrm{j}x) = \dfrac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}$ avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

Déterminer la valeur du déphasage $\varphi(x) = \arg\left(\underline{H}(\mathrm{j}x)\right)$ du filtre pour des signaux tels que :

a) $\omega = \omega_0$ (la pulsation propre du filtre) .....

b) $\omega \gg \omega_0$ (en hautes fréquences) .....

c) $\omega \ll \omega_0$ (en basses fréquences) .....

Entraînement 5.14 — Calcul de gain.

Pour les fonctions de transfert suivantes, évaluer le gain $G(x) = \left|\underline{H}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x = 1$.

a) $\underline{H}(\mathrm{j}x) = \dfrac{1 - \mathrm{j}x}{1 + \mathrm{j}x}$ .....

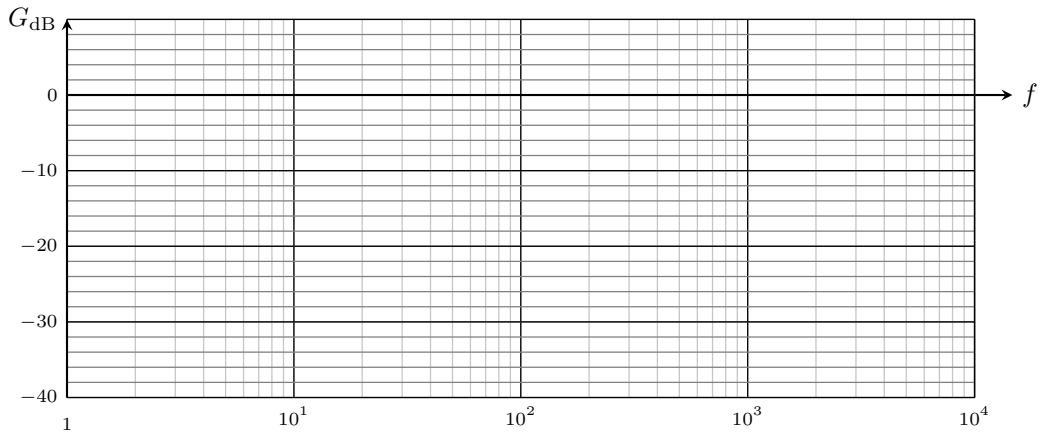
b) $\underline{H}(\mathrm{j}x) = -\dfrac{\mathrm{j}x}{1 + \mathrm{j}x}$ .....

c) $\underline{H}(\mathrm{j}x) = \dfrac{1}{1 + 2\mathrm{j}mx + (\mathrm{j}x)^2}$ avec $m = 2$ .....

Entraînement 5.15 — Tracé sur papier semi-logarithmique.

Un élève souhaite étudier le comportement d'un filtre passe-haut en basses fréquences. Pour cela, il relève les amplitudes des tensions d'entrée et de sortie pour différentes fréquences bien inférieures à la fréquence de coupure du filtre.

Fréquence (en Hz)	200	700	2 000
Amplitude du signal d'entrée ($U_{\text{entrée}}$ en V)	1	1	1
Amplitude du signal de sortie (U_{sortie} en V)	0,04	0,14	0,40



Le gain en décibel est donnée par la relation $G_{\text{dB}} = 20\log\left(\dfrac{U_{\text{sortie}}}{U_{\text{entrée}}}\right)$.

Calculer le gain en décibel pour chacune des fréquences et placer le point correspondant sur le graphe ci-dessus.

a) Point A : $f = 200\,\text{Hz}$. .....

b) Point B : $f = 700\,\text{Hz}$. .....

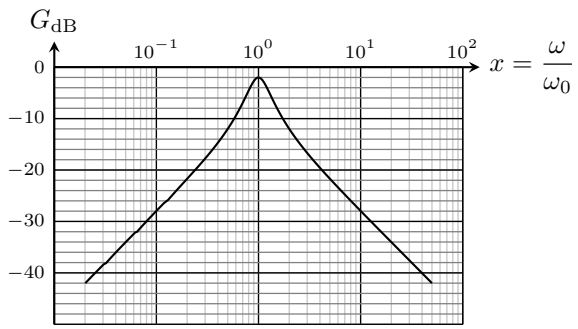
c) Point C : $f = 2\,000\,\text{Hz}$. .....

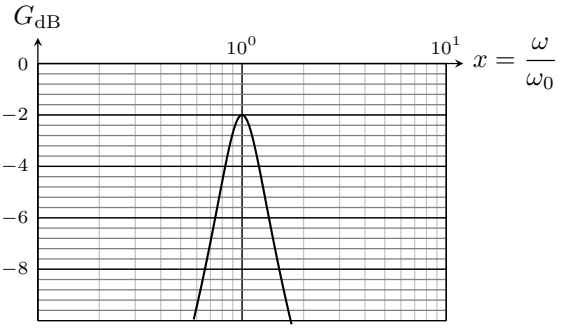
d) Déterminer la pente de la droite passant les points A, B et C. .....

Entraînement 5.16 — Bande passante et facteur de qualité d'un filtre.

On dispose d'un filtre passe-bande de fréquence propre $f_0 = 15\,\text{kHz}$, dont les deux fréquences de coupure à $-3\,\text{dB}$ sont f_{c1} et f_{c2} (avec $f_{c1} < f_{c2}$), et dont la fréquence de résonance est f_r.

Le diagramme de Bode en gain du filtre en fonction de $x = f/f_0$ et un agrandissement sont fournis.





À partir des graphiques donnés ci-dessus, déterminer les différentes grandeurs caractéristiques du filtre.

a) f_r ..... b) f_{c1} ..... c) f_{c2} .....

Réponses mélangées

$-28{,}0\,\text{dB}$ $\quad 10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$ $\quad$ (f) $\quad +20\,\text{dB/décade}$ $\quad 1/\sqrt{2}$ $\quad 1$

$20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)+10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$ $\quad \pi/2$ $\quad R+\frac{1}{\text{j}C\omega}$ $\quad$ (d) $\quad$ (a) $\quad$ (c) $\quad 11{,}7\,\text{kHz}$

$S_0\cos(2\pi f_p t)$

$\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$ $\quad -8{,}0\,\text{dB}$ $\quad +\frac{mS_0}{2}\Big(\cos(2\pi(f_p+f_0)t)+\cos(2\pi(f_p-f_0)t)\Big)$ $\quad 19{,}2\,\text{kHz}$

$\pi/2$ $\quad mS_0/2$ $\quad -\pi/2$ $\quad \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$ $\quad$ (a) $\quad$ (e) $\quad \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3\text{j}RC\omega}+\frac{\text{j}RC\omega}{3}}$

R $\quad \frac{R\text{j}L\omega}{R+\text{j}L\omega}$ $\quad 2{,}1\times10^4\,\text{rad/s}$ $\quad S_0$ $\quad 9{,}5\,\text{dB}$ $\quad 1/3$ $\quad 1$ $\quad -17{,}1\,\text{dB}$ $\quad L\omega$

(b) $\quad \frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$ $\quad 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)-10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$ $\quad \underline{u}(2+\text{j}RC\omega)-\underline{u}_s$

$\underline{i}_1+\underline{i}_2$ $\quad 1/3$ $\quad \frac{1}{C\omega}$ $\quad$ (a) $\quad \pi/4$ $\quad \frac{R\text{j}L\omega}{R+\text{j}L\omega-RLC\omega^2}$ $\quad 0$ $\quad 1/3$

$15{,}0\,\text{kHz}$ $\quad 1/4$ $\quad \frac{R(1-LC\omega^2)}{1-LC\omega^2+\text{j}RC\omega}$ $\quad \frac{1}{1+3\text{j}RC\omega-(RC\omega)^2}$ $\quad$ (d)

$\frac{1}{RC}$ $\quad 10\,\text{kHz}$ $\quad 2{,}5\,\text{V}$ $\quad \frac{\pi}{2}$ $\quad 0$ $\quad \frac{1}{2}\cos(a+b)+\frac{1}{2}\cos(a-b)$ $\quad \sqrt{a^2+b^2}$

$20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ $\quad mS_0/2$ $\quad 10\log\left(9+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$ $\quad 0$ $\quad -\arctan\left(\frac{\omega}{3\omega_0}\right)$ $\quad b/a$

► Réponses et corrigés page 220

Énergie et puissance électriques

Prérequis
Puissance électrique. Relation puissance-énergie. Expressions des énergies stockées dans une bobine et dans un condensateur. Effet Joule.

Pour commencer

Entraînement 6.1 — Puissance et énergie.

Le chargeur d'un téléphone portable consomme une puissance de 5 W. La charge complète de la batterie (à partir d'une batterie vide) prend 55 min.

Calculer l'énergie E contenue dans la batterie :

a) en joules .....

b) en watt-heures (W · h) .....

Entraînement 6.2 — Voiture de série contre Formule 1.

Les voitures de courses « Formule 1 » sont des véhicules hybrides : elles possèdent à la fois un moteur thermique et un moteur électrique. On souhaite comparer le moteur électrique d'une Formule 1 à celui d'une simple voiture de série.

On donne les informations suivantes :

	Hyundai Ioniq 6	**Formule 1**
Capacité batterie	77,4 kW · h	4 MJ
Puissance moteur	239 kW	160 cv
Consommation moyenne	15,1 kWh/100km	

On indique que 1 cv = 0,735 kW.

a) Calculer l'autonomie en km de la batterie de la Hyundai Ioniq 6 .....

b) Quel véhicule possède la batterie de plus grande capacité ? .....

c) Quel véhicule possède le moteur électrique le plus puissant ? .....

Entraînement 6.3 — Identifications de courbes.

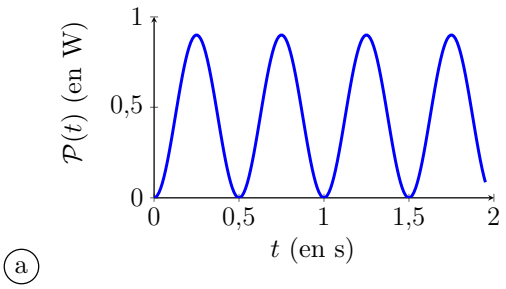
Une tension $u(t)$ est appliquée aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance $R = 10\,\Omega$.

Identifier parmi les courbes proposées celle correspondant à la puissance

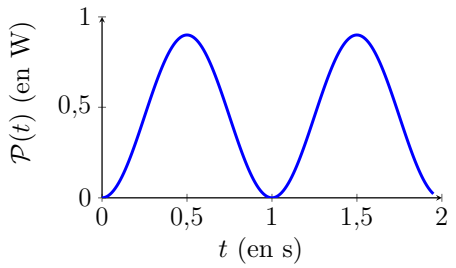
$$\mathcal{P}(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$

dissipée par effet Joule dans la résistance.

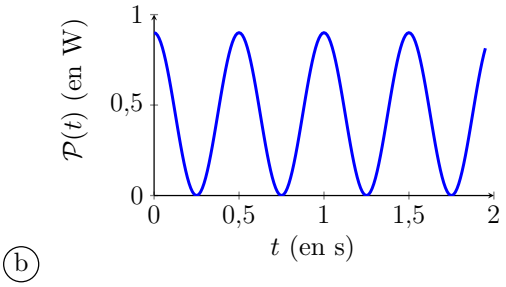
a) Pour $u(t) = 3\sin(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi$ rad $\cdot$ s^{-1}.



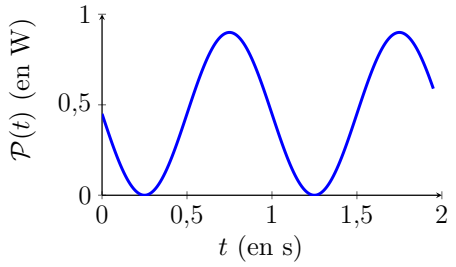
(a)



(c)



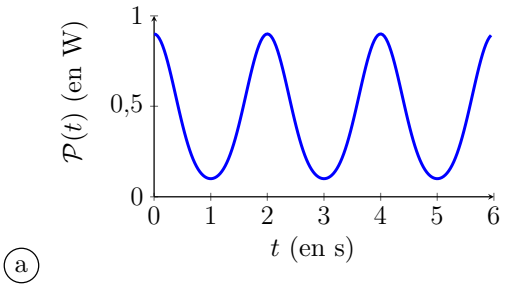
(b)



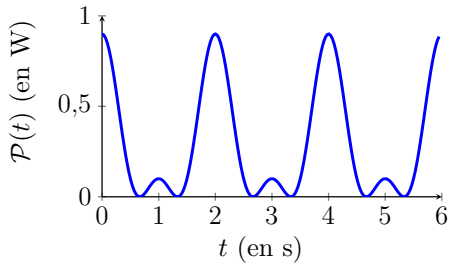
(d)

.....

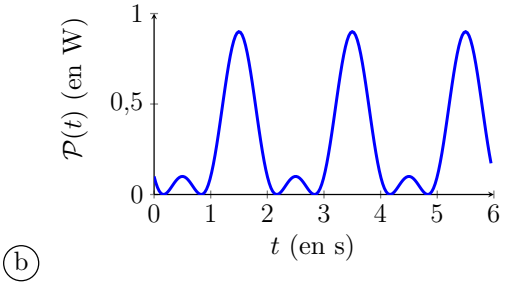
b) Pour $u(t) = 1 + 2\cos(\omega t)$ avec $\omega = \pi$ rad $\cdot$ s^{-1}.



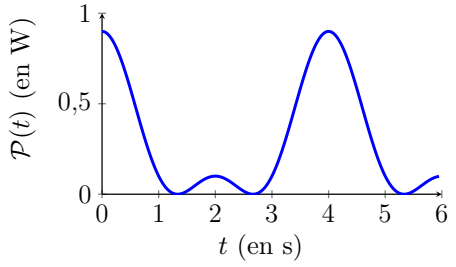
(a)



(c)



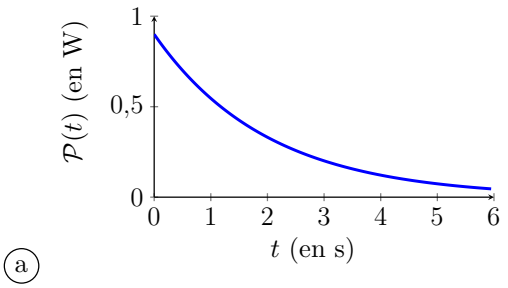
(b)



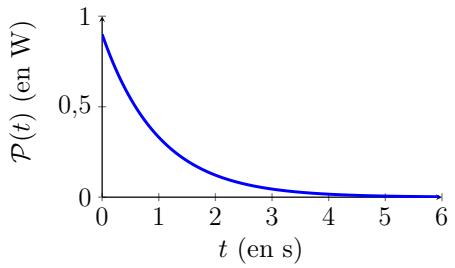
(d)

.....

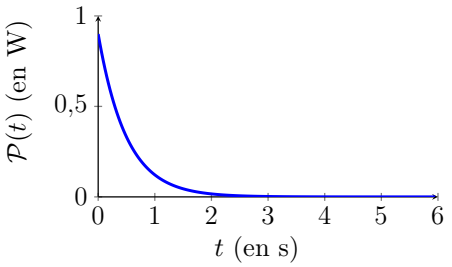
c) Pour $u(t) = 3\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = 2\,\text{s}$.



(a)



(c)



(b)

.....

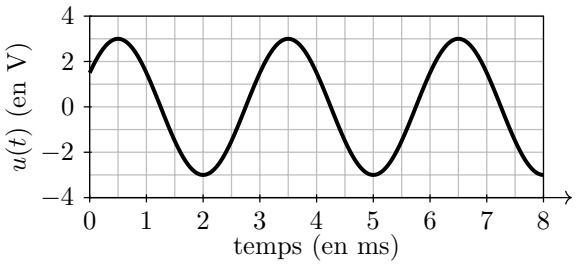
Entraînement 6.4 — Un calcul graphique.

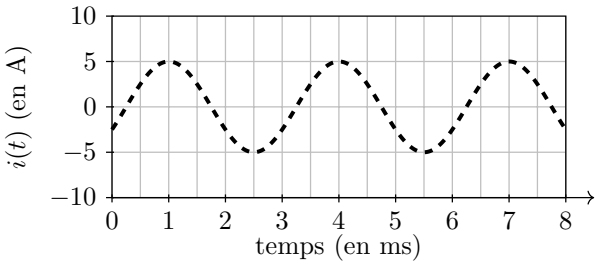
Pour un dipôle soumis à un signal alternatif harmonique, la puissance moyenne vaut :

$$\mathcal{P}_{moy} = \frac{U_0 I_0}{2}\cos(\varphi)$$

où U_0 et I_0 sont respectivement l'amplitude de la tension et du courant et où φ représente la valeur du déphasage angulaire entre la tension et l'intensité du courant.

La figure ci-dessous donne les représentations graphiques de la tension $u(t)$ et de l'intensité $i(t)$ en convention récepteur.





Déterminer la puissance moyenne reçue par ce dipôle .....

Entraînement 6.5 — Des calculs de puissance.

On souhaite calculer la puissance reçue par un dipôle. Quand celui-ci est alimenté par une tension $u(t)$ et parcouru par un courant $i(t)$, la puissance moyenne reçue est donnée par la formule :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) \times i(t)\,\mathrm{d}t$$

où T est la période du signal.

Dans un premier temps, on considère les signaux $u(t) = u_0\cos(\omega t + \psi)$ et $i(t) = i_0\cos(\omega t + \psi)$.

a) Combien vaut la période T pour ces signaux ? .....

b) Calculer $\mathcal{P}_{\text{moy}}$ pour ces signaux.
On pourra utiliser la formule $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ .....

Maintenant, on considère les signaux $u(t) = u_0\cos(\omega t)$ et $i(t) = i_0\cos(\omega t + \varphi)$.

c) Calculer $\mathcal{P}_{\text{moy}}$ pour ces signaux.
On pourra utiliser la formule $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$ .....

Enfin, on considère les signaux $u(t) = u_0 \times \big(1 + \cos(\omega t)\big)$ et $i(t) = i_0 \times \big(2 + \sin(\omega t + \psi)\big)$.

d) Calculer $\mathcal{P}_{\text{moy}}$ pour ces signaux. .....

Entraînement 6.6 — Calcul de puissance en RSF.

En régime sinusoïdal forcé, un générateur idéal de tension $\underline{u}$ alimente un dipôle inconnu en délivrant un courant $\underline{i}$. Dans ce cas, la puissance moyenne peut être calculée à l'aide de la formule

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\underline{u}\cdot\underline{i}^{\star}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\underline{u}^{\star}\cdot\underline{i})$$

où $\underline{x}^{\star}$ est le complexe conjugué de $\underline{x}$.

Exprimer la puissance moyenne reçue par le dipôle quand :

a) $\underline{u} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ et $\underline{i} = jC\omega\underline{u}$ .....

b) $\underline{i} = I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t+\varphi}$ et $\underline{u} = jL\omega\underline{i}$ .....

c) $\underline{u} = \sqrt{2}(1-j)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ et $\underline{i} = 3\left(\dfrac{1}{2} + j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ .....

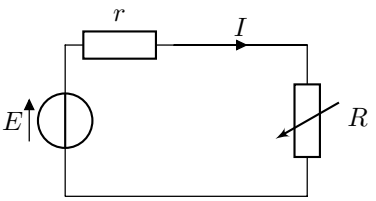
d) $\underline{u} = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\pi/4)}$ et $\underline{i} = (3+5j)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ .....

Régime permanent

Entraînement 6.7 — Puissance consommée.

Soit un générateur réel de fém E constante et de résistance interne r.

On branche à ses bornes un conducteur ohmique de résistance variable R.



a) Déterminer l'intensité du courant qui circule dans le circuit .....

b) Déterminer la puissance $\mathcal{P}$ dissipée dans le conducteur ohmique en fonction de E, r et R.

.....

Entraînement 6.8 — Optimisation de puissance échangée.

Dans un certain circuit, la puissance dissipée dans un conducteur ohmique de résistance R vaut

$$\mathcal{P} = E^2 \frac{R}{(r+R)^2},$$

où r est un paramètre.

On souhaite déterminer quelle valeur de R permet d'optimiser la puissance reçue par la résistance R étant données les caractéristiques de la source

a) Calculer $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}R}$ .....

b) Trouver la valeur $R_{\max}$ pour laquelle $\mathcal{P}(R)$ est maximale

(a) $R_{\max} = R$ (c) $R_{\max} = R + r$ (e) $R_{\max} = \dfrac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R}}$ (f) $R_{\max} = R \times \mathrm{e}^{r/R}$

(b) $R_{\max} = r$ (d) $R_{\max} = \dfrac{R^2}{r+R}$

.....

Entraînement 6.9 — Un peu de calcul algébrique.

On considère une résistance R définie par

$$R = R_0 \times \mathrm{e}^{r/R_0}.$$

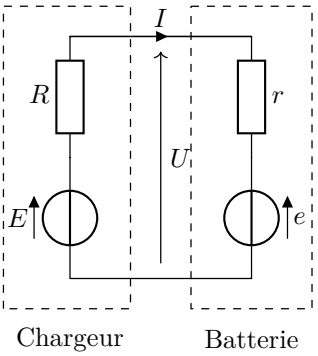
Déterminer, en fonction de R_0, la valeur du paramètre r pour que $R = 2R_0$.

.....

Entraînement 6.10 — Charge d'une batterie.

Une batterie de voiture est déchargée. Pour recharger cette batterie, de fém $e = 12\,\text{V}$ et de résistance interne $r = 0{,}2\,\Omega$, on la branche sur un chargeur de fém $E = 13\,\text{V}$ et de résistance interne $R = 0{,}3\,\Omega$.

On a alors le circuit suivant :



On lit sur la batterie qu'elle a une capacité de $50\,\text{A}\cdot\text{h}$ (ampères-heures).

a) Exprimer le courant I circulant dans la batterie en fonction de E, e, R et r.

.....

b) Exprimer la tension U aux bornes de la batterie lors de la charge en fonction de E, e, R et r.

.....

c) Exprimer la puissance délivrée par la source de fém E en fonction de E, e, R et r.

.....

d) Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans le circuit en fonction de E, e, R et r.

.....

e) Exprimer la puissance reçue par la batterie en fonction de E, e, R et r.

.....

Le rendement η de la charge est égal au rapport de la puissance reçue par la batterie par la puissance fournie par la source E.

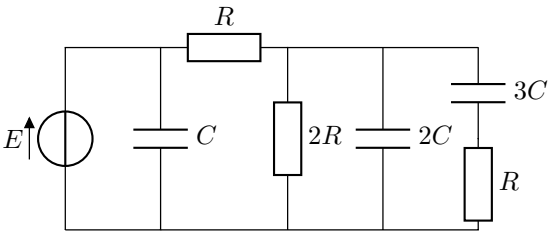
f) Déterminer l'expression du rendement η en fonction de E et e.

.....

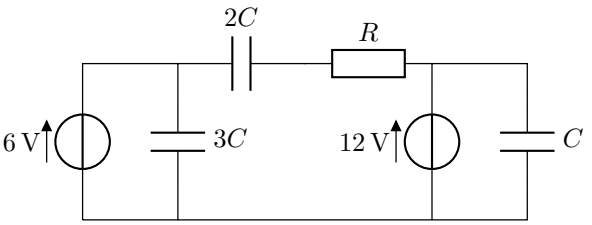
g) Calculer la valeur numérique du rendement η .....

Entraînement 6.11 — Énergie d'un condensateur en régime permanent.

En régime permanent, l'énergie stockée dans un condensateur de capacité C est $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu^2$, où u est la tension à ses bornes.



Circuit n° 1



Circuit n° 2

a) On considère que le régime permanent est établi dans le circuit n° 1.

Dans quel condensateur l'énergie stockée est-elle la plus importante ?

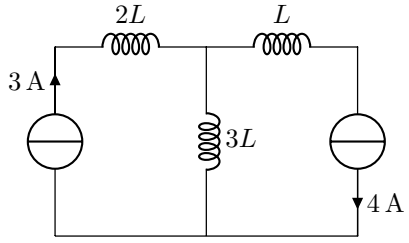
(a) C (b) $2C$ (c) $3C$

b) Même question pour le circuit n° 2.

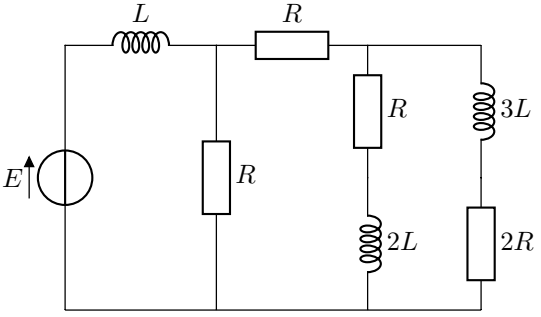
(a) C (b) $2C$ (c) $3C$

Entraînement 6.12 — Énergie d'une bobine en régime permanent.

En régime permanent, l'énergie stockée dans une bobine d'inductance L est $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2$ où i est le courant qui la traverse.



Circuit n° 3



Circuit n° 4

a) On considère que le régime permanent est établi dans le circuit n° 3.

Dans quelle bobine l'énergie stockée est-elle la plus importante ?

(a) L (b) $2L$ (c) $3L$

b) Même question pour le circuit n° 4.

(a) L (b) $2L$ (c) $3L$

Bilans d'énergie pour des circuits soumis à des échelons de tension

Prérequis
L'énergie $\mathcal{E}$ fournie à un dipôle entre les temps t_0 et t_1 est égale à

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

où $\mathcal{P}(t)$ est la puissance instantanée fournie à ce dipôle.

Entraînement 6.13 — Charge d'un condensateur.

Soit le circuit ci-contre dans lequel le condensateur C est initialement déchargé.

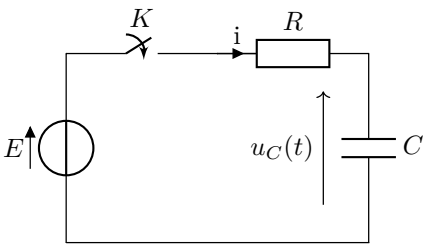
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

Dans ces conditions, la tension aux bornes du condensateur vaut

$$u_C(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))$$

avec $\tau = RC$; l'intensité dans le circuit vaut

$$i(t) = \frac{CE}{\tau}\exp(-t/\tau).$$



Exprimer, en fonction des grandeurs introduites :

a) la puissance instantanée $\mathcal{P}_E(t)$ délivrée par la source de fém E. .....

b) la puissance instantanée $\mathcal{P}_J(t)$ dissipée par effet Joule dans le circuit. .....

c) la puissance instantanée $\mathcal{P}_C(t)$ reçue par le condensateur .....

d) l'énergie totale $\mathcal{E}_E$ fournie par la source de tension que l'on calculera grâce à la formule

$$\mathcal{E}_E = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_E(t)\,\mathrm{d}t.$$

.....

e) l'énergie totale $\mathcal{E}_J$ dissipée par effet Joule que l'on calculera grâce à la formule

$$\mathcal{E}_J = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_J(t)\,\mathrm{d}t.$$

.....

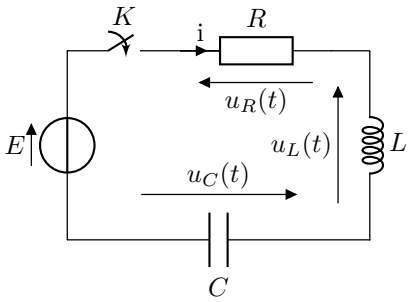
f) l'énergie totale $\mathcal{E}_C$ fournie au condensateur que l'on calculera grâce à la formule

$$\mathcal{E}_C = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_C(t)\,\mathrm{d}t.$$

.....

Entraînement 6.14 — Aspects énergétiques du circuit RLC.

On considère le montage ci-dessous dans lequel le condensateur est initialement déchargé.



À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

À $t = 0^+$, on a $u_C(t = 0^+) = 0$ et $i(t = 0^+) = 0$.

En régime permanent, on a $u_C(t \to +\infty) = E$ et $i(t \to +\infty) = 0$.

a) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_E(t)$ fournie par la source en fonction de E et de $u_C(t)$.

On pourra s'aider de la relation $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

.....

b) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_C(t)$ reçue par le condensateur en fonction de $u_C(t)$ et C.

.....

c) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_L(t)$ reçue par la bobine en fonction de $i(t)$ et L.

.....

En intégrant les expressions des puissances instantanées aux bornes de chaque dipôle, exprimer en fonction des grandeurs introduites :

d) L'énergie totale fournie par la source de tension .....

e) L'énergie totale fournie au condensateur .....

f) L'énergie totale fournie à la bobine .....

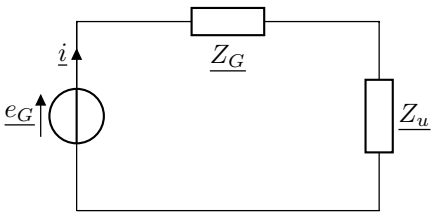
g) En exploitant les résultats précédents, exprimer l'énergie totale dissipée par effet Joule.

.....

Bilan d'énergie en régime sinusoïdal forcé

Entraînement 6.15 — Adaptation d'impédance.

On considère un dipôle d'impédance $\underline{Z_u}$ branché aux bornes d'un générateur de fém $\underline{e_G}(t)$ et d'impédance interne $\underline{Z_G}$.



On notera : $\underline{Z_u} = R_u + \mathrm{j}X_u$ et $\underline{Z_G} = R_G + \mathrm{j}X_G$.

Le dipôle $\underline{Z_u}$ est traversé par le courant d'intensité $i(t)$.

On écri en notation complexe,

$$\underline{e_G} = E\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i} = I\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}.$$

La puissance moyenne reçue par l'impédance $\underline{Z_u}$ vaut

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\big(\underline{Z_u} \times \underline{i} \times \underline{i}^{\star}\big).$$

a) Exprimer la puissance $\mathcal{P}_m$ en fonction de I et de R_u .....

b) Grâce à une loi des mailles, exprimer I en fonction de E, de R_G, R_u et X_G, X_u.

.....

Des résultats précédents, on en déduit l'expression de $\mathcal{P}_m$ en fonction de E :

$$\mathcal{P}_m = \frac{R_u E^2}{(R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2}$$

On cherche à déterminer les conditions sur R_u et X_u pour que $\mathcal{P}_m$ soit maximale. On dit alors qu'il y a *adaptation d'impédance.*

c) Calculer la dérivée de $\mathcal{P}_m$ par rapport à X_u .....

d) Calculer la dérivée de $\mathcal{P}_m$ par rapport à R_u .....

e) Choisir parmi les quatre propositions suivantes quelle est la condition pour que $\mathcal{P}_m$ soit maximale :

(a) $X_u = -X_G$ et $R_u = -R_G$ (c) $X_u = -X_G$ et $R_u = R_G$

(b) $X_u = X_G$ et $R_u = -R_G$ (d) $X_u = X_G$ et $R_u = R_G$

.....

Réponses mélangées

ⓒ $E\dfrac{E-e}{R+r}$ 16 W $\dfrac{CE^2}{\tau}\Big(\exp(-t/\tau)-\exp(-2t/\tau)\Big)$ ⓒ $\dfrac{E-e}{R+r}$

$\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right)}{\mathrm{d}t}$ 0 $\dfrac{CE^2}{\tau}\exp(-t/\tau)$ ⓒ $\ln(2)R_0$ 513 km $\dfrac{u_0 i_0}{2}$ $\dfrac{1}{2}CE^2$

$\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right)}{\mathrm{d}t}$ $\dfrac{1}{2}CE^2$ 3,75 W $\dfrac{1}{2}CE^2$ Hyundai Ioniq 6 $E^2\dfrac{R}{(r+R)^2}$

ⓑ $\dfrac{E}{r+R}$ $E^2\dfrac{(R_G^2-R_u^2)+(X_G+X_u)^2}{\Big((R_G+R_u)^2+(X_G+X_u)^2\Big)^2}$ ⓐ ⓑ 4,6 W · h

$E^2\dfrac{r-R}{(r+R)^3}$ ⓒ $e\dfrac{E-e}{R+r}$ ⓐ $\dfrac{eR+Er}{R+r}$ 0 $\dfrac{CE^2}{\tau}\exp(-2t/\tau)$

16,5 kJ $u_0 i_0\left(2+\dfrac{1}{2}\sin(\psi)\right)$ CE^2 ⓐ 0 92 % $3\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ W $R_u I^2$

$EC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ $\dfrac{(E-e)^2}{R+r}$ $\dfrac{u_0 i_0}{2}\cos(\varphi)$ CE^2 $-R_u E^2\dfrac{2(X_G+X_u)}{\Big((R_G+R_u)^2+(X_G+X_u)^2\Big)^2}$

$\dfrac{2\pi}{\omega}$ $\dfrac{1}{2}CE^2$ $\dfrac{e}{E}$ Hyundai Ioniq 6 $\dfrac{E}{\sqrt{(R_G+R_u)^2+(X_G+X_u)^2}}$

▶ Réponses et corrigés page 228

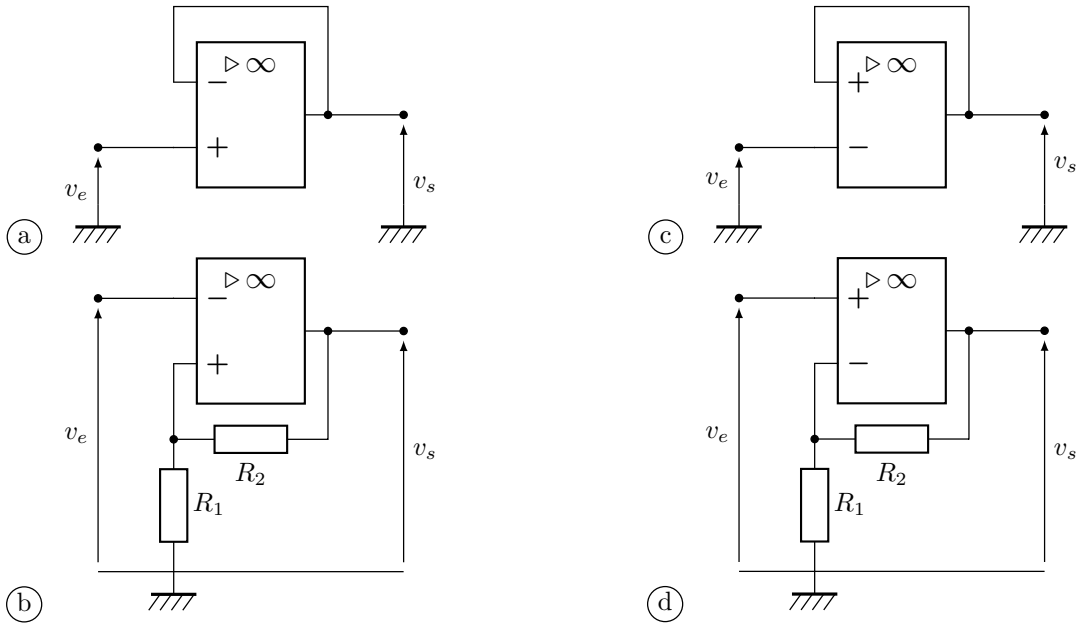
Amplificateurs linéaires intégrés

Prérequis
Loi des nœuds. Loi des mailles. Loi d'Ohm. Impédance complexe. Diviseur de tension.

Les fondamentaux

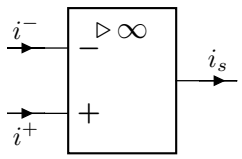
Entraînement 7.1 — Régime linéaire ?

Parmi les circuits suivants, lesquels peuvent fonctionner en régime linéaire ?



.....

Entraînement 7.2 — Modèle de l'ALI idéal de gain infini.



Pour chaque affirmation, répondre par vrai ou faux.

a) L'impédance d'entrée de l'ALI idéal est infinie .....

b) Les courants d'entrée i^+ et i^- de l'ALI idéal sont nuls .....

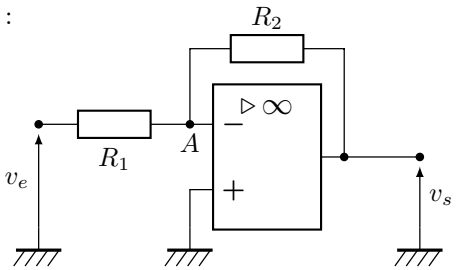
c) Le courant de sortie i_s de l'ALI est toujours nul .....

d) Les potentiels V^+ et V^- des entrées sont nuls en régime linéaire.

.....

Entraînement 7.3

On considère le montage suivant :



a) L'ALI peut-il fonctionner en régime linéaire ? .....

b) Dans le cas du régime linéaire, quelle est la relation entre les potentiels V^+ et V^- des entrées inverseuse et non inverseuse ?

.....

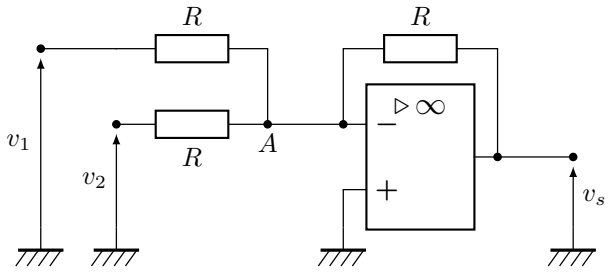
c) Donner, en régime linéaire, le potentiel V_A du point A .....

Entraînement 7.4 — Détermination de potentiels électriques.

Tous les ALI de cet exercice sont supposés fonctionner en régime linéaire.

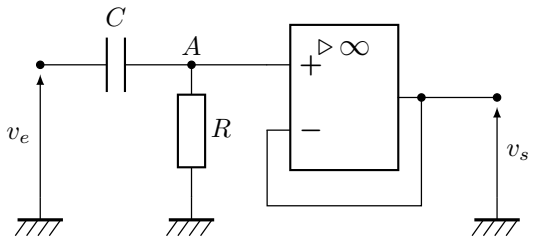
Donner, pour chaque montage, le potentiel V_A du point A en fonction de v_e ou de v_s. Le potentiel peut également être nul.

a)



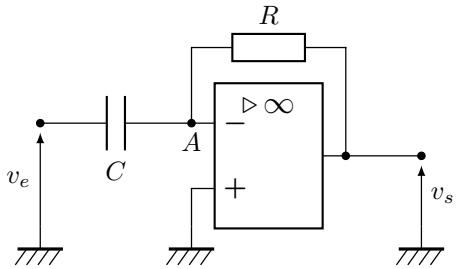
.....

b)



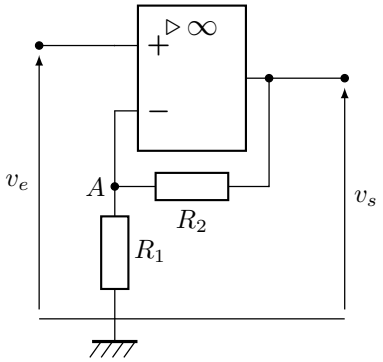
.....

c)



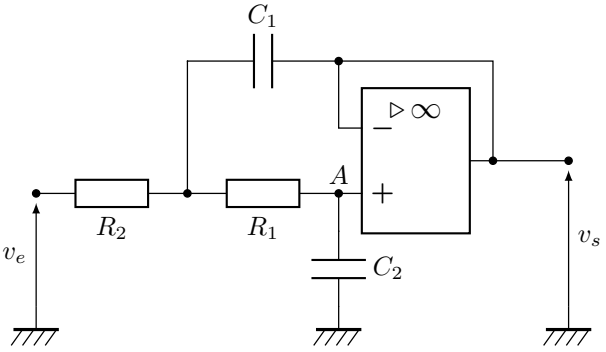
.....

d)



.....

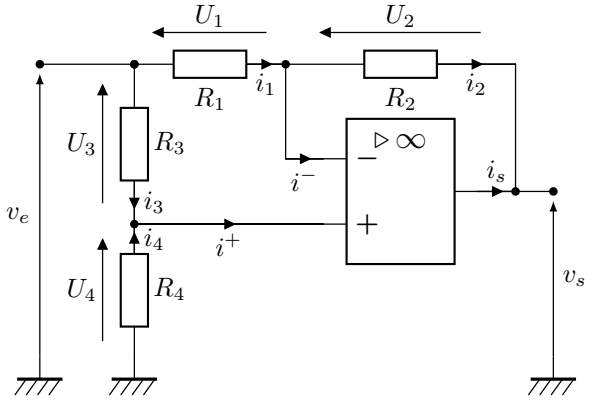
e)



.....

Entraînement 7.5 — Vrai ou faux ?

On considère le montage ci-dessous dans lequel l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



Pour chaque affirmation, répondre par vrai ou faux.

a) Toutes les résistances sont orientées en convention récepteur .....

b) La loi des nœuds assure $i_1 = i_2$ .....

c) La loi des nœuds assure $i_3 = i_4$ .....

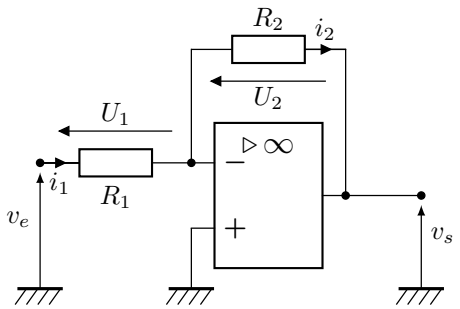
d) Les tensions U_1 et U_3 sont égales .....

e) Les tensions U_2 et U_4 sont égales .....

Entraînement 7.6 — Autour de l'amplificateur inverseur.

On considère le montage amplificateur inverseur ci-dessous.

L'ALI est idéal et on suppose qu'il fonctionne en régime linéaire.



a) Quelle est la relation entre i_1 et i_2 ? .....

b) Exprimer U_1 en fonction de v_e .....

c) Exprimer U_2 en fonction de v_s .....

d) Exprimer l'intensité i_1 en fonction de v_e .....

e) Exprimer l'intensité i_2 en fonction de v_s. .....

f) Déterminer l'amplification $G = \dfrac{v_s}{v_e}$ de ce montage .....

g) Parmi les couples de résistances suivants, lequel permet d'obtenir l'amplification la plus importante ?

(a) le couple $(R_1 = 3{,}3\,\text{k}\Omega, R_2 = 8{,}2\,\text{k}\Omega)$

(b) le couple $(R_1 = 1\,\text{k}\Omega, R_2 = 3{,}3\,\text{k}\Omega)$

.....

Entraînement 7.7 — Amplificateur inverseur.

Un montage amplificateur inverseur produit un gain

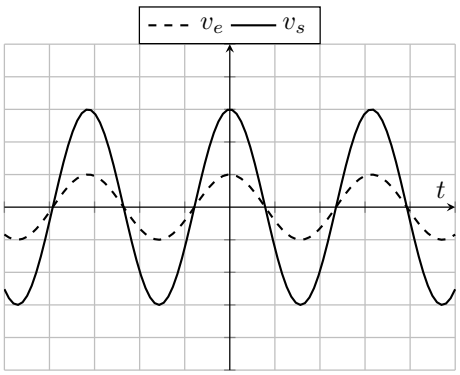
$$G = -\frac{R_2}{R_1}$$

avec $R_1 = 1{,}2\,\text{k}\Omega$ et $R_2 = 200\,\Omega$.

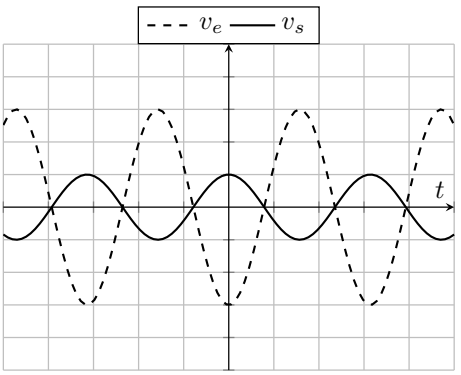
Les courbes ci-dessous représentent des allures temporelles de v_e (en pointillés) et v_s (en trait plein) en fonction du temps.

Le calibre est de $1\,\text{V}$/division pour v_e et $0{,}5\,\text{V}$/division pour v_s.

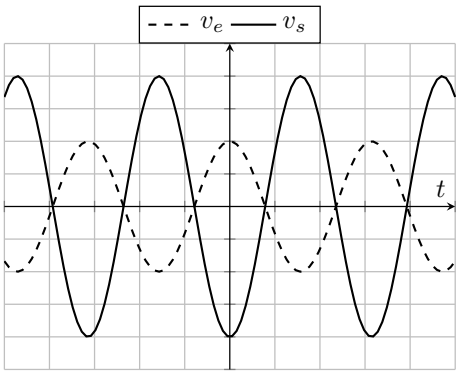
a



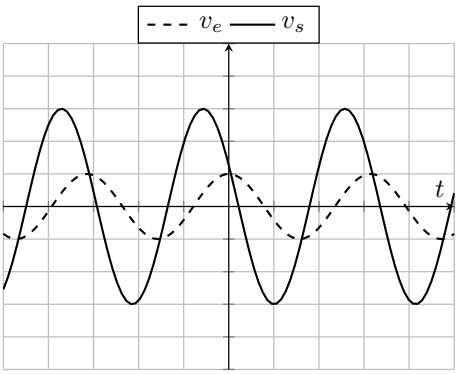
c



b



d



Quelles sont les courbes pouvant correspondre au montage amplificateur inverseur étudié ?

.....

Entraînement 7.8 — Un petit intermède.

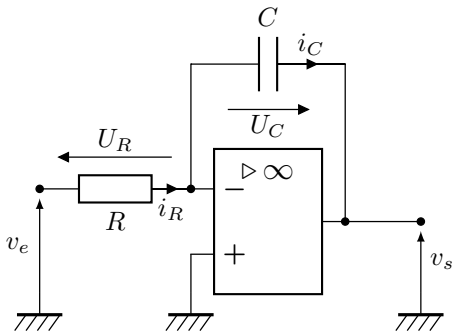
On considère une résistance R et une capacité C.

Quelle est la dimension de la grandeur RC ? .....

Entraînement 7.9 — Montage intégrateur inverseur.

On considère le montage ci-dessous.

L'ALI est idéal.



a) En régime stationnaire, l'ALI peut-il fonctionner en régime linéaire ? .....

Dans toutes les questions suivantes, on suppose que l'ALI fonctionne en régime linéaire et on se place en régime sinusoïdal.

b) Exprimer la tension U_R en fonction de v_e et/ou v_S .....

c) Exprimer la tension U_C en fonction de v_e et/ou v_S .....

d) Donner la relation entre i_R et i_C .....

e) Quelle est la relation entre les grandeurs complexes $\underline{i_C}$ et $\underline{U_C}$? .....

f) Donner la fonction de transfert $\underline{H}$ du montage. .....

g) Donner la relation entre $v_e(t)$ et $v_s(t)$ .....

Entraînement 7.10

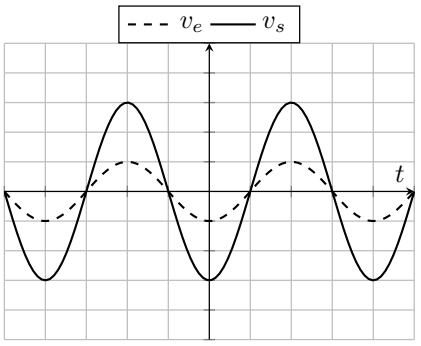
Un montage intégrateur inverseur a pour fonction de transfert

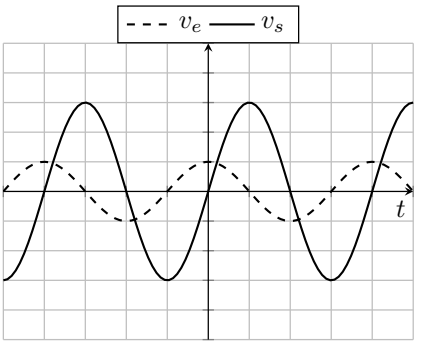
$$\underline{H} = -\frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$$

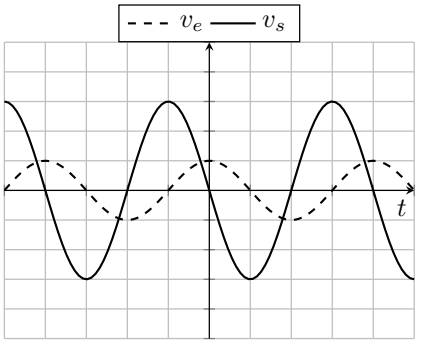
avec $R = 11\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 4{,}7\,\mathrm{nF}$.

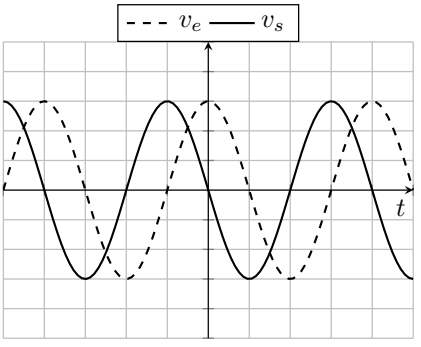
Les courbes suivantes représentent des allures temporelles de v_e (en pointillés) et v_s (en trait plein) en fonction du temps. Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants :

- calibre vertical : 1 V/division pour les deux voies,
- calibre horizontal : 250 µs/division.

a)


c)


b)


d)


a) Quel est le gain du montage intégrateur inverseur ? .....

b) Quel est le déphasage de la tension de sortie v_s par rapport à v_e ? .....

c) Pour $v_e = E\cos(\omega t)$, donner l'expression de v_s. .....

d) Quelle est la fréquence de fonctionnement ? .....

e) Quelle est la valeur numérique du gain à cette fréquence ? .....

f) Quelle courbe est compatible avec les valeurs numériques données ci-dessus ?

.....

Entraînement 7.11 — Montage intégrateur inverseur.

Un montage intégrateur inverseur a pour fonction de transfert

$$\underline{H} = -\frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$$

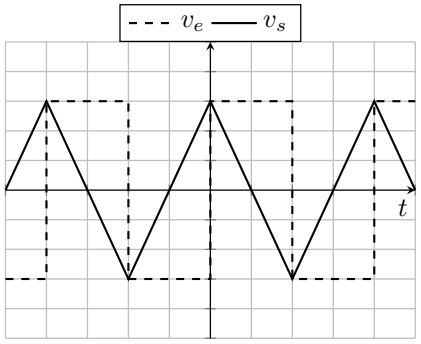
avec $R = 15\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 25\,\mathrm{nF}$.

Les courbes suivantes représentent des allures temporelles de v_e (en pointillés) et v_s (en trait plein) en fonction du temps.

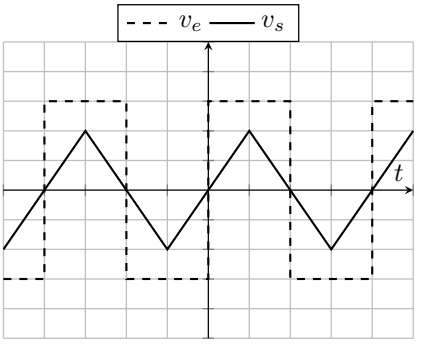
Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants :

- calibre vertical : 1 V/division pour les deux voies,
- calibre horizontal : 250 µs/division.

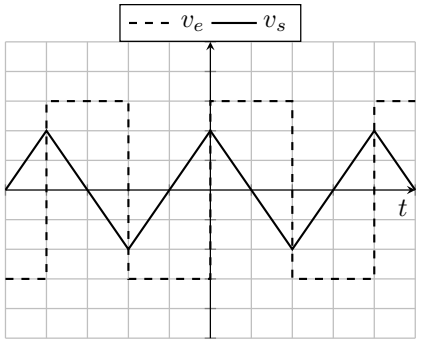
a)



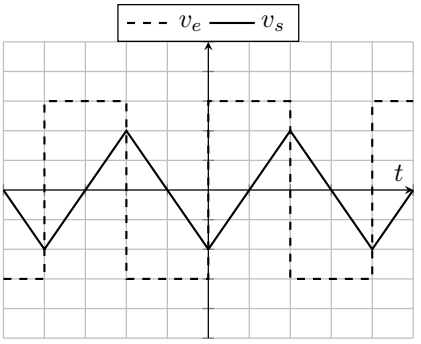
c)



b)



d)



a) Donner l'équation différentielle reliant v_s et v_e .....

b) Pour une tension constante $v_e = E$, donner l'expression temporelle de v_s.

On ne se préoccupera pas de déterminer les éventuelles constantes d'intégration.

.....

c) Quelle est la courbe compatible avec les valeurs numériques ci-dessus ?

.....

Entraînement 7.12 — Un petit intermède.

On considère deux montages dont les gains valent respectivement

$$G_1 = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad \text{et} \quad G_2 = \frac{R_1 R_2}{{R_1}^2 + {R_2}^2},$$

où R_1 et R_2 sont des résistances.

a) On suppose que $\dfrac{R_1}{R_2} = \alpha$. Exprimer $\dfrac{1}{G_2}$ en fonction de α .....

b) On suppose encore que $\dfrac{R_1}{R_2} = \alpha$. Exprimer G_2 en fonction de α .....

c) À quelle condition a-t-on $G_1 = \dfrac{1}{G_2}$? .....

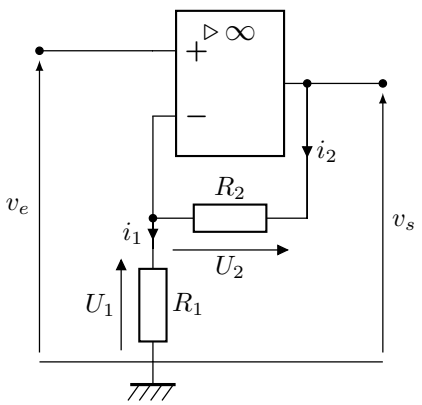
d) Pour quelle valeur de $\alpha > 0$ la quantité $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ est minimale ?

On pourra introduire une fonction et la dériver. .....

Entraînement 7.13 — Montage non inverseur.

On considère le montage ci-dessous.

L'ALI est idéal et on suppose qu'il fonctionne en régime linéaire.



a) Quelle est la relation entre les intensités i_1 et i_2 ? .....

b) Exprimer la tension U_1 en fonction de v_s, R_1 et R_2 .....

c) Exprimer U_1 en fonction de v_e .....

d) Exprimer le gain G du montage non inverseur .....

e) Donner la valeur de G pour $R_1 = 2{,}2\,\text{k}\Omega$ et $R_2 = 33\,\text{k}\Omega$ .....

Entraînement 7.14 — Montage amplificateur non inverseur.

Un montage amplificateur non inverseur possède un gain

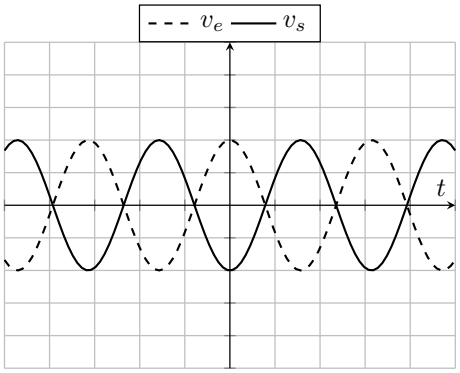
$$G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

avec $R_1 = 1{,}5\,\text{k}\Omega$ et $R_2 = 7{,}5\,\text{k}\Omega$.

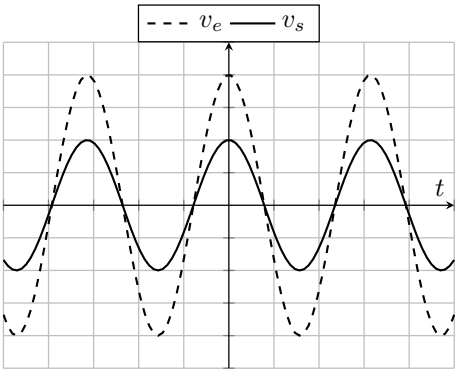
Les courbes suivantes représentent des allures temporelles de v_e (en pointillés) et v_s (en trait plein) en fonction du temps.

Le calibre utilisé pour v_e est de $1\,\text{V}/\text{division}$ alors que le calibre pour v_s est de $2\,\text{V}/\text{division}$.

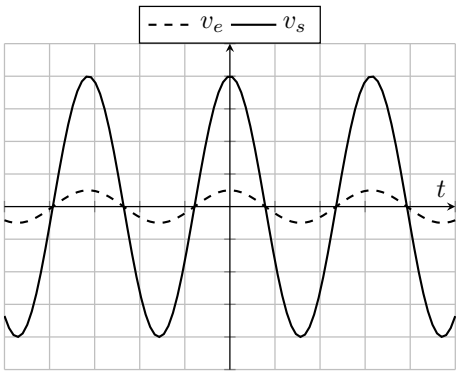
a



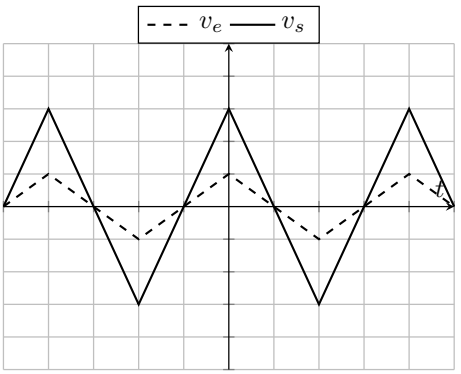
c



b



d



Quelles sont les courbes qui peuvent correspondre au montage non inverseur ?

.....

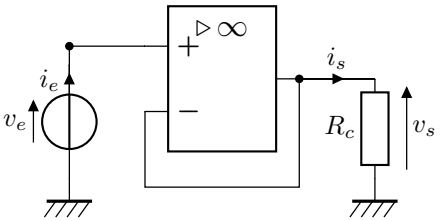
Impédances d'entrée

Entraînement 7.15 — Montage suiveur.

On considère le montage suiveur représenté ci-contre.

Le suiveur est alimenté par une source idéale de tension v_e de fréquence variable, la charge est une résistance R_c.

L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) Quelle est la relation entre v_e et v_s ? .....

b) Quelle est l'impédance d'entrée d'un ALI idéal ? .....

c) Exprimer l'intensité i_e traversant la source de tension. .....

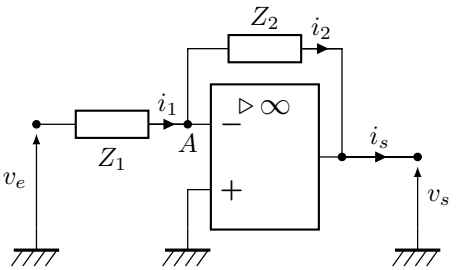
d) Quelle est l'impédance d'entrée du montage suiveur ? .....

Entraînement 7.16 — Circuits inverseurs.

On considère le montage représenté ci-contre.

Les impédances Z_1 et Z_2 sont quelconques et la tension d'entrée v_e est sinusoïdale de pulsation ω.

L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) Exprimer l'intensité i_1 en fonction de v_e et de Z_1 .....

b) Donner l'impédance d'entrée du circuit .....

La tension d'entrée est constante égale à $10\,\text{V}$.

c) Donner l'impédance d'entrée si Z_1 est un condensateur. .....

d) Donner l'impédance d'entrée si Z_1 est une bobine .....

La tension d'entrée est maintenant sinusoïdale de pulsation $\omega = 6{,}0 \cdot 10^3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

e) Pour quel dipôle Z_1 l'impédance d'entrée a-t-elle le plus grand module :

un condensateur $C = 10\,\text{nF}$ ou une résistance $R = 15\,\text{k}\Omega$? .....

Réponses mélangées

$C = 10\,\text{nF}$ $U_2 = -v_s$ Faux Faux 16 Non 0 $i_R = i_C$ $-\dfrac{1}{\text{j}RC\omega}$

(b) $i_2 = -\dfrac{v_s}{R_2}$ ∞ $G = -\dfrac{R_2}{R_1}$ $0\,\text{A}$ $-\dfrac{E}{RC\omega}\sin(\omega t)$ (b) $0\,\text{V}$

$RC\dfrac{\text{d}v_s}{\text{d}t} = -v_e$ Vrai Vrai $1\,\text{kHz}$ Z_1 $\dfrac{v_e}{Z_1}$ (d) 3,1 c'est un temps

(c) $R_1 = R_2$ $\underline{i_C} = -\text{j}C\omega\underline{U_C}$ $i_1 = i_2$ Faux Oui $0\,\text{V}$ Faux $U_1 = v_e$

$RC\dfrac{dv_s}{dt} = -v_e(t)$ v_s (b) $i_1 = i_2$ Vrai $i_1 = \dfrac{v_e}{R_1}$ $1 + \dfrac{R_2}{R_1}$ $\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$

$\dfrac{\pi}{2}$ ∞ $-\dfrac{E}{RC}t + K$ v_e v_e $\dfrac{R_1}{R_1+R_2}v_s$ $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ Faux v_s

$v_s = v_e$ ∞ $0\,\text{V}$ $V^+ = V^-$ v_e $\dfrac{1}{RC\omega}$ $\alpha = 1$ (a) (d) v_s Vrai

▶ Réponses et corrigés page 237

Sources lumineuses et lois de Snell-Descartes

Prérequis
Lois de Snell-Descartes. Notions de base sur les ondes lumineuses et leur propagation dans un milieu. Notions de base de géométrie concernant les angles.

Constantes utiles
→ célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
→ constante de Planck : $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$

Lois de Snell-Descartes

Entraînement 8.1 — Conversions d'angles.

Soit α_{rad} la mesure d'un angle en radians, α_{deg} sa mesure en degrés et α_{min} sa mesure en minutes d'angle.

a) Exprimer α_{rad} en fonction de α_{deg}. .....

b) Exprimer α_{min} en fonction de α_{deg}. .....

Entraînement 8.2 — Conversions d'angles — *bis*.

a) $\alpha = 35{,}65°$. Exprimer α en degrés et en minutes d'angle. .....

b) $\beta = 98°15'$. Exprimer β en radians. .....

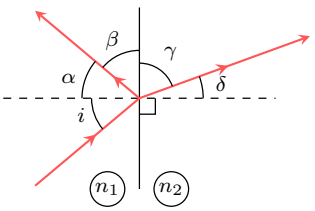
c) $\gamma = 1{,}053\,\mathrm{rad}$. Exprimer γ en degrés et en minutes d'angle. .....

Entraînement 8.3 — Un rayon incident sur un dioptre.

On considère un rayon incident arrivant sur un dioptre séparant deux milieux d'indice respectif n_1 et n_2.

Ce rayon fait un angle i avec la normale au dioptre.

Tous les angles figurant sur le schéma sont non orientés.



Exprimer chacun des angles suivants en fonction de i et/ou de n_1 et n_2 (en radians) :

a) α .....

b) β .....

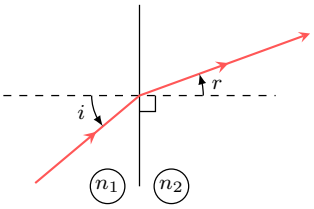
c) δ .....

d) γ .....

Entraînement 8.4 — Un autre rayon incident sur un dioptre.

On considère un rayon incident arrivant sur un dioptre séparant deux milieux d'indice respectif n_1 et n_2. Ce rayon fait un angle i avec la normale au dioptre alors que le rayon réfracté fait un angle r.

On donne $n_1 = 1{,}00$ et $n_2 = 1{,}45$.



a) Pour $i = 24{,}0°$, que vaut r en degré ? .....

b) Pour $i = 6{,}74 \times 10^{-1}$ rad, que vaut r en degré ? .....

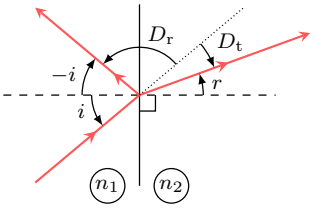
c) Pour $r = 15{,}0°$, que vaut i en degré ? .....

Entraînement 8.5 — Déviation introduite par un dioptre.

On considère un rayon incident arrivant sur un dioptre séparant deux milieux d'indice respectif n_1 et n_2.

Les angles définis sur le schéma ci-contre sont tous orientés.

On définit D_r la déviation entre le rayon incident et le rayon réfléchi, et D_t la déviation entre le rayon incident et le rayon réfracté.



a) Exprimer D_t en fonction de i et r. .....

b) Déterminer D_r. .....

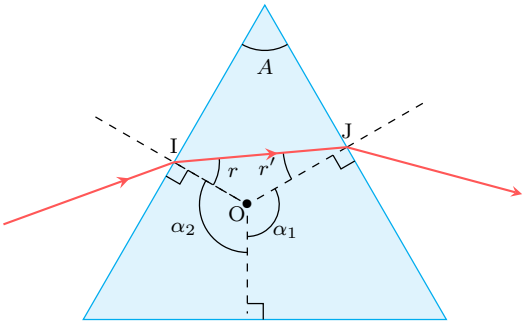
Entraînement 8.6 — Un peu de géométrie dans un prisme.

On considère un prisme d'angle au sommet A, représenté ci-contre suivant une de ses faces triangulaires.

Un rayon incident en I sur une face du prisme émerge en J.

On définit les angles α_1, α_2, r et r' sur le schéma.

Dans cet entraînement, les angles ne sont pas orientés.



On rappelle que la somme des angles dans un quadrilatère est égale à 2π.

a) Exprimer l'angle A en fonction de α_1 et α_2 .....

b) Exprimer l'angle A en fonction de r et de r' .....

Autour des réflexions totales

Entraînement 8.7

On considère un dioptre séparant deux milieux d'indices respectifs $n_1 = 1{,}5$ et $n_2 = 1{,}3$. Un rayon lumineux arrive sur ce dioptre en formant un angle i par rapport à sa normale.

On rappelle qu'il y a réflexion totale si $\dfrac{n_1}{n_2}\sin(i) > 1$.

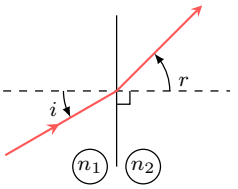
a) Pour $i = 44°$, y a-t-il réflexion totale ? .....

b) Donner, en degrés, l'angle i_ℓ tel qu'il y a réflexion totale si $i > i_\ell$. .....

Entraînement 8.8

On considère un rayon lumineux incident sur le dioptre n_1/n_2, faisant un angle i avec la normale à ce dioptre et le rayon réfracté un angle r.

On donne $n_1 = 1{,}37$ et on rappelle qu'il y a réflexion totale si $\dfrac{n_1}{n_2}\sin(i) > 1$.



a) Pour $i = 20{,}0°$ et $r = 22{,}0°$, que vaut n_2 ? .....

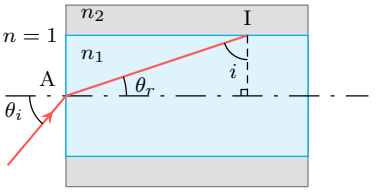
b) Pour $i = 60{,}0°$, quelle est la valeur maximale de n_2 donnant lieu à une réflexion totale ? ...

c) On suppose que $i = 40{,}0°$. Peut-on observer un phénomène de réflexion totale ? .....

Entraînement 8.9 — Condition de propagation dans une fibre optique.

Un rayon lumineux arrive sur un dioptre séparant l'air d'un milieu d'indice n_1 au point A (voir schéma ci-contre). On a donc :

$$\sin(\theta_i) = n_1 \sin(\theta_r). \qquad (1)$$



Le rayon se propagera dans la fibre à condition qu'il y ait réflexion totale au point I situé à l'intersection du rayon lumineux et du dioptre n_1/n_2 (avec $n_1 > n_2$).

On donne la relation correspondante :

$$\frac{n_1 \sin(i)}{n_2} > 1 \qquad (2)$$

a) À l'aide de (1), exprimer $\cos(\theta_r)$ en fonction de n_1 et de $\sin(\theta_i)$. ....

b) À quelle condition portant sur $\cos(\theta_r)$ équivaut (2) ? .....

c) En déduire à quelle condition sur $\sin(\theta_i)$ équivaut (2). .....

Sources lumineuses

Entraînement 8.10 — Propagation de la lumière.

Un laser vert émet une radiation lumineuse de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 532\,\text{nm}$. Calculer :

a) La fréquence de l'onde ..... b) L'énergie d'un photon .....

Entraînement 8.11

Une radiation lumineuse de longueur d'onde λ_0 passe du vide vers un milieu transparent d'indice n.

Quelles quantités sont inchangées ?

(a) La longueur d'onde
(b) L'énergie d'un photon
(c) La vitesse de propagation
(d) La fréquence de l'onde

.....

Entraînement 8.12 — Propagation dans un milieu.

Un laser de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 532\,\text{nm}$ se propage dans de l'eau, assimilée à un milieu transparent d'indice optique $n = 1{,}33$.

Donner la valeur numérique dans l'eau de :

a) La vitesse de la lumière. .....

b) La longueur d'onde. .....

Réponses mélangées

$60 \times \alpha_{\text{deg}}$ $\quad \sin(\theta_i) < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ $\quad 35°39'$ $\quad \frac{\pi}{2} - i$ $\quad 22{,}0°$ $\quad \cos(\theta_r) > \frac{n_2}{n_1}$ $\quad 1{,}25$

Non $\quad$ Non $\quad 16{,}3°$ $\quad 25{,}5°$ $\quad (\alpha_1 + \alpha_2) - \pi$ $\quad 2{,}26 \times 10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ $\quad 400\,\text{nm}$ $\quad r - i$

$\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(i)\right)$ $\quad 564\,\text{THz}$ $\quad 1{,}18$ $\quad 60°20'$ $\quad \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta_i)}{n_1^2}}$ $\quad 60°$ $\quad \frac{\pi}{180} \times \alpha_{\text{deg}}$

$3{,}74 \times 10^{-19}\,\text{J}$ $\quad$ (b) et (d) $\quad 1{,}715\,\text{rad}$ $\quad \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(i)\right)$ $\quad \pi - 2i$ $\quad r + r'$ $\quad i$

▶ Réponses et corrigés page 242

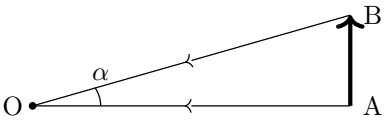
Lentilles

Prérequis
Propriétés des lentilles minces dans les conditions de Gauss. Vergence.
Relations de conjugaison des lentilles minces.

Grandeurs algébriques

Entraînement 9.1 — Diamètre apparent.

On considère le schéma suivant, montrant l'angle α, appelé diamètre apparent, sous lequel est vu un objet AB depuis un point O.



a) Exprimer le diamètre apparent α, en radians, en fonction de OA et AB .....

b) Exprimer le diamètre apparent α, en degrés, en fonction de OA et AB .....

Un observateur situé à la surface de la Terre observe des astres, caractérisés par les données suivantes :

	Soleil	**Lune**
Diamètre	$1{,}4 \cdot 10^6$ km	$3{,}5 \cdot 10^3$ km
Distance à la Terre	$150\,600 \cdot 10^3$ km	384 400 km

Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser que, quand α est un angle petit et exprimé en radians, on dispose de l'approximation des petits angles : $\alpha \approx \tan(\alpha)$.

c) Calculer le diamètre apparent de la Lune α_L en degrés .....

d) Calculer le diamètre apparent du Soleil α_S en degrés .....

e) Que vérifient les valeurs numériques α_S et α_L ?

(a) $\alpha_S > \alpha_L$ (b) $\alpha_S \approx \alpha_L$ (c) $\alpha_S < \alpha_L$

.....

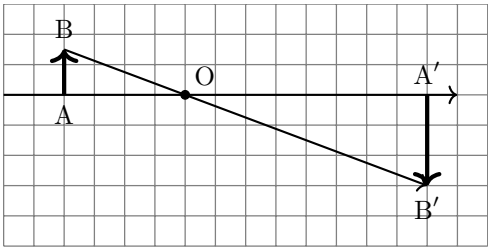
f) Quel phénomène astronomique la comparaison de α_L et α_S permet d'expliquer ?

(a) Les éclipses
(b) Les saisons
(c) Les marées

.....

Entraînement 9.2 — Configuration de Thalès et grandissement.

On considère la situation représentée sur le schéma ci-dessous.



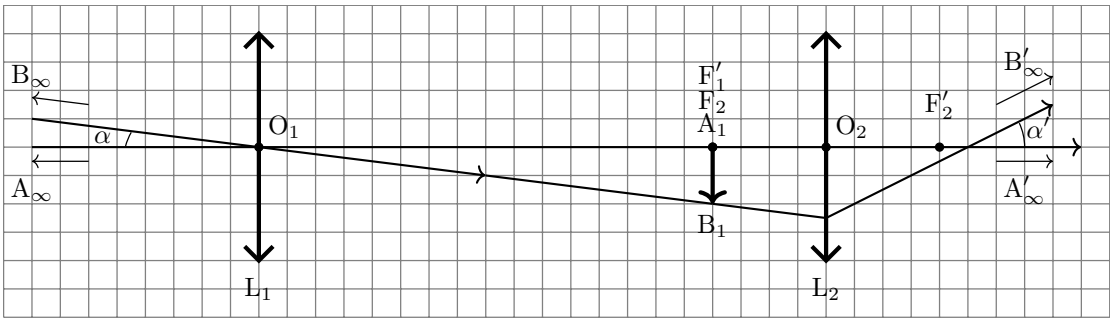
On note $\overline{x}$ la valeur algébrique de la longueur x et on définit le grandissement γ par la relation :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

a) Donner la relation reliant $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$, $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$ .....

b) Déterminer la valeur numérique de γ .....

Entraînement 9.3 — Schéma optique d'une lunette astronomique afocale.



Le schéma ci-dessus modélise une lunette astronomique afocale, où un carreau correspond à une longueur réelle de 2,5 cm.

Calculer les distances algébriques suivantes :

a) $\overline{O_1F_1'}$ .....

b) $\overline{O_2F_2}$ .....

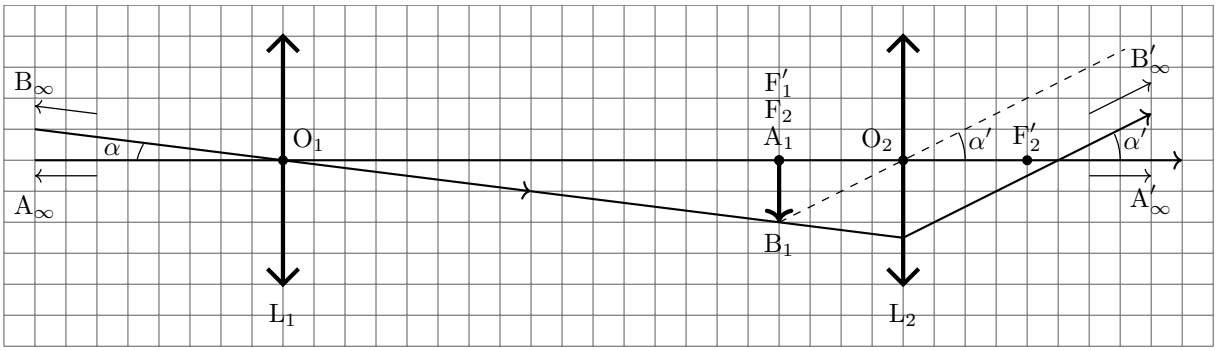
c) $\overline{O_2O_1}$ .....

d) $\overline{A_1F_2'}$ .....

Entraînement 9.4 — Grossissement d'une lunette astronomique afocale.

On considère la lunette astronomique afocale schématisée dans l'entraînement précédent.

Elle est constituée d'un objectif (lentille convergente L_1) et d'un oculaire (lentille convergente L_2) alignés sur le même axe optique.



On introduit les grandeurs suivantes :

- la distance focale image de l'objectif, notée f'_1
- la distance focale image de l'oculaire, notée f'_2
- l'objet lointain observé par la lunette, noté $\overline{A_\infty B_\infty}$
- l'image intermédiaire de l'objet par l'objectif, notée $\overline{A_1 B_1}$
- l'image à l'infini de l'image intermédiaire par l'oculaire, notée $\overline{A'_\infty B'_\infty}$
- le diamètre apparent α de l'objet
- le diamètre apparent α' de l'image

On définit le grossissement de la lunette, noté G, comme le rapport du diamètre apparent de l'objet observé à la lunette sur le diamètre apparent réel de l'objet.

Autrement dit, on pose

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Dans cet entraînement, les angles ne seront pas orientés et on travaillera avec des longueurs plutôt que des valeurs algébriques.

a) Exprimer α en fonction de A_1B_1 et d'une distance focale.

.....

b) Exprimer α' en fonction de A_1B_1 et d'une distance focale.

.....

c) Exprimer G en fonction de f'_1 et de f'_2.

.....

d) Déterminer la valeur de G.

.....

Modèle de la lentille mince

Entraînement 9.5 — Conditions de Gauss.

Parmi les situations suivantes concernant les rayons lumineux issus d'un objet et traversant une lentille mince, indiquer celle qui ne permet pas de se placer dans les conditions de Gauss.

(a) peu inclinés par rapport à l'axe optique.

(b) passant par les bords de la lentille.

(c) passant près du centre optique.

.....

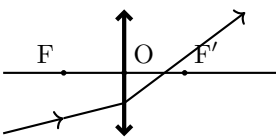
Entraînement 9.6 — Déviation de rayons lumineux.

On rappelle les propriétés suivantes :

- Un rayon passant par le centre optique de la lentille n'est pas dévié.
- Un rayon incident dont la direction passe par le foyer objet émerge parallèle à l'axe optique principal.
- Un rayon parallèle à l'axe optique principal émerge avec une direction passant par le foyer image.

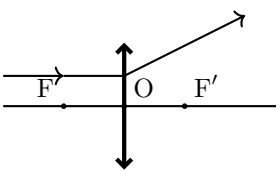
Pour chacun des schémas suivants, préciser s'ils sont corrects ou incorrects.

a)



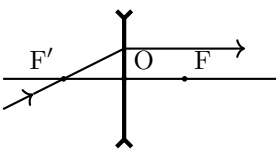
.....

b)



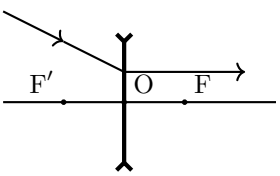
.....

c)



.....

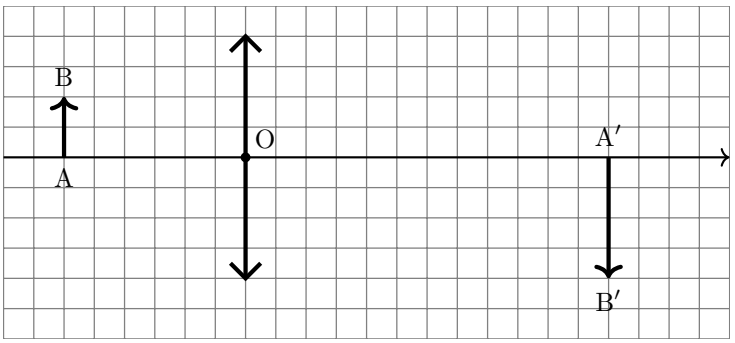
d)



.....

Entraînement 9.7 — Construction de rayons lumineux.

On considère le schéma suivant montrant un objet $\overline{AB}$ et son image $\overline{A'B'}$ par une lentille convergente.



On donne l'échelle du schéma : 8 carreaux sur le schéma correspondent à 10 cm en réalité.

a) Déterminer graphiquement la distance focale de la lentille .....

b) Calculer la vergence de la lentille .....

Entraînement 9.8 — Batailles de convergence.

Quelle est la lentille la plus convergente ?

(a) une lentille de vergence $+8{,}0\ \delta$
(b) une lentille de focale image $+8{,}0$ cm
(c) une lentille de focale objet $-10{,}0$ cm
(d) une lentille de focale image $-8{,}0$ cm

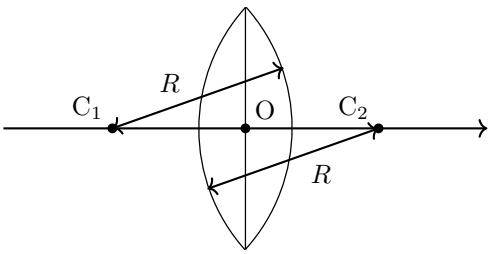
.....

Entraînement 9.9 — Focale d'une lentille biconvexe.

La distance focale d'une lentille biconvexe symétrique de rayon de courbure R, taillée dans un matériau d'indice n et utilisée dans l'air est donnée par la relation suivante :

$$f' = \frac{R}{2(n - n_{\text{air}})}$$

où n_{air} est l'indice optique de l'air.



On souhaite fabriquer une lentille biconvexe de vergence $6{,}0\,\delta$ afin de corriger une hypermétropie forte à partir d'un plastique organique d'indice $n = 1{,}67$. On donne $n_{\text{air}} = 1{,}00$.

a) Calculer le rayon de courbure à réaliser .....

b) Pour quelle valeur de l'indice n la lentille ne dévie pas les rayons lumineux ?

(a) $n \approx n_{\text{air}}$
(b) $n = \frac{3}{2} n_{\text{air}}$
(c) $n = \frac{R}{n_{\text{air}}}$

.....

Conjugaison par une lentille mince

Entraînement 9.10 — Relation de conjugaison au centre optique.

Un objet lumineux est placé au point A, à 15,0 cm devant une lentille mince convergente de centre optique O et de distance focale $f' = 4{,}0\,\text{cm}$.

On rappelle la relation de conjugaison aux sommets de Descartes qui permet de faire le lien entre la position $\overline{\text{OA}}$ de l'objet et la position $\overline{\text{OA}'}$ de l'image :

$$\frac{1}{\overline{\text{OA}'}} - \frac{1}{\overline{\text{OA}}} = \frac{1}{\overline{\text{OF}'}}.$$

a) Exprimer $\overline{\text{OA}'}$ en fonction de $\overline{\text{OA}}$ et f' .....

b) Exprimer $\overline{\text{OA}}$ en fonction de $\overline{\text{OA}'}$ et f' .....

c) Exprimer f' en fonction de $\overline{\text{OA}}$ et $\overline{\text{OA}'}$ .....

d) L'image est-elle située avant ou après le centre optique O ? .....

Entraînement 9.11 — Relation de conjugaison aux foyers.

Dans un dispositif optique convergent de distance focale $f' = 12{,}0\,\text{cm}$, on souhaite qu'une image réelle se trouve exactement à 5,0 mm après le foyer image. On cherche la position où l'on doit placer l'objet, dans un premier temps par rapport au foyer objet F, puis par rapport au centre optique O.

On rappelle la relation de conjugaison aux foyers de Newton :

$$\overline{\text{F}'\text{A}'} \times \overline{\text{FA}} = -f'^2.$$

a) Exprimer $\overline{\text{FA}}$ en fonction de f' et $\overline{\text{F}'\text{A}'}$ .....

b) Exprimer $\overline{\text{OA}}$ en fonction de $\overline{\text{FA}}$ et f' .....

c) Cet objet est-il réel ou virtuel ? .....

Entraînement 9.12 — Grandissement.

Un système optique donne d'un objet, une image dont le grandissement est le suivant : $\gamma = -2{,}0$.

a) Par rapport à l'objet, cette image est :

(a) rétrécie (b) agrandie

.....

b) Par rapport à l'objet, cette image est :

(a) droite (b) renversée

.....

Entraînement 9.13 — Projecteur de cinéma.

Un projecteur de cinéma contient une lentille convergente de distance focale $f' = 50{,}0\,\text{mm}$.

L'écran se situe à 15,0 m de la lentille et on dispose d'une pellicule dont les vignettes sont de dimensions $36{,}0\,\text{mm} \times 24{,}0\,\text{mm}$.

a) À quelle distance algébrique de la lentille doit-on placer la pellicule ? .....

b) Quelles sont les dimensions de l'image d'une vignette sur l'écran ? .....

Entraînement 9.14 — Objets et images à l'infini.

a) Un objet lumineux très éloigné, comme une étoile, peut être considéré comme étant situé à l'infini.

Où se situe l'image d'un tel objet par une lentille ?

(a) dans son plan focal image

(b) dans son plan focal objet

(c) à l'infini

.....

b) Un œil « normal » (emmétrope) n'accomode pas lorsqu'il observe une image à l'infini. Dans ce but, on souhaite projeter à l'infini, l'image d'un objet en utilisant une lentille.

Où doit-on placer l'objet ?

(a) dans son plan focal image

(b) dans son plan focal objet

(c) à l'infini

.....

Entraînement 9.15 — Loupe.

Une loupe est une lentille convergente utilisée dans des conditions particulières. Dans cet exercice, la lentille utilisée a une distance focale de 10,0 cm. On place un objet $\overline{AB} = 2{,}0\,\text{cm}$ à une distance de 6,0 cm en avant de la loupe.

a) Calculer la position de l'image formée par la loupe .....

b) Donner la nature de l'image .....

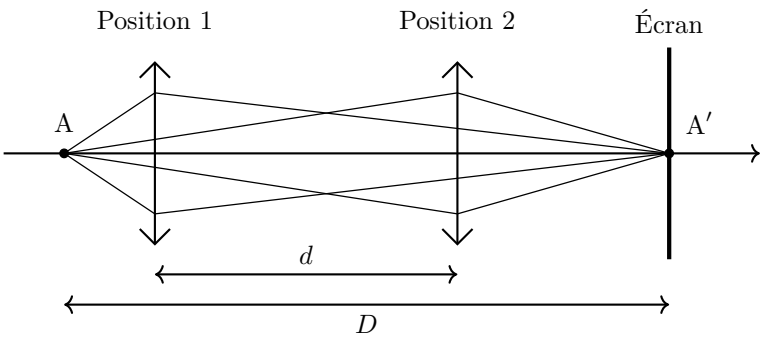
c) Calculer la taille de l'image formée par la loupe .....

d) Cette image est-elle droite ou renversée ? .....

Entraînement 9.16 — Méthode de Bessel.

Pour mesurer la distance focale d'une lentille, on peut utiliser la méthode de Bessel.

On considère un objet donné, et on fixe la distance D entre l'objet et l'écran. On s'assure que D soit suffisamment grande pour qu'il existe deux positions où intercaler la lentille entre l'objet et l'écran, pour lesquelles l'image sur l'écran soit nette. On note d la distance entre ces deux positions.



On peut alors montrer la relation suivante :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\frac{D+d}{2}} - \frac{1}{\frac{-(D-d)}{2}}.$$

a) Exprimer f' en fonction de D et d .....

b) Exprimer f' lorsque $d = \dfrac{D}{4}$ .....

c) Exprimer d lorsque $f' = \dfrac{D}{4}$ .....

Réponses mélangées

5,0 cm (b) (a) $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{f'_1}$ Correct $\overline{FA} - f'$ 0 20 cm

$\overline{OA} = -5{,}02$ cm (b) $\dfrac{15D}{64}$ virtuelle Incorrect (a) 4 -10 cm

-2 $10{,}8\,\text{m} \times 7{,}2\,\text{m}$ $0{,}52°$ (b) droite Incorrect $\dfrac{f'_1}{f'_2}$ $\arctan\left(\dfrac{AB}{OA}\right)$

réel $0{,}53°$ $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{f'_2}$ -50 cm $\dfrac{\overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}}$ (a) (b) $+20\ \delta$ 40 cm

$\arctan\left(\dfrac{AB}{OA}\right) \times \dfrac{180}{\pi}$ $\dfrac{\overline{OA} \times \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}}$ 5,0 cm 0,22 m $\overline{OA'} = -15$ cm (b)

après (b) $\dfrac{\overline{OA'} \times f'}{f' - \overline{OA'}}$ Correct $\dfrac{D^2 - d^2}{4D}$ $\dfrac{-f'^2}{\overline{F'A'}}$ $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

► Réponses et corrigés page 245

Cinématique

Prérequis
Produit scalaire. Équations différentielles d'ordre 1. Projections de vecteurs.

Déplacements rectilignes

Entraînement 10.1 — Distance et temps de parcours.

Une voiture se déplace en ligne droite à $90\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.

Toutes les réponses seront exprimées en « heures-minutes-secondes », par exemple « 2 h 32 min 12 s ».

a) Combien de temps faut-il à cette voiture pour parcourir 100 km ? .....

b) Quel serait l'allongement du temps de trajet si elle roulait à $80\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$? ....

Entraînement 10.2 — Distance parcourue.

Une voiture se déplace en ligne droite. Initialement à l'arrêt, elle subit une accélération constante valant a_0 pendant une durée τ_1, puis continue à vitesse constante pendant une durée τ_2.

a) Quelle est la vitesse v_1 du véhicule à la date $t = \tau_1$? .....

b) Quelle est la distance parcourue durant τ_1 ? .....

c) Quelle est la distance totale parcourue en fonction de a_0, τ_1 et τ_2 ? .....

Entraînement 10.3 — Longueur d'une piste de décollage.

Pour décoller un avion doit atteindre la vitesse de $v_d = 180\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ en bout de piste.
Quelle est la longueur minimale L de la piste de décollage si l'avion accélère uniformément à la valeur $a = 2{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$?

(a) 300 m (b) 450 m (c) 500 m (d) 650 m

.....

Entraînement 10.4 — Distance de freinage.

Une voiture roule à $110\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ en ligne droite. En supposant que les freins imposent une décélération constante de norme $a = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, déterminer la distance d'arrêt de la voiture.

(a) 37,8 m (b) 46,7 m (c) 55,9 m (d) 63,5 m

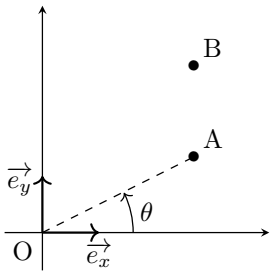
.....

Coordonnées et projections de vecteurs

Entraînement 10.5 — Composantes de vecteurs.

On considère deux points A et B tels que la droite (AB) est parallèle à la droite (Oy). Le vecteur $\overrightarrow{\text{OA}}$ fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Exprimer les composantes des vecteurs suivants dans le repère $(\text{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ en fonction de $a = \left\|\overrightarrow{\text{OA}}\right\|$, $b = \left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|$ et de l'angle θ.



a) $\overrightarrow{\text{OA}}$ .....

b) $\overrightarrow{\text{OB}}$ .....

c) $\overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{OB}}$ .....

d) $\overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{OB}}$ .....

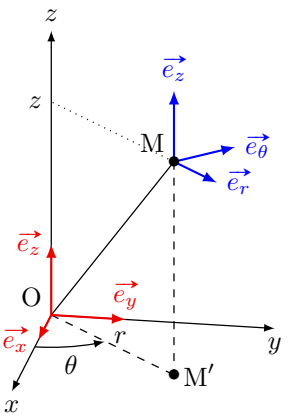
Entraînement 10.6 — Les coordonnées cylindriques.

On considère le schéma ci-contre, dans lequel

- la base cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$
- et la base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

sont définies.

Le point M est repéré par la donnée de r, θ et z.



a) Écrire le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}'}$ dans la base cartésienne .....

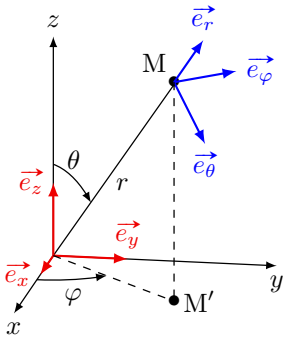
b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}'}$ dans la base cylindrique .....

c) Écrire le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ dans la base cartésienne .....

d) Écrire le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ dans la base cylindrique .....

Entraînement 10.7 — Les coordonnées sphériques.

On considère le schéma ci-dessous, dans lequel la base cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et la base sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ sont définies.



Le point M est repéré par la donnée de r, θ et φ.

a) Écrire la norme de $\overrightarrow{\mathrm{OM'}}$ en fonction de r et θ .....

b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM'}}$ dans la base cartésienne .....

c) Écrire le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans la base cartésienne .....

d) Écrire le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans la base sphérique .....

e) Écrire le vecteur $\vec{e_z}$ dans la base sphérique .....

Entraînement 10.8 — Jouons au tennis.

Un élève regarde un match de tennis. Il filme un des échanges et décide d'étudier le mouvement de la balle pour en déduire sa vitesse et son accélération.

Pour cela, il utilise un logiciel d'exploitation de vidéo et remplit le tableau suivant :

t (en s)	0	0,05	0,10	0,15	0,20
x (en m)	0	0,35	0,70	1,05	1,40
y (en m)	1,5	2,09	2,66	3,21	3,74

a) Déterminer la vitesse v_0 (en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$) de la balle à l'instant initial .....

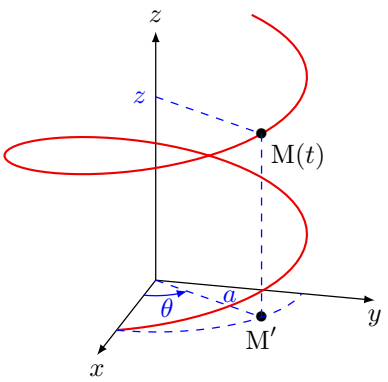
b) Déterminer l'accélération (en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) de la balle à l'instant initial .....

Dérivée de vecteurs

Entraînement 10.9 — Étude d'un mouvement hélicoïdal.

Le point matériel M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrit une trajectoire hélicoïdale, définie par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \times \cos(\omega t) \\ y(t) = a \times \sin(\omega t) \\ z(t) = b \times t. \end{cases}$$



a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(\mathrm{M})$ dans la base cartésienne .....

b) Déterminer la norme de la vitesse .....

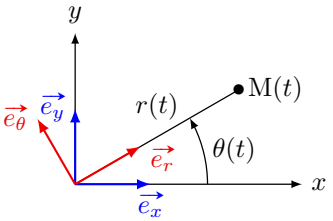
c) Déterminer l'accélération $\vec{a}(\mathrm{M})$ dans la base cartésienne .....

d) Déterminer la norme de l'accélération .....

Entraînement 10.10 — Dérivation des vecteurs unitaires de la base polaire.

On considère un point $\mathrm{M}(t)$ en mouvement dans le plan $(x\mathrm{O}y)$.

On note $r(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées de $\mathrm{M}(t)$ dans le repère polaire $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.



a) Exprimer le vecteur $\vec{e_r}$ dans la base cartésienne $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ .....

b) En déduire la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t}$ dans la base cartésienne $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ .....

c) Exprimer le vecteur $\vec{e_x}$ dans la base polaire $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ .....

d) Exprimer le vecteur $\vec{e_y}$ dans la base polaire $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ .....

e) En déduire l'expression de la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t}$ dans la base polaire .....

Entraînement 10.11 — Calcul d'une vitesse en coordonnées polaires.

On considère un point M dont les coordonnées polaires sont $\begin{cases} r(t) = a \times t \\ \theta(t) = b \times t^2. \end{cases}$

La vitesse en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta},$$

où $\dot{r}\,\vec{e_r}$ est appelée *vitesse radiale* et $r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ *vitesse orthoradiale.*

a) Déterminer la dimension de a .....

b) Déterminer la dimension de b .....

c) Déterminer la vitesse radiale en fonction de a .....

d) Déterminer la vitesse orthoradiale en fonction de a, b et t .....

e) En déduire l'expression de $\vec{v}(\mathrm{M})$ .....

Entraînement 10.12 — Mouvement en spirale.

Un point M(t) décrit une trajectoire en forme de spirale. Dans le repère polaire $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$, les coordonnées de M($t$) sont :

$$\begin{cases} r(t) = r_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$

où r_0, τ et ω sont des constantes positives.

a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(\mathrm{M})$ en coordonnées polaires.

On pourra utiliser la formule donnée dans l'entraînement précédent .....

L'accélération en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{a}(\mathrm{M}) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e_\theta}.$$

b) Déterminer l'accélération $\vec{a}(\mathrm{M})$ .....

On donne les valeurs suivantes : $\omega = 4{,}78\,\mathrm{tour}\cdot\mathrm{min}^{-1}$, $\tau = 2{,}0\,\mathrm{s}$ et $r_0 = 4{,}0\,\mathrm{cm}$.

c) Dans ces conditions, l'accélération est-elle radiale ou orthoradiale ? .....

d) Le mouvement de M est-il accéléré ou décéléré ? .....

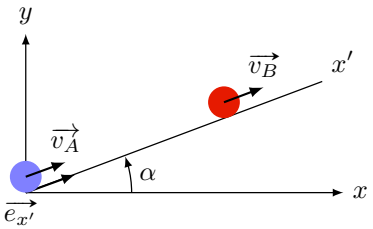
e) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire de M .....

Étude de quelques mouvements

Entraînement 10.13 — Collision sur plan incliné.

Deux billes évoluent sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale.

À $t = 0$, elles sont distantes d'une longueur L.



- La bille A possède une vitesse initiale $v_0\overrightarrow{e_{x'}}$.
  Son accélération $\vec{a}(A) = -a\overrightarrow{e_{x'}}$ est constante au cours du temps.
  Nous noterons $v_A(t)\overrightarrow{e_{x'}}$ sa vitesse à l'instant t.
- La bille B quant à elle, n'a pas de vitesse initiale mais possède une accélération constante $\vec{a}(B) = a\overrightarrow{e_{x'}}$.
  Nous noterons $v_B(t)\overrightarrow{e_{x'}}$ sa vitesse à l'instant t.

On donne $a = 3{,}35\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ et $v_0 = 3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

a) Exprimer $v_A(t)$ en fonction a, t et v_0 .....

b) Exprimer $v_B(t)$ en fonction a et t .....

c) Déterminer la position x'_A de A en fonction du temps .....

d) Déterminer la position x'_B de B en fonction du temps .....

e) Déterminer la distance L minimale (en cm) pour qu'une collision puisse avoir lieu.

.....

Entraînement 10.14 — Chute libre.

On considère le point M de masse m et de coordonnées (x, y, z) dans la base cartésienne $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

Il est lancé avec la vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_{0x}\overrightarrow{e_x} + v_{0z}\overrightarrow{e_z}$ à partir de l'origine O du repère dans le champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$.

Tout frottement étant négligé, l'accélération de M est égale à $\overrightarrow{g}$ à tout instant.

a) Exprimer $x(t)$ en fonction de v_{0x} et t .....

b) Exprimer $z(t)$ en fonction de v_{0z}, g et t .....

c) En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire z en fonction de x,
c'est-à-dire une relation entre $x(t)$ et $z(t)$ .....

Entraînement 10.15 — Pauvre gazelle.

Un lion chasse une gazelle. Il court à la vitesse constante de $5{,}0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. La gazelle aperçoit le lion quand il est à 10 m de distance. Elle se met alors en fuite en accélérant à $2{,}0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Pour rattraper la gazelle, le lion se met aussi à accélérer au même instant à $3{,}0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

a) Combien de temps mettra le lion à rattraper la gazelle ? .....

b) Quelle distance aura parcourue la gazelle avant de se faire dévorer ? .....

Réponses mélangées

$\vec{e_y} = \sin\theta\vec{e_r} + \cos\theta\vec{e_\theta}$ $\quad -a\omega^2(\cos(\omega t)\vec{e_x} + \sin(\omega t)\vec{e_y})$ $\quad r\sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e_x} + \sin(\varphi)\vec{e_y})$

$a\vec{e_r} + 2abt^2\vec{e_\theta}$ $\quad$ (b) $\quad a\omega(-\sin(\omega t)\vec{e_x} + \cos(\omega t)\vec{e_y}) + b\vec{e_z}$ $\quad r = r_0\mathrm{e}^{-\theta}$ $\quad \frac{1}{2}at^2 + L$

$a\vec{e_r}$ $\quad a(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y})$ $\quad 8{,}0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ $\quad a_0 \times \tau_1$ $\quad -b\vec{e_y}$ $\quad$ orthoradiale

$-at + v_0$ $\quad -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ $\quad a\left(\cos(\theta)\vec{e_x} + \left(\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e_y}\right)$ $\quad 67\,\mathrm{cm}$ $\quad \frac{a_0 \times {\tau_1}^2}{2}$

$r\vec{e_r}$ $\quad \frac{L}{T}$ $\quad r\sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e_x} + \sin(\varphi)\vec{e_y}) + r\cos(\theta)\vec{e_z}$ $\quad 1{,}7\,\mathrm{s}$ $\quad \frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$49{,}4\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ $\quad 8\,\mathrm{min}\ 20\,\mathrm{s}$ $\quad \cos(\theta)\,\vec{e_r} - \sin(\theta)\,\vec{e_\theta}$ $\quad 2{,}9\,\mathrm{m}$ $\quad \cos\theta\vec{e_x} + \sin\theta\vec{e_y}$

(c) $\quad \sqrt{(a\omega)^2 + b^2}$ $\quad r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ $\quad 2abt^2\vec{e_\theta}$ $\quad 1\,\mathrm{h}\ 6\,\mathrm{min}\ 40\,\mathrm{s}$ $\quad r\vec{e_r}$ $\quad at$ $\quad \frac{1}{T^2}$

$r(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y}) + z\vec{e_z}$ $\quad \vec{e_x} = \cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}$ $\quad |r\sin(\theta)|$ $\quad v_{0x}t$ $\quad$ décéléré

$a\omega^2$ $\quad r(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y})$ $\quad r_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\vec{e_r} + \omega\vec{e_\theta}\right)$ $\quad z = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x$

$a\left(2\cos(\theta)\vec{e_x} + \left(2\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e_y}\right)$ $\quad r_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{e_r} - \left(2\frac{\omega}{\tau}\right)\vec{e_\theta}\right)$

$\frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{e_x} + \cos\theta\vec{e_y})$ $\quad a_0 \times \tau_1 \times \left(\frac{\tau_1}{2} + \tau_2\right)$ $\quad -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t$

▶ Réponses et corrigés page 250

Principe fondamental de la dynamique

Prérequis
Projections. Coordonnées polaires. Équations différentielles simples.

Pour commencer

Entraînement 11.1 — Une relation algébrique.

La vitesse v (en régime permanent) d'un mobile vérifie l'équation

$$m_1(v - v_1) + m_2(v - v_2) = p.$$

Donner l'expression de v (en fonction de m_1, m_2, v_1, v_2 et p) .....

Entraînement 11.2 — Un système de deux équations.

Un problème de mécanique fait intervenir une force d'intensité F et un angle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En projetant la seconde loi de Newton sur deux axes, on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T + F\sin\alpha = mR\omega^2 \\ F\cos\alpha = mg. \end{cases}$$

a) Déterminer F en fonction des données T, m, R, ω et g. .....

b) Déterminer α en fonction des données T, m, R, ω et g. .....

Entraînement 11.3 — Quelques équations différentielles.

Résoudre les équations différentielles suivantes, sachant que $v = 0$ à $t = t_0$, et que les paramètres a_0 et k sont des constantes.

a) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_0$ .....

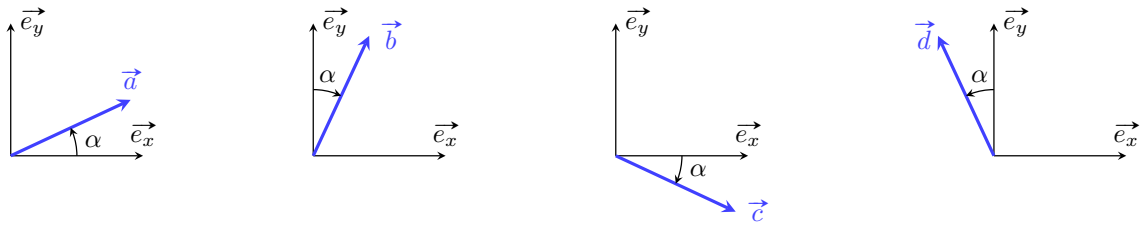
b) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv$ .....

c) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv + a_0$ .....

Décomposition de vecteurs

Entraînement 11.4 — Des projections.

On considère les vecteurs suivants :



Décomposer dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ les vecteurs :

a) $\vec{a}$ .....

b) $\vec{b}$ .....

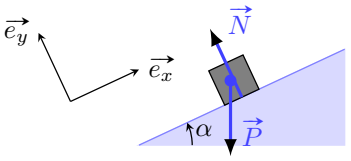
c) $\vec{c}$ .....

d) $\vec{d}$ .....

Entraînement 11.5 — Sur un plan incliné.

On considère la situation représentée ci-contre.

Décomposer dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ les vecteurs suivants.

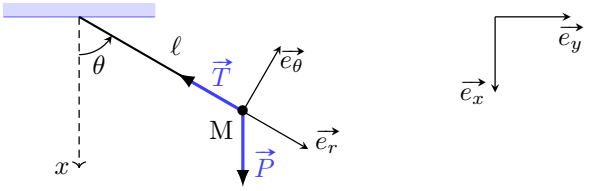


a) $\vec{P}$ .....

b) $\vec{N}$ .....

Entraînement 11.6 — Avec un pendule simple.

On considère la situation



Décomposer dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ les vecteurs suivants :

a) $\vec{P}$ .....

b) $\vec{T}$ .....

c) $\vec{P} + \vec{T}$ .....

Entraînement 11.7 — Avec un pendule simple (suite).

On se place dans la même situation que ci-dessus. Décomposer dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$:

a) $\vec{P}$ .....

c) $\vec{P} + \vec{T}$ .....

b) $\vec{T}$ .....

Entre accélération et position

Entraînement 11.8 — Du vecteur position au vecteur accélération.

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ sont, à chaque instant $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0t$ et $z(t) = z_0$.

Donner les expressions du vecteur :

a) position .....

b) vitesse .....

c) accélération ..

Entraînement 11.9 — Du vecteur accélération au vecteur position.

On considère un point M de masse m en chute libre soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{e_z}$. Ce point M a été lancé avec une vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$ et une position initiale $\mathrm{M}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donner l'expression des vecteurs :

a) accélération .....

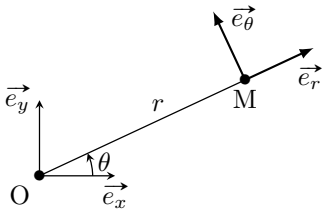
c) position .....

b) vitesse .....

Autour des coordonnées polaires

Dans ce paragraphe, on considère un point M repéré par la distance r et l'angle θ en coordonnées polaires. La distance r et l'angle θ dépendent du temps t : le point M est mobile.

On représente la situation par le schéma ci-contre.



Entraînement 11.10 — Trois calculs fondamentaux.

Décomposer dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ les vecteurs :

a) $\vec{e_r}$ ..... b) $\vec{e_\theta}$ .....

En déduire (en dérivant) l'expression dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ des vecteurs :

c) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t}$ ..... d) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t}$ .....

En déduire l'expression, dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$, des vecteurs :

e) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t}$ ..... f) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t}$ .....

Entraînement 11.11 — Vecteur position en coordonnées polaires.

Comment s'exprime le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en coordonnées polaires ?

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r} + \theta\vec{e_\theta}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r} + \dot{\theta}\vec{e_\theta}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r}$ (d) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \theta\vec{e_\theta}$

.....

Entraînement 11.12 — Accélération en coordonnées polaires.

Déduire de ce qui précède l'expression, en fonction de $\vec{e_r}$ et de $\vec{e_\theta}$:

a) du vecteur vitesse $\vec{v}$ .....

b) du vecteur accélération $\vec{a}$ .....

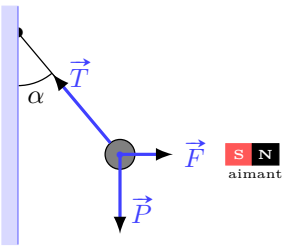
Étude de systèmes en équilibre

Entraînement 11.13 — Tension d'un fil.

Une bille d'acier de poids $P = 2{,}0\,\text{N}$, fixée à l'extrémité d'un fil de longueur $\ell = 50\,\text{cm}$ est attirée par un aimant exerçant une force $F = 1{,}0\,\text{N}$. À l'équilibre, le fil s'incline d'un angle α et l'on a

$$\vec{T} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0},$$

où $\vec{T}$ est la tension exercée par le fil.



Calculer les valeurs numériques de :

a) la tension T du fil .....

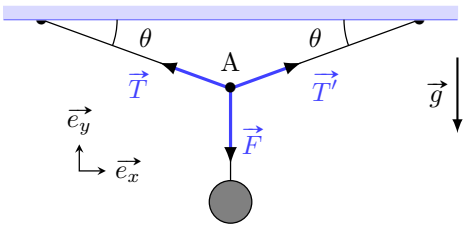
b) l'angle α (en radian) .....

Entraînement 11.14 — Masse suspendue.

Un objet qui pèse 800 N est suspendu en équilibre à l'aide de deux cordes symétriques qui font un angle $\theta = 20°$ avec la direction horizontale.

Le point A est soumis à trois forces :

$$\vec{T}, \vec{T'} \text{ et } \vec{F}.$$



On note $\vec{R}$ la résultante des forces.

a) Exprimer la composante horizontale R_x en fonction de T, T' et θ. .....

b) Exprimer la composante verticale R_y en fonction de T, T', F et θ. .....

c) Déterminer la tension T en résolvant l'équation $\vec{R} = \vec{0}$. .....

Mouvements rectilignes

Entraînement 11.15 — Chute avec frottement.

Un corps de masse $m = 2\,\text{kg}$ tombe verticalement avec une accélération de $a = 9\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Lors de sa chute il subit la force de pesanteur ainsi qu'une force de frottement due à l'air.

On prendra $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de la force de frottement ? .....

Entraînement 11.16 — Contact dans un ascenseur.

Un homme de masse $m = 80\,\text{kg}$ est dans un ascenseur qui monte avec une accélération $a = 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. On note $\vec{F}$ la force exercée par l'homme sur le plancher de l'ascenseur.

On prendra $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de $\vec{F}$? .....

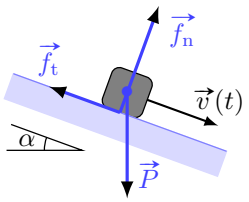
Entraînement 11.17 — Calcul d'une action de contact.

Un bloc de masse m, de poids $\vec{P}$ glisse à une vitesse $v(t)$, variable au cours du temps, sur un support plan qui exerce une action de contact.

Celle-ci se décompose en deux actions :

- une action normale à la surface $\vec{f_\text{n}}$;
- une action de frottement $\vec{f_\text{t}}$ opposée à la vitesse de glissement.

Le plan est incliné d'un angle α, comme figuré ci-dessous.



Déterminer (en fonction d'au moins une des données P, $v(t)$, m et α) :

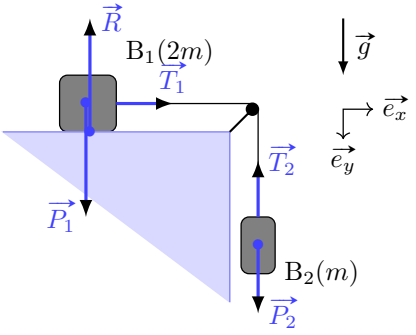
a) l'intensité de l'action normale f_n .....

b) l'intensité du frottement f_t .....

Entraînement 11.18 — Calcul d'une accélération.

Deux blocs B_1 et B_2 de masse respective $2m$ et m sont reliés par un fil. On passe le fil dans la gorge d'une poulie, puis on maintient le bloc B_1 sur la table alors que l'autre est suspendu dans l'air. On libère le bloc B_1 qui glisse alors sur la table. On note T_1 et T_2 les tensions exercées par le fil sur les blocs, a_1 et a_2 les accélérations respectives des blocs B_1 et B_2, et g le champ de pesanteur.

Les frottements sont négligeables.



a) Exprimer a_1 en fonction de m et T_1. .....

b) Exprimer l'accélération a_2 de B_2 en fonction de m, g et T_2. .....

Le fil étant inextensible et sans masse on a $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$.

c) En déduire l'accélération en fonction uniquement de g .....

Réponses mélangées

$\arctan\left(\dfrac{mR\omega^2 - T}{mg}\right)$ $\quad a_0 t\vec{e_x} - v_0\vec{e_y}$ $\quad a_0\vec{e_x}$ $\quad P\vec{e_x}$ $\quad \dfrac{g}{3}$ $\quad v_0\vec{e_x} + gt\vec{e_z}$

$2{,}2\,\text{N}$ $\quad 864\,\text{N}$ $\quad -T\cos(\theta)\vec{e_x} - T\sin(\theta)\vec{e_y}$ $\quad b\sin(\alpha)\vec{e_x} + b\cos(\alpha)\vec{e_y}$

$\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e_\theta}$ $\quad (v_0 t + x_0)\vec{e_x} + y_0\vec{e_y} + \dfrac{1}{2}gt^2\vec{e_z}$ $\quad -d\sin(\alpha)\vec{e_x} + d\cos(\alpha)\vec{e_y}$

$\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y}$ $\quad -P\sin(\alpha)\vec{e_x} - P\cos(\alpha)\vec{e_y}$ $\quad (T' + T)\sin\theta - F$

$\left(\dfrac{1}{2}a_0 t^2 + x_0\right)\vec{e_x} - v_0 t\vec{e_y} + z_0\vec{e_z}$ $\quad g\vec{e_z}$ $\quad g - \dfrac{T_2}{m}$ $\quad 0{,}46\,\text{rad}$ $\quad$ (c) $\quad -\dot{\theta}\vec{e_r}$

$-T\vec{e_r}$ $\quad (P\cos(\theta) - T)\vec{e_r} - P\sin(\theta)\vec{e_\theta}$ $\quad 1{,}6\,\text{N}$ $\quad a\cos(\alpha)\vec{e_x} + a\sin(\alpha)\vec{e_y}$ $\quad \dfrac{T_1}{2m}$

$-\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e_x} - \dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e_y}$ $\quad \sqrt{(mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2}$ $\quad (T' - T)\cos\theta$ $\quad -m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + P\sin\alpha$

$-\sin(\theta)\vec{e_x} + \cos(\theta)\vec{e_y}$ $\quad (P - T\cos(\theta))\vec{e_x} - T\sin(\theta)\vec{e_y}$ $\quad P\cos(\theta)\vec{e_r} - P\sin(\theta)\vec{e_\theta}$

0 $\quad \dfrac{a_0}{k}\left[1 - \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\right]$ $\quad \dot{\theta}\vec{e_\theta}$ $\quad a_0(t - t_0)$ $\quad \dfrac{p + m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $\quad \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$P\cos\alpha$ $\quad N\vec{e_y}$ $\quad c\cos(\alpha)\vec{e_x} - c\sin(\alpha)\vec{e_y}$ $\quad -\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e_x} + \dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e_y}$ $\quad 1{,}17\,\text{kN}$

▶ Réponses et corrigés page 256

Approche énergétique en mécanique

Prérequis
Systèmes de coordonnées. Expression de forces (poids, force de rappel). Travail d'une force. Théorèmes généraux (dynamique et énergétiques).

Énergies potentielles

Entraînement 12.1 — La juste formule.

On considère un point matériel de masse m plongé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On se place dans un repère cartésien $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ tel que $\vec{g} = -g\vec{e_y}$, le point O étant pris comme origine de l'énergie potentielle. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?

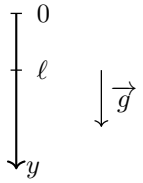
(a) mgx (b) $-mgy$ (c) mgy (d) mgz

.....

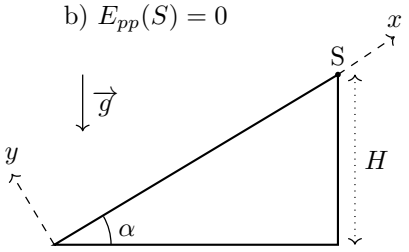
Entraînement 12.2 — Plusieurs expressions d'énergie potentielle de pesanteur.

Déterminer la fonction énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse m associée aux situations suivantes :

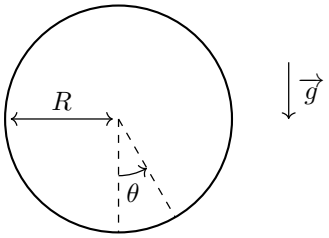
a) $E_{pp}(\ell) = 0$



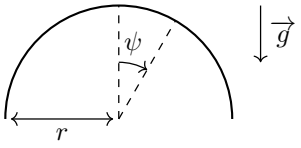
b) $E_{pp}(S) = 0$



c) $E_{pp}(\theta = \pi/2) = 0$



d) $E_{pp}(\psi = 0) = E_0$



a) $E_{pp}(y) =$ .....

b) $E_{pp}(x) =$ .....

c) $E_{pp}(\theta) =$ .....

d) $E_{pp}(\psi) =$ .....

Entraînement 12.3 — La juste formule... le retour.

On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer selon un axe (Oy) horizontal. Il est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est fixée en O.

Quelle est l'expression de l'énergie potentielle élastique du point M pour que celle-ci soit nulle lorsque l'allongement du ressort est nul ?

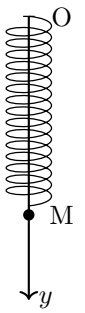
(a) $\frac{1}{2}ky^2$ (b) $\frac{1}{2}k(y-\ell_0)^2$ (c) $\frac{1}{2}k(y^2-{\ell_0}^2)$ (d) $-\frac{1}{2}k(\ell_0-y)^2$

.....

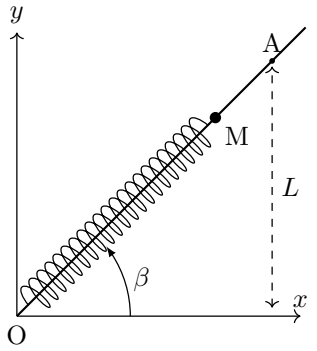
Entraînement 12.4 — Expression de l'énergie potentielle élastique.

Déterminer la fonction énergie potentielle élastique associée aux situations suivantes, où tous les ressorts sont de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k :

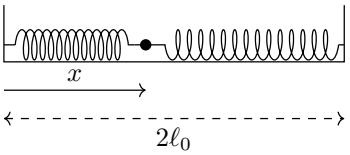
a) $E_{pe}(y=0)=0$



b) $E_{pe}(A)=0$



c) $E_{pe}(x=\ell_0)=E_0$



a) $E_{pe}(y) =$ .....

b) $E_{pe}(x) =$ .....

c) $E_{pe}(x) =$ .....

Travail d'une force

Entraînement 12.5 — Une force de frottement.

On considère le travail $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ d'une force de frottement $\vec{F} = -h\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du point matériel subissant la force et h est une constante.

Déterminer W pour les chemins suivants :

a) Un segment reliant $A(0,0)$ et $B(\ell,0)$ .....

b) Un arc de cercle d'angle α et de rayon R .....

c) Un rectangle ABCD de côtés a et b .....

d) Un triangle ABC de côtés a, b, c .....

e) En comparant les résultats obtenus, peut-on dire que la force est conservative ?

(a) Oui (b) Non

.....

Théorèmes énergétiques

Entraînement 12.6 — Freinage et variation d'énergie cinétique.

On considère une voiture (assimilée à un point matériel de masse m) se déplaçant le long d'une route rectiligne horizontale et dont la vitesse initiale au début de la phase de freinage vaut $\vec{v} = v_0\vec{e_x}$.

En freinant, le véhicule est soumis à une force de frottement $\vec{F} = -h\vec{e_x}$.

Quelle est l'expression de la distance d'arrêt d de la voiture ?

(a) $\dfrac{2m{v_0}^2}{h}$ (b) $\dfrac{m{v_0}^2}{h}$ (c) $\dfrac{m{v_0}^2}{2h}$

.....

Entraînement 12.7 — Pendule simple.

Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur $\ell = 1{,}0\,\mathrm{m}$ auquel est accroché une masse $m = 100\,\mathrm{g}$.

À $t = 0$, on donne à cette masse une vitesse horizontale $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$ où $v_0 = 2{,}0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

On note θ_0 l'angle pour lequel la masse rebrousse chemin.

a) Exprimer $\cos(\theta_0)$ .....

b) Calculer θ_0 .....

Entraînement 12.8 — Trampoline simplifié.

Un ressort de longueur à vide $\ell_0 = 30\,\text{cm}$, de raideur $k = 1{,}0 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, sans masse, est posé sur le sol à la verticale. On lâche d'une hauteur $H = 2{,}0\,\text{m}$ et sans vitesse initiale une masse ponctuelle $m = 1{,}0\,\text{kg}$. Après une durée de chute libre sans frottement, la masse atteint le ressort, le comprime jusqu'à ce que celui-ci la propulse vers le haut comme le ferait un trampoline.

En admettant que la masse quitte le ressort quand $z = \ell_0$, calculer :

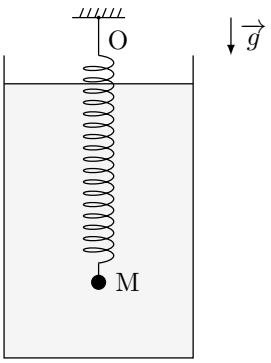
a) La vitesse de la masse lors du contact avec le ressort .....

b) L'altitude minimale atteinte par la masse .....

c) L'altitude maximale de la masse (en fin de remontée) .....

Entraînement 12.9 — Oscillateur vertical.

Un point M de masse m est accroché à une paroi horizontale fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Son mouvement s'effectue dans un liquide qui produit une force de frottements fluides linéaire $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, où $\alpha > 0$. On néglige la poussée d'Archimède, on ne considère que des mouvements verticaux dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.



a) On note z la position de M par rapport à O.

Déterminer, par une méthode énergétique, l'équation différentielle vérifiée par z.

.....

b) On note à présent ζ la position de M par rapport à sa position à l'équilibre.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ζ.

.....

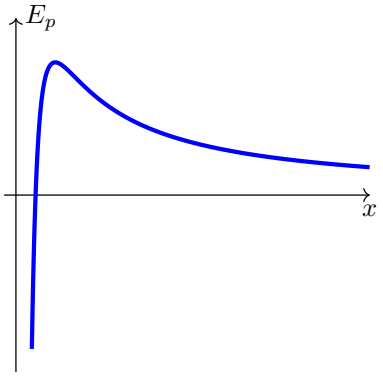
Entraînement 12.10 — Profils d'énergies potentielles.

Les quatre profils suivants représentent la fonction énergie potentielle

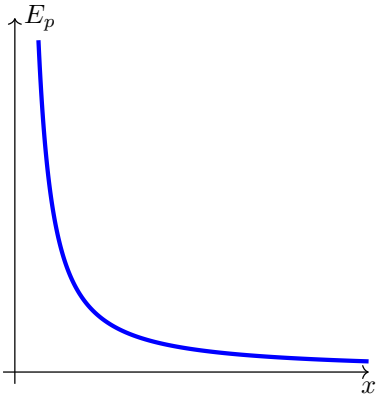
$$E_p(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}$$

avec α, β des réels non nuls.

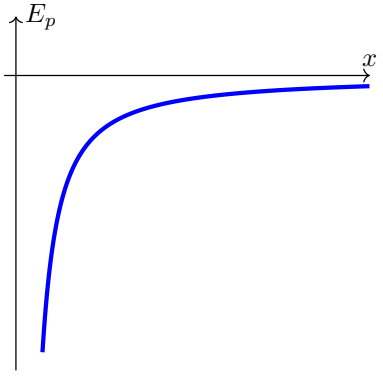
Énergie potentielle n° 1



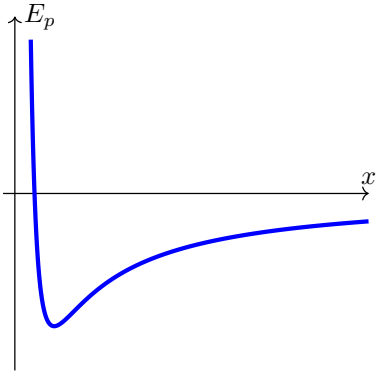
Énergie potentielle n° 3



Énergie potentielle n° 2



Énergie potentielle n° 4



Attribuer à chacune des figures ci-dessus les bons signes pour α et β, en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne :

(a) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

(b) $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

(c) $\alpha < 0$ et $\beta > 0$

(d) $\alpha < 0$ et $\beta < 0$

a) Énergie potentielle n° 1 ..... ☐

b) Énergie potentielle n° 2 ..... ☐

c) Énergie potentielle n° 3 ..... ☐

d) Énergie potentielle n° 4 ..... ☐

Entraînement 12.11 — Autour d'une position d'équilibre.

On donne l'expression de potentiels E_p dans chacun desquels évolue un point matériel de masse m.

Déterminer dans chaque cas la position d'équilibre stable.

a) Pour $E_p(\theta) = mg\ell(1-\cos(\theta))$:

$\theta_{\text{eq}} =$ .....

b) Pour $E_p(z) = \frac{1}{2}\kappa z^2 + \frac{1}{4}\lambda z^4$ avec $\kappa > 0$ et $\lambda < 0$:

$z_{\text{eq}} =$ .....

c) Pour $E_p(x) = U_0\,\mathrm{e}^{\beta x^2}$ avec $U_0, \beta > 0$:

$x_{\text{eq}} =$ .....

d) Pour $E_p(\phi) = E_0 \sin^2(\phi - a)$ avec $E_0 > 0$, $\phi \in [0, \pi[$ et $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

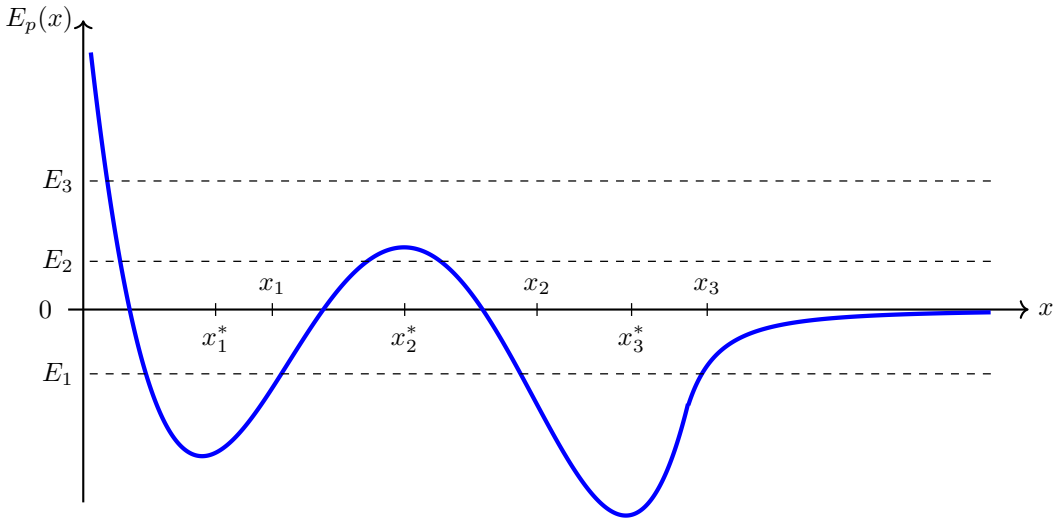
$\phi_{\text{eq}} =$ .....

Entraînement 12.12 — État lié ou état de diffusion ?

On considère le profil suivant d'énergie potentielle (les abscisses étoilées et l'abscisse x_3 serviront dans l'entraînement suivant).

Pour chaque état suivant, étant donné les valeurs de l'énergie mécanique et de la position initiale d'un point matériel, dire si ce dernier se trouve :

(a) dans un état lié (b) un état de diffusion.



a) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_1$ .....

b) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_2$ .....

c) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_1$ .....

d) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_2$ .....

e) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_1$ .....

f) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_2$ .....

Entraînement 12.13 — Analyse d'un profil d'énergie potentielle.

On reprend le profil d'énergie potentielle de l'entraînement précédent.

Pour chacune des positions suivantes, déterminer si elle est stable ou instable, et si le mouvement au voisinage de ces positions est périodique et/ou harmonique, en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne.

(a) équilibre stable
(b) équilibre instable
(c) mouvement périodique
(d) mouvement harmonique

Plusieurs bonnes réponses sont possibles.

a) Voisinage de x_1^* .....
b) Voisinage de x_2^* .....
c) Voisinage de x_3^* .....
d) Région entre x_2 et x_3 .....

Entraînement 12.14 — Vitesse à l'infini.

On considère le profil d'énergie potentielle des deux entraînements précédents.

Un point matériel de masse $m = 2{,}30\,\text{kg}$ est abandonné avec l'énergie $E_3 = 1{,}30\,\text{kJ}$.

Calculer la vitesse du point matériel à l'infini .....

Réponses mélangées

(b) $1 - \frac{{v_0}^2}{2g\ell}$ (a) (b) 0 (b) $33{,}6\,\text{m/s}$ (a), (c) et (d)

$-hR\alpha$ $mg(x\sin(\alpha) - H)$ $mg(\ell - y)$ $mgr\big(\cos(\psi) - 1\big) + E_0$ a

$\frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2$ $0{,}65\,\text{rad} = 37°$ (a) et (c) $0{,}11\,\text{m}$ (a) 0

(b) $E_0 + k(x - \ell_0)^2$ (c) $\zeta + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\zeta = 0$ (c) $\frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 - \frac{k{\ell_0}^2}{2}$ $-h\ell$

$5{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}$ (a) $2{,}0\,\text{m}$ (a) 0 (a), (c) et (d)

(b) $-(a + b + c)h$ $-mgR\cos(\theta)$ (d) (c) (b) (b) $-(2a + 2b)h$

► Réponses et corrigés page 262

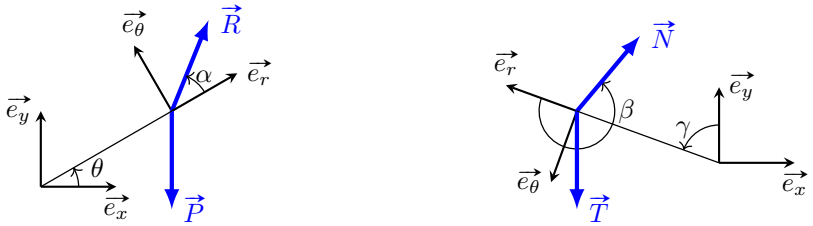
Moment cinétique

Prérequis
Coordonnées polaires. Projections. Produit vectoriel. Moment cinétique. Moment d'inertie. Moment d'une force.

Projections préparatoires

Entraînement 13.1 — Calculs de produits scalaires.

On considère les vecteurs suivants où $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont verticaux.



Calculer les produits scalaires suivants en fonction des normes ($\|\vec{P}\|$, $\|\vec{T}\|$, *etc.*) ainsi que des différents angles apparaissant sur les schémas.

a) $\vec{P} \cdot \vec{e_\theta}$ ..

c) $\vec{R} \cdot \vec{e_y}$ ..

e) $\vec{N} \cdot \vec{e_r}$ ..

b) $\vec{N} \cdot \vec{e_y}$.

d) $\vec{T} \cdot \vec{e_r}$ ..

f) $\vec{N} \cdot \vec{e_\theta}$ ..

Entraînement 13.2 — Projections dans une base.

En utilisant la formule donnant la décomposition d'un vecteur $\vec{v}$ dans une base orthonormée $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e_1})\, \vec{e_1} + (\vec{v} \cdot \vec{e_2})\, \vec{e_2},$$

décomposer les vecteurs de l'exercice précédent dans chaque base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ et $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.

a) $\vec{P}$ dans $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$.

b) $\vec{P}$ dans $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.

c) $\vec{T}$ dans $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$.

d) $\vec{T}$ dans $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.

e) $\vec{R}$ dans $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$.

f) $\vec{R}$ dans $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.

g) $\vec{N}$ dans $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$.

h) $\vec{N}$ dans $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.

Produit vectoriel

Entraînement 13.3 — Produits vectoriels à partir de décompositions.

En utilisant le schéma du premier exercice et les décompositions du deuxième, donner l'expression des produits vectoriels suivants. Comme d'habitude, on complète la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ par le vecteur $\vec{e_z}$ suivant la « règle de la main droite ».

a) $\vec{P} \wedge \vec{R}$ ...

b) $\vec{T} \wedge \vec{e_r}$ ...

c) $\vec{e_x} \wedge \vec{N}$ ..

Entraînement 13.4 — Produits vectoriels à partir des coordonnées.

On donne les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ définis de manière numérique :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits vectoriels et produits scalaires suivant :

a) $\vec{A} \wedge \vec{B}$ .....

b) $(\vec{B} + \vec{A}) \wedge \vec{A}$ .....

c) $\vec{e_x} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$ .....

d) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{e_x})$ .....

e) $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$ .....

f) $(\vec{A} \cdot \vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\,\vec{C}$ .....

Moment cinétique

Entraînement 13.5 — Bataille de moments cinétiques.

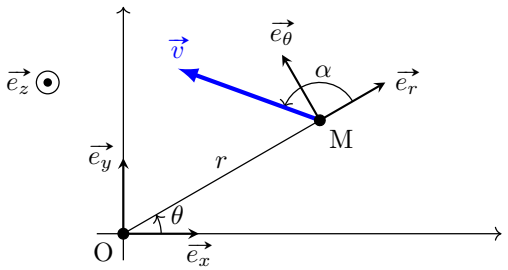
Parmi les quatre planètes décrites dans le tableau ci-dessous, laquelle présente le moment cinétique autour du Soleil le plus important ?

	Masse	Distance au Soleil	Vitesse sur l'orbite
Mercure	$3 \times 10^{26}\,\mathrm{g}$	$58 \times 10^{9}\,\mathrm{m}$	$170 \times 10^{3}\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$
Vénus	$5 \times 10^{27}\,\mathrm{g}$	$1{,}1 \times 10^{13}\,\mathrm{cm}$	$35 \times 10^{3}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Terre	$6 \times 10^{21}\,\mathrm{t}$	$150 \times 10^{6}\,\mathrm{km}$	$30\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$
Mars	$6 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}$	$230 \times 10^{6}\,\mathrm{km}$	$87 \times 10^{5}\,\mathrm{cm \cdot h^{-1}}$

.....

Entraînement 13.6 — Un moustique allumé.

On considère un moustique M de masse m dont le vecteur vitesse de norme v fait un angle $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ avec le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ comme représenté dans le schéma ci-dessous.



Exprimer le moment cinétique du moustique M par rapport à O en fonction de m, r, v et α

.....

Moments d'inertie

Entraînement 13.7 — Une porte d'entrée.

On considère une porte de masse M, de longueur L, de hauteur h et d'épaisseur e négligeable dont on veut calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical passant par O situé dans le coin inférieur gauche de la porte.

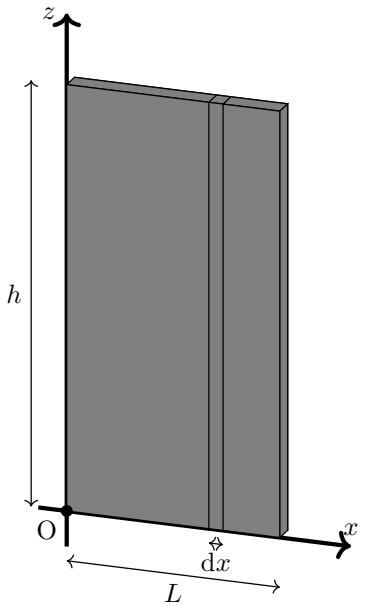
La masse est répartie de manière homogène sur toute la porte, de sorte que chaque petit volume $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ ait pour masse

$$\mathrm{d}m = \rho\ \mathrm{d}V$$

avec $\rho = \dfrac{M}{Lhe}$.

Dans cette configuration, le moment d'inertie s'écrit

$$I_\Delta = \iiint_{\text{porte}} x^2\ \mathrm{d}m = \rho \int_0^L x^2\ \mathrm{d}x \times \int_0^e \mathrm{d}y \times \int_0^h \mathrm{d}z.$$

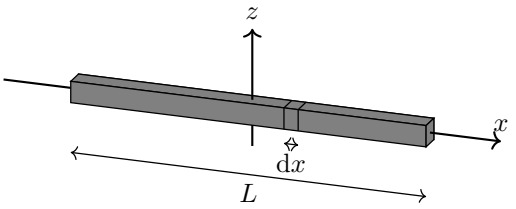


Exprimer I_Δ en fonction de M et L .....

Entraînement 13.8 — Un bâton de majorette.

On considère un bâton de masse M, de longueur L et de section négligeable dont on veut calculer le moment d'inertie par rapport à son centre O.

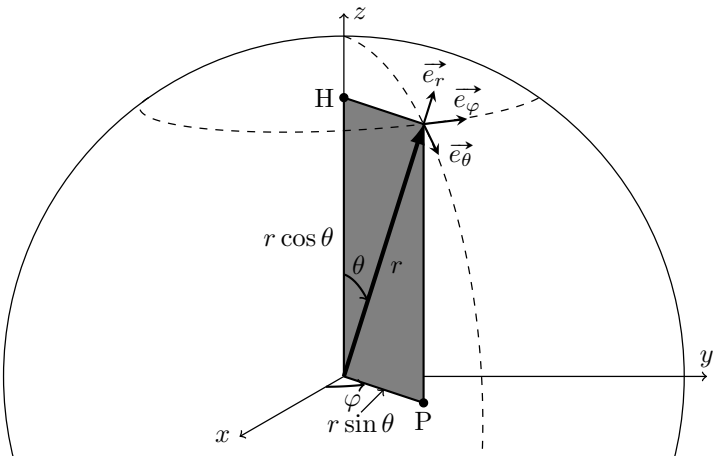
La masse est régulièrement répartie uniquement selon une variable x, de sorte que le bout de bâton de longueur $\mathrm{d}x$ situé à une distance x du centre ait pour masse $\mathrm{d}m = \dfrac{M}{L}\,\mathrm{d}x$.



Pour une rotation par rapport à un axe $(\mathrm{O}z)$ orthogonal à l'axe $(\mathrm{O}x)$ du bâton, et passant par son centre, calculer en fonction de M et L l'expression du moment d'inertie. C'est-à-dire, calculer :

$$I_\Delta = \int_{\text{bâton}} x^2\,\mathrm{d}m = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M}{L}\,x^2\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Entraînement 13.9 — Une boule de bowling.



On considère une boule homogène de masse M et de rayon R.

Un élément de volume $\mathrm{d}V$ (valant $\mathrm{d}r \times r\,\mathrm{d}\theta \times r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$ en coordonnées sphériques) correspond à une masse $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$ avec $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

Ces éléments de masse sont situés à une distance $r\sin\theta$ de l'axe $(\mathrm{O}z)$ de sorte que le moment d'inertie par rapport à cet axe puisse s'écrire

$$I_\Delta = \iiint_{\text{sphère}} (r\sin\theta)^2\,\mathrm{d}m = \rho \int_0^R r^4\,\mathrm{d}r \times \int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi.$$

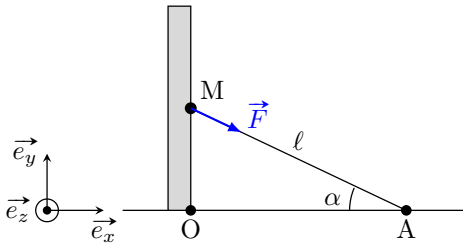
Exprimer I_Δ en fonction de M et R .....

Moment d'une force

Entraînement 13.10 — Fil accroché au mur.

On considère un mur auquel est accroché un filin qu'on tire depuis un point A. Il s'agit de trouver le moment de la force $\vec{F}$ par rapport aux axes (Oz) et (Az) en fonction de F, ℓ et α.

Calculer :



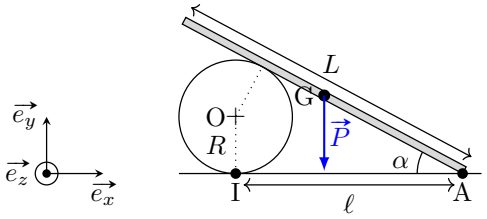
a) $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})$ .....

b) $\mathcal{M}_{Az}(\vec{F})$ .....

Entraînement 13.11 — Une planche de cirque.

On considère une planche homogène de masse m appuyée sur un cylindre.

Calculer le moment du poids de cette planche par rapport aux divers points intéressants du système.



a) $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{P})$ .....

b) $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P})$ .....

c) $\overrightarrow{\mathcal{M}_I}(\vec{P})$ .....

Exercice récapitulatif

Entraînement 13.12 — Basculement d'une barre en T.

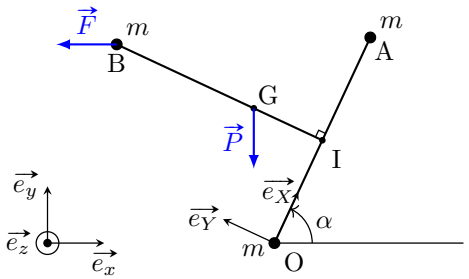
On considère trois masses m réparties aux trois sommets d'un triangle OAB isocèle en B et reliées par des tiges sans masse vérifiant

$$OA = IB = a.$$

On note I le milieu du segment [OA].

On note G le centre de gravité des trois masses, qui est situé sur le segment [IB] de sorte que $GB = \dfrac{2}{3}\,a$.

On notera P et F les normes des deux forces représentées sur le schéma.



a) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OB}$ dans la base $(\vec{e_X}, \vec{e_Y})$ .....

b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OG}$ dans la base $(\vec{e_X}, \vec{e_Y})$ .....

c) Écrire le vecteur $\vec{P}$ dans la base $(\vec{e_X}, \vec{e_Y})$ .....

d) Écrire le vecteur $\vec{F}$ dans la base $(\vec{e_X}, \vec{e_Y})$ .....

e) Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})$ .....

f) Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P})$ .....

g) En supposant qu'il y ait équilibre entre les deux moments, déterminer l'expression $\tan(\alpha)$ dans ce cas.

.....

Réponses mélangées

$\frac{2}{5} M R^2$ $\quad \|\vec{N}\|(\cos(\beta)\,\vec{e_r} + \sin(\beta)\,\vec{e_\theta})$ $\quad \|\vec{N}\|\,\cos(\beta)$ $\quad \|\vec{P}\|\,\|\vec{R}\|\cos(\theta+\alpha)\,\vec{e_z}$

$\|\vec{P}\|(-\sin(\theta)\,\vec{e_r} - \cos(\theta)\,\vec{e_\theta})$ $\quad \|\vec{R}\|(\cos(\theta+\alpha)\,\vec{e_x} + \sin(\theta+\alpha)\,\vec{e_y})$ $\quad -7$ $\quad \|\vec{N}\|\,\sin(\beta)$

$\begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\quad -\|\vec{T}\|\vec{e_y}$ $\quad \vec{T} = \|\vec{T}\|(-\cos(\gamma)\,\vec{e_r} + \sin(\gamma)\,\vec{e_\theta})$ $\quad \frac{a}{2}\,\vec{e_X} + \frac{a}{3}\,\vec{e_Y}$ $\quad \frac{1}{3} M L^2$

$-\|\vec{T}\|\sin(\gamma)\,\vec{e_z}$ $\quad P(-\sin\alpha\,\vec{e_X} - \cos\alpha\,\vec{e_Y})$ $\quad aP\left(-\frac{\cos\alpha}{2} + \frac{\sin\alpha}{3}\right)\vec{e_z}$ $\quad \frac{3P-6F}{3F+2P}$

$\|\vec{N}\|(-\sin(\beta+\gamma)\,\vec{e_x} + \cos(\gamma+\beta)\,\vec{e_y})$ $\quad \|\vec{R}\|\,\sin(\theta+\alpha)$ $\quad aF\left(\frac{\sin\alpha}{2} + \cos\alpha\right)\vec{e_z}$

$-\|\vec{T}\|\,\cos(\gamma)$ $\quad \frac{1}{12} M L^2$ $\quad \begin{pmatrix} -6 \\ -33 \\ 24 \end{pmatrix}$ $\quad m\,r\,v\sin(\alpha)\,\vec{e_z}$ $\quad -7$ $\quad \frac{mgL}{2}\cos\alpha\,\vec{e_z}$

$\begin{pmatrix} -6 \\ -33 \\ 24 \end{pmatrix}$ $\quad F(-\cos\alpha\,\vec{e_X} + \sin\alpha\,\vec{e_Y})$ $\quad \|\vec{N}\|\cos(\gamma+\beta)\,\vec{e_z}$ $\quad \vec{P} = -\|\vec{P}\|\,\vec{e_y}$ $\quad$ la Terre

$-\|\vec{P}\|\,\cos\theta$ $\quad \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad -mg\left(\ell - \frac{L}{2}\cos\alpha\right)\vec{e_z}$ $\quad \frac{a}{2}\,\vec{e_X} + a\,\vec{e_Y}$ $\quad -\ell F \sin\alpha\cos\alpha$

$\|\vec{R}\|(\cos(\alpha)\,\vec{e_r} + \sin(\alpha)\,\vec{e_\theta})$ $\quad 0$ $\quad -mg\left(\ell - \frac{L}{2}\cos\alpha\right)\vec{e_z}$ $\quad \|\vec{N}\|\,\cos(\gamma+\beta)$

► Réponses et corrigés page 268

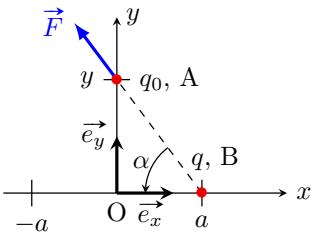
Champ électrique

Prérequis
Projections. Coordonnées polaires. Développement limité.
Dérivation et intégration.

Pour commencer

Entraînement 14.1 — Projection d'une force.

Une charge électrique q située en un point $\mathrm{B}(a,0)$ exerce une force $\vec{F}$ sur une autre charge q_0 située au point $\mathrm{A}(0,y)$.



a) Exprimer la distance BA en fonction de a et de y.

.....

b) Exprimer $\cos(\alpha)$ en fonction de a et y.

.....

c) Exprimer $\sin(\alpha)$ en fonction de a et y.

.....

d) Décomposer le vecteur $\vec{F}$ dans la base $(\vec{e_x},\vec{e_y})$ en fonction de sa norme $\|\vec{F}\|$, a et y.

.....

Entraînement 14.2 — Un combat d'interaction électrique.

On étudie une charge électrique q_0 positive. La valeur de la force F qu'exerce une autre charge q sur q_0 est telle que $F = C\dfrac{q}{d^2}$ où d est la distance entre les deux charges et où C est une constante.

Laquelle de ces quatre charges attire le plus fortement la charge q_0 ?

(a) $q = 2{,}00\,\mathrm{C}$ et $d = 4{,}00\,\mathrm{mm}$
(b) $q = -5{,}0\,\mathrm{kC}$ et $d = 0{,}4\,\mathrm{m}$
(c) $q = -3{,}0\,\mathrm{mC}$ et $d = 200\,\mu\mathrm{m}$
(d) $q = 100\,\mathrm{C}$ et $d = 20\,\mathrm{cm}$

.....

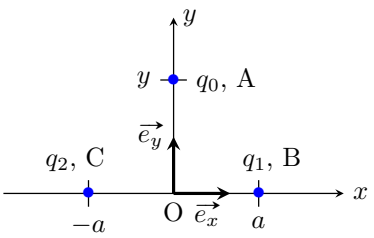
Étude de charges ponctuelles

Entraînement 14.3 — Force due à deux charges.

La loi de Coulomb permet d'exprimer la force $\vec{F}_{1/0}$ exercée par une charge q_1 située en un point B sur une charge q_0 située en un point A :

$$\vec{F}_{1/0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_1}{\mathrm{BA}^2}\vec{e}_{\mathrm{BA}}$$

avec ε_0 la permittivité du vide et $\vec{e}_{\mathrm{BA}}$ le vecteur unitaire munissant le segment BA.



On étudie les forces $\vec{F}_{1/0}$ et $\vec{F}_{2/0}$ exercées respectivement par les charges q_1 et q_2 sur la charge q_0.

Selon les différentes valeurs des charges q_0, q_1 et q_2, déterminer si la résultante des forces $\vec{F} = \vec{F}_{1/0} + \vec{F}_{2/0}$ est orientée selon $\vec{e_x}$, $-\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ ou $-\vec{e_y}$.

a) $q_0 = q_1 = q_2$ .....

b) $-q_0 = -q_1 = q_2$ .....

c) $q_0 = -q_1 = q_2$ .....

d) $-\frac{1}{2}q_0 = q_1 = q_2$ .....

Entraînement 14.4 — Charge accélérée.

On considère une particule de charge q et de masse m se déplaçant le long d'un axe $(\mathrm{O}x)$ sous l'action d'un champ de potentiel électrique $V(x)$.

On dispose de trois expressions de $V(x)$ dont une seule est homogène

ⓐ $V(x) = V_0\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)$ ⓑ $V(x) = V_0\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$ ⓒ $V(x) = V_0\left(a^2 - x^2\right)$.

La vitesse $v(x)$ de la particule et le potentiel $V(x)$ en un point x sont liés par la relation

$$\frac{1}{2}mv(x)^2 + qV(x) = \mathrm{C^{te}}. \qquad (3)$$

En $x = 0$ la vitesse de la particule est nulle.

a) Déterminer la seule expression de $V(x)$ homogène à un potentiel électrique .....

b) En utilisant la relation (3) en $x = 0$, exprimer la constante en fonction de q et V_0 ...

c) Exprimer $v(a)$ en fonction de q, m et V_0 .....

d) Exprimer $v\left(\frac{a}{2}\right)$ en fonction de q, m et V_0 .....

e) Exprimer $v\left(\frac{a}{2}\right)$ en fonction de $v(a)$ .....

Du potentiel au champ électrique

Entraînement 14.5 — Potentiel électrique dû à deux charges.

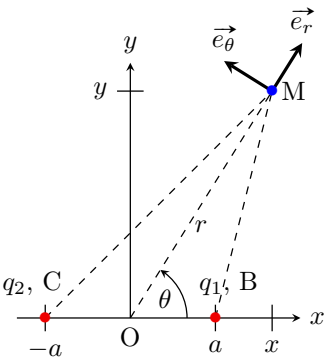
Le potentiel électrique produit en un point M par une charge q_1 située en un point B est

$$V_1(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\mathrm{BM}}.$$

Afin d'obtenir les potentiels $V_1(\mathrm{M})$ et $V_2(\mathrm{M})$ créés par les charges q_1 et q_2 telles que $q = q_1 = -q_2$, ainsi que le potentiel total

$$V(\mathrm{M}) = V_1(\mathrm{M}) + V_2(\mathrm{M}),$$

on cherche à exprimer les distances BM et CM en fonction des coordonnées r et θ du point M et de la distance a illustrées ci-contre.



Exprimer les grandeurs suivantes en fonction des paramètres indiqués.

a) BM en fonction de x, y, a.

On pourra utiliser les coordonnées des points B *et* M .....

b) r^2 en fonction de x, y.

On pourra chercher un triangle rectangle adéquat .....

c) BM en fonction de r, x, a.

On pourra utiliser les réponses des questions a) et b) .....

d) x en fontion de r, θ. .....

e) BM en fonction de r, a, θ

On pourra utiliser les réponses des questions c) et d) .....

f) V_1 en fonction de q, r, a, θ. .....

g) CM en fonction de x, y, a.

On pourra utiliser les coordonnées des points C *et* M .....

h) CM en fonction de r, x, a.

On pourra utiliser les réponses des questions b) et g) .....

i) CM en fonction de r, a, θ.

On pourra utiliser les réponses des questions d) et h) .....

j) V_2 en fonction de q, r, a, θ .....

k) V en fonction de q, r, a, θ .....

Entraînement 14.6 — Approximation de potentiels électriques.

Développer les expressions de potentiels électriques suivantes en calculant leur développement limité au voisinage de 0 à l'ordre indiqué et selon la variable spécifiée.

a) À l'ordre 1 : $V\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\left(1-\frac{a}{2r}\right)^4$ .....

b) À l'ordre 1 : $V\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a}{r}\cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{r}\cos(\theta)}}\right)$ ...

c) À l'ordre 2 : $V(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa\cos(\theta)}{r^2}$ .....

d) À l'ordre 1 : $V\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\ln\left(1+\frac{a}{r}\right)$ .....

e) À l'ordre 1 : $V\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\ln\left(\frac{\sqrt{1+\frac{4a^2}{r^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{4a^2}{r^2}}-1}\right)$ .....

Entraînement 14.7 — Calcul d'un champ électrique.

En coordonnées polaires, le champ $\vec{E}(\mathrm{M})$ au point M s'exprime en fonction du potentiel $V(\mathrm{M})$ par la formule

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = -\frac{\partial V(\mathrm{M})}{\partial r}\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V(\mathrm{M})}{\partial \theta}\vec{e_\theta}.$$

On donne

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C.V^{-1}.m^{-1}}, \quad q = 6{,}0\cdot 10^{-11}\,\mathrm{C} \quad \text{et} \quad a = 4{,}0\,\mathrm{mm}.$$

Dans cet entraînement, on suppose que $V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\sin(2\theta)}{r}$.

a) Exprimer $\vec{E}(\mathrm{M})$ .....

b) Exprimer $\vec{E}(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M}\left(r=\frac{a}{2}, \theta=\pi\right)$. .....

c) À l'aide des données, calculer $\|\vec{E}(\mathrm{M})\|$ en $\mathrm{V.m^{-1}}$. .....

Entraînement 14.8 — *Bis repetita.*

On reprend l'entraînement précédent avec les mêmes données, mais un potentiel électrique différent.

Dans cet entraînement, on suppose que $V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa\cos(\theta)}{r^2}$.

a) Exprimer $\vec{E}(\mathrm{M})$ .....

b) Exprimer $\vec{E}(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M}\left(r=a, \theta=\frac{\pi}{2}\right)$. .....

c) À l'aide des données, calculer $\|\vec{E}(\mathrm{M})\|$ en $\mathrm{V.m^{-1}}$. .....

Du champ au potentiel électrique

Entraînement 14.9 — Champ électrique produit par un condensateur.

Un condensateur produit un champ $\vec{E} = E(x)\vec{e_x}$ entre ses deux armatures positionnées en $x = 0$ et $x = d$. La différence de potentiels entre les armatures est liée au champ de telle manière que

$$V(0) - V(d) = \int_0^d E(x)\,\mathrm{d}x.$$

On considère que l'armature en $x = d$ est la masse du circuit, son potentiel est donc considéré comme nul.

Exprimer le potentiel $V(0)$ pour les différentes formes de champ $E(x)$.

a) $E(x) = E_0\left(1 - \dfrac{x}{d}\right)$ .....

b) $E(x) = E_0\left(1 - \dfrac{x}{d}\right)^2$ .....

c) $E(x) = E_0 \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\dfrac{x}{d}\right)$ .....

d) $E(x) = E_0\left(1 - \mathrm{e}^{-x/d}\right)$ .....

Distributions continues de charges

Entraînement 14.10 — Charge d'une sphère.

On souhaite déterminer la charge électrique totale Q contenue dans une sphère de rayon R et de densité de charges $\rho(r, \theta, \varphi)$. Pour ce faire on doit intégrer la densité de charges sur toute la sphère $\mathcal{S}$ en utilisant la formule

$$Q = \iiint_{\mathcal{S}} \rho(r, \theta, \varphi)\ \mathrm{d}\tau.$$

On peut démontrer que le volume d'intégration élémentaire est $\mathrm{d}\tau = r^2 \sin(\theta)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi$ avec pour une sphère $r \in [0,\ R]$, $\theta \in [0,\ \pi]$ et $\varphi \in [0,\ 2\pi]$. Ainsi, on a

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho(r, \theta, \varphi) r^2 \sin(\theta)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi.$$

Exprimer la charge électrique totale Q contenue dans la sphère en fonction de son rayon R pour les différentes densités de charges suivantes.

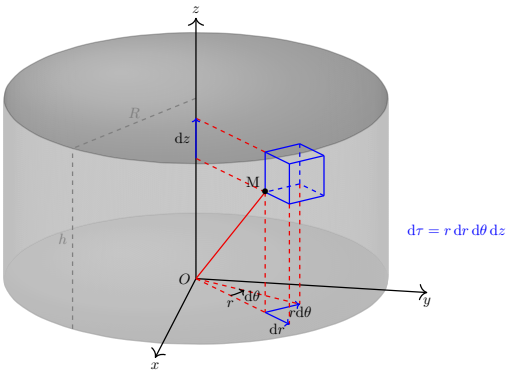
a) $\rho(r, \theta, \varphi) = 2\rho_0$ .....

b) $\rho(r, \theta, \varphi) = 2\left(\dfrac{r}{R}\right)^2 \rho_0$ .....

c) $\rho(r, \theta, \varphi) = 2\left(\dfrac{r}{R}\right)^2 \sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\rho_0$ .....

Entraînement 14.11 — Charge d'un cylindre.

On souhaite déterminer la charge électrique totale Q contenue dans un cylindre de rayon R, de hauteur h et de densité de charges $\rho(r,\theta,z)$. Pour ce faire on doit intégrer la densité de charges sur tout le cylindre $\mathcal{C}$.



Comme on peut le voir sur la figure ci-contre, le volume d'intégration élémentaire est

$$\mathrm{d}\tau = r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z$$

avec pour un cylindre $r \in [0,\ R]$, $\theta \in [0,\ 2\pi]$ et $z \in [0,\ h]$.

Ainsi, on a

$$Q = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho(r,\theta,z) r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z.$$

Exprimer la charge électrique totale Q contenue dans le cylindre en fonction de son rayon R et de sa hauteur h pour les différentes densités de charges suivantes.

a) $\rho(r,\theta,z) = 3$ .....

b) $\rho(r,\theta,z) = 2\left(\dfrac{r}{R}\right)^3$ .....

c) $\rho(r,\theta,z) = 2\left(\dfrac{r}{R}\right)^3\left(\dfrac{z}{h}\right)^2 \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ .....

Réponses mélangées

$\frac{8}{5}\pi R^3\rho_0$ $\quad$ (c) $\quad$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\left(1-\frac{2a}{r}\right)$ $\quad$ $\sqrt{\frac{qV_0}{2m}}$ $\quad$ $\sqrt{(x+a)^2+y^2}$ $\quad$ $-\frac{8}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}\vec{e_\theta}$

$\frac{8}{15}R^2h$ $\quad$ $\sqrt{\frac{2qV_0}{m}}$ $\quad$ $3{,}4\cdot10^4\ \mathrm{V.m^{-1}}$ $\quad$ $-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2+2ar\cos(\theta)+a^2}}$ $\quad$ $\frac{4}{5}\pi R^2h$

$\frac{8}{3}\pi R^3\rho_0$ $\quad$ $\sqrt{r^2-2ar\cos(\theta)+a^2}$ $\quad$ $\vec{e_y}$ $\quad$ x^2+y^2 $\quad$ (b) $\quad$ $\vec{e_x}$ $\quad$ $\frac{1}{2}E_0d$

$\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$ $\quad$ $\frac{2}{3\pi}E_0d$ $\quad$ $\frac{16}{5}R^3\rho_0$ $\quad$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2-2ar\cos(\theta)+a^2}}$ $\quad$ $\sqrt{(x-a)^2+y^2}$

$\sqrt{a^2+y^2}$ $\quad$ $2{,}7\cdot10^5\ \mathrm{V.m^{-1}}$ $\quad$ $\frac{\|\vec{F}\|}{\sqrt{a^2+y^2}}(-a\vec{e_x}+y\vec{e_y})$ $\quad$ $\frac{v(a)}{2}$ $\quad$ qV_0 $\quad$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{r^2}$

$\frac{1}{3}E_0d$ $\quad$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r}+\sin(\theta)\vec{e_\theta})$ $\quad$ $\sqrt{r^2+2ar\cos(\theta)+a^2}$ $\quad$ $-\vec{e_y}$

$\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$ $\quad$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa\cos(\theta)}{r^2}$ $\quad$ $\sqrt{r^2+2ax+a^2}$ $\quad$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(\frac{1}{\sqrt{r^2-2ar\cos(\theta)+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+2ar\cos(\theta)+a^2}}\right)$

E_0de^{-1} $\quad$ $\sqrt{r^2-2ax+a^2}$ $\quad$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\ln\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)$ $\quad$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}\vec{e_\theta}$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{r^2}\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right)$ $\quad$ $r\cos(\theta)$ $\quad$ $3\pi R^2h$ $\quad$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}(\sin(2\theta)\vec{e_r}-2\cos(2\theta)\vec{e_\theta})$ $\quad$ $-\vec{e_x}$

► Réponses et corrigés page 272

Particule dans un champ électromagnétique

Prérequis
Principe fondamental de la dynamique. Théorème de l'énergie cinétique, de l'énergie mécanique. Puissance, travail. Énergie potentielle.
Force de Lorentz.

Constantes utiles

→ charge élémentaire : $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

→ célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Préliminaires

Entraînement 15.1 — Électron-volt.

Le produit d'une charge électrique par une tension est une énergie.

En multipliant la charge élémentaire $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ par une tension de 1 V, on obtient une unité adaptée à la physique des particules, l'électron-volt, noté eV. On a $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

a) Que vaut 1 J en eV ? .....

b) L'énergie d'un photon rouge est de $2{,}48 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

Convertir en eV. .....

c) L'énergie d'un photon violet est de 3,1 eV.

Convertir en J. .....

d) Quel photon a la plus grande énergie ?

Le rouge ou le violet ? .....

Entraînement 15.2 — Qui est le plus massique ?

On considère les trois particules suivantes :

- le proton, dont la masse vaut $m_{\mathrm{proton}} = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$;
- le kaon, qui est une particule dont l'énergie de masse vaut $m_{\mathrm{kaon}} \times c^2 = 7{,}90 \times 10^{-4}\,\mathrm{erg}$;
- le tau, qui est une particule de masse $m_{\mathrm{tau}} = 1\,777\,\mathrm{MeV/c^2}$.

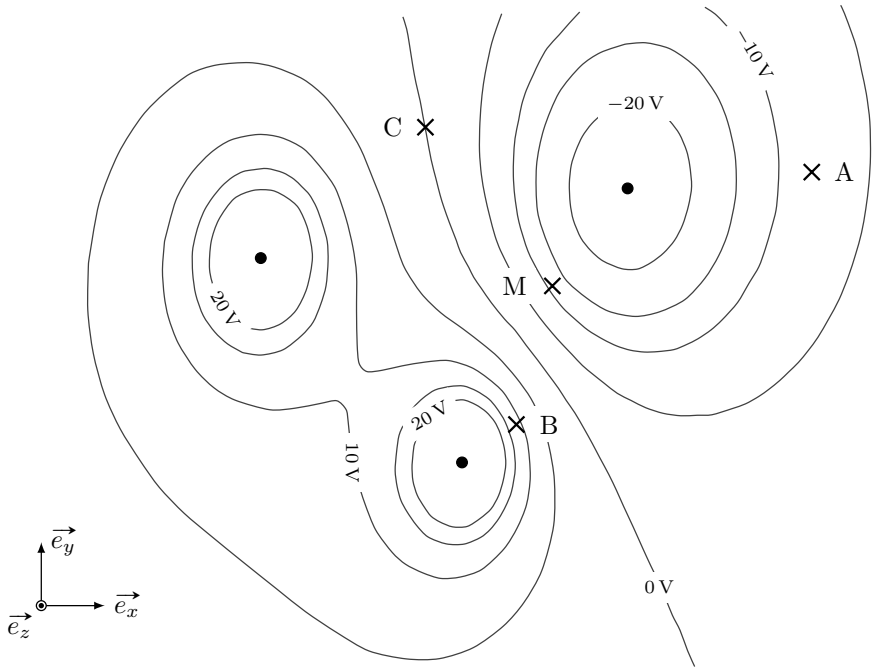
On donne $1\,\mathrm{erg} = 1\,\mathrm{g \cdot cm^2 \cdot s^{-2}}$ et $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

Laquelle de ces particules est la plus massique ? .....

Entraînement 15.3 — Carte d'équipotentielles.

On représente ci-dessous la carte des équipotentielles créées par trois charges électriques.

Une équipotentielle correspond à l'ensemble des lieux où le potentiel électrostatique scalaire V prend une même valeur numérique.



a) En norme, le champ électrique est le plus intense :

(a) en A (b) en B (c) en C

b) En M, le champ électrique est orienté :

(a) vers en haut à droite
(b) vers en haut à gauche
(c) vers en bas à droite
(d) vers en bas à gauche

Entraînement 15.4 — Potentiel scalaire.

Le potentiel électrostatique scalaire V vérifie

$$\mathrm{d}V(\mathrm{M}) = -\vec{E}(\mathrm{M}) \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}$$

où $\vec{\mathrm{d}\ell}$ est le vecteur déplacement élémentaire.

On rappelle les expressions du vecteur $\vec{\mathrm{d}\ell}$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{d}\ell} &= \mathrm{d}x\vec{e_x} + \mathrm{d}y\vec{e_y} + \mathrm{d}z\vec{e_z} \\ &= \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\vec{e_z}.\end{aligned}$$

En déterminant $\mathrm{d}V$, puis intégrant, exprimer le potentiel $V(\mathrm{M})$ pour les champs $\vec{E}$ suivants :

a) $\vec{E}(\mathrm{M}) = E\vec{e_x}$ .....

b) $\vec{E}(\mathrm{M}) = \dfrac{\alpha}{r^2}\vec{e_r}$ .....

c) $\vec{E}(\mathrm{M}) = \dfrac{\beta}{r}\vec{e_r}$ .....

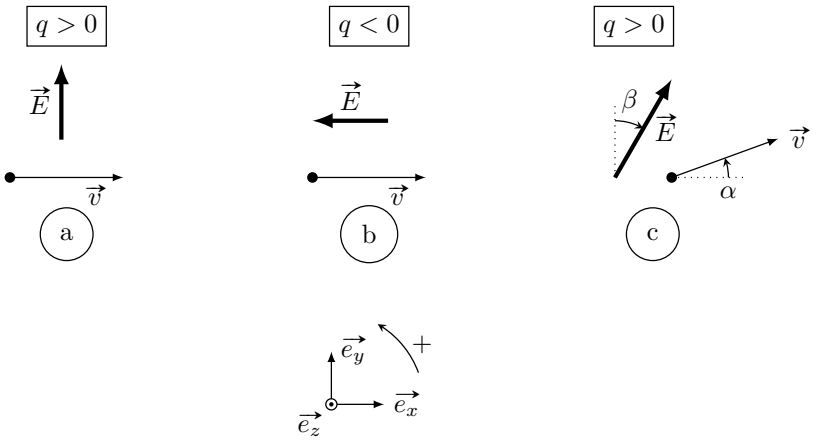
d) $\vec{E}(\mathrm{M}) = \gamma(y\vec{e_x} + x\vec{e_y})$ .....

Force de Lorentz

On rappelle l'expression de la force de Lorentz $\vec{F_L} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

Entraînement 15.5 — Composante électrique de la force de Lorentz.

Dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, exprimer (en fonction de q, de E et éventuellement de α et β) la composante électrique de la force de Lorentz, définie par $\vec{F}_{L,\text{électrique}} = q\vec{E}$.

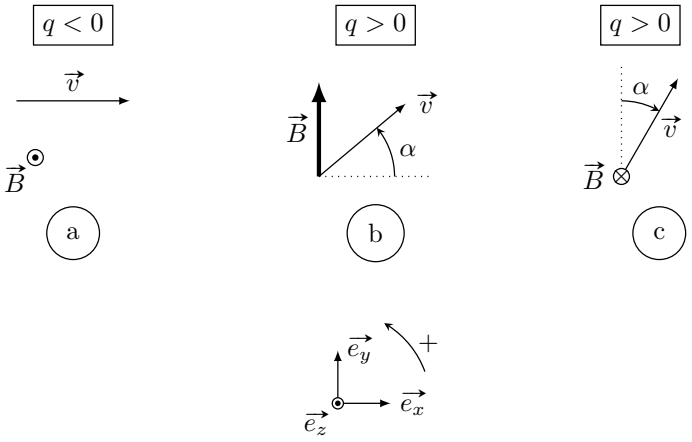


a) $\vec{F}_{L,\text{électrique}} =$ .....

b) $\vec{F}_{L,\text{électrique}} =$ .....

c) $\vec{F}_{L,\text{électrique}} =$ .....

Entraînement 15.6 — Composante magnétique de la force de Lorentz.



Dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, exprimer (en fonction de q, de v, de B, et éventuellement de α) la composante magnétique de la force de Lorentz, définie par $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

a) $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = \ldots$

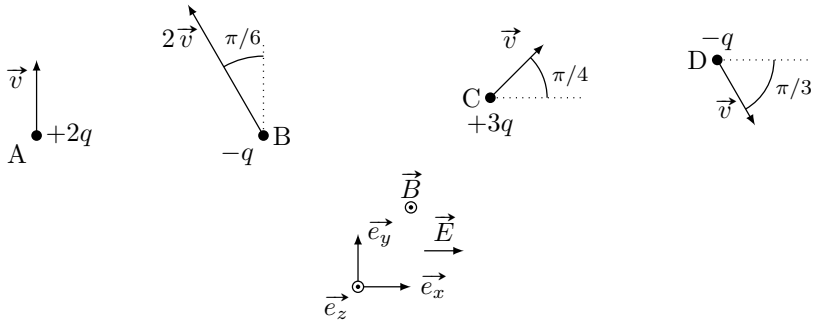
b) $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = \ldots$

c) $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = \ldots$

Entraînement 15.7 — Puissance de la force de Lorentz.

On se place dans une base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, et on considère :

- un champ électrique constant dans tout l'espace : $\vec{E} = E\vec{e_x}$;
- un champ magnétique constant dans tout l'espace : $\vec{B} = B\vec{e_z}$.



On rappelle que la puissance d'une force $\vec{F}$ appliquée à une particule de vitesse $\vec{v}$ est $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Donner l'expression de la puissance des forces subies par chacune des particules A, B, C et D.

a) $\mathcal{P}_\text{A} = \ldots\ldots\ldots$

b) $\mathcal{P}_\text{B} = \ldots\ldots\ldots$

c) $\mathcal{P}_\text{C} = \ldots\ldots\ldots$

d) $\mathcal{P}_\text{D} = \ldots\ldots\ldots$

Mouvement dans un champ électrique

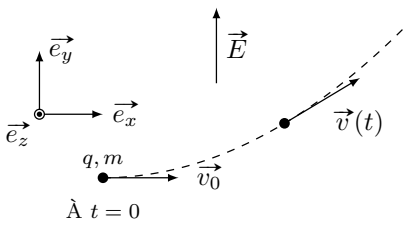
Entraînement 15.8 — Champ perpendiculaire à la vitesse initiale.

On étudie le mouvement d'une particule de charge $q \geq 0$ et de masse m dans une zone où règne un champ électrique $\vec{E} = E\vec{e_y}$.

À l'instant initial, la vitesse est orthogonale au champ électrique : $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e_x}$.

L'étude du mouvement permet d'établir l'expression de la vitesse en fonction du temps :

$$\vec{v}(t) = v_0\vec{e_x} + \frac{qE}{m}t\vec{e_y}.$$



a) À quel instant t_0 la particule double sa vitesse (par rapport à la vitesse initiale) ? .....

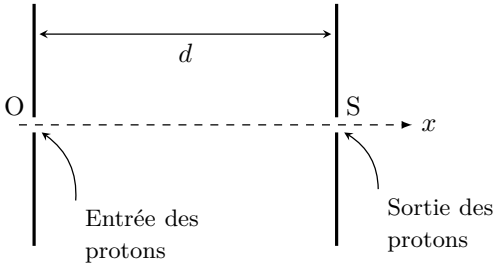
b) À quel instant t_1 l'énergie cinétique de la particule a quadruplé ? .....

c) Quelle est la valeur de l'angle $\alpha = (\vec{e_x}, \vec{v})$ à l'instant t_1 ? .....

Entraînement 15.9 — Champ colinéaire à la vitesse initiale.

Une proton de masse $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg}$ entre en O, avec une vitesse initiale négligeable, dans un condensateur plan.

Une tension U est appliquée entre les deux armatures séparées d'une distance $d = 5{,}0\,\text{cm}$. Le champ électrique $\vec{E}$ entre les plaques est supposé uniforme et orienté dans le sens des x croissants. Sa norme est $E = \dfrac{U}{d}$.



La variation d'énergie cinétique entre l'entrée O et la sortie S vérifie :

$$\mathcal{E}_c(\text{S}) - \mathcal{E}_c(\text{O}) = qU.$$

Le champ électrique de claquage de l'air vaut $E_{\max} = 3 \times 10^7\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$.

a) Quelle est la tension maximale $U_{\max}$ qui peut être appliquée aux bornes du condensateur sans qu'il n'y ait de claquage ? .....

b) L'énergie cinétique du proton en sortie du condensateur est alors égale à :

(a) 6 keV (b) 1,5 MeV (c) 0,24 pJ (d) 9,6 mJ

(plusieurs réponses sont possibles)

.....

En associant l'un après l'autre de tels condensateurs plans, on peut augmenter l'énergie cinétique des protons : l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c,n}$ à la sortie du condensateur n vérifie la relation :

$$\mathcal{E}_{c,n} - \mathcal{E}_{c,n-1} = qU.$$

c) La suite $(\mathcal{E}_{c,n})_n$ est une suite :

(a) arithmétique (b) géométrique (c) arithmético-géométrique

.....

d) En déduire l'expression de $\mathcal{E}_{c,n}$ en fonction de n, q et U. .....

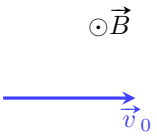
On souhaite atteindre une vitesse $v = \dfrac{c}{10}$, où c est la célérité de la lumière dans le vide par une mise en série de condensateurs.

e) Quel est le nombre de condensateurs plans nécessaires pour atteindre une telle vitesse avec une tension $U = 1\,\text{MV}$ aux bornes de chaque condensateur ? .....

Particule dans un champ magnétique

Entraînement 15.10 — Étude d'une trajectoire.

On considère une particule de masse m et de charge $q < 0$ placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_z}$. On note $\vec{v}(t)$ le vecteur vitesse et $\vec{v_0}$ sa valeur initiale.



On représente la situation par le schéma ci-contre :

a) Exprimer l'accélération $\vec{a}$ en fonction de q, m, $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

On pourra négliger le poids de la particule. .....

On admet que le mouvement est circulaire de rayon R et de centre C.

b) Exprimer la vitesse dans le repère de coordonnées polaires d'origine C. ....

c) En déduire l'expression de la force de Lorentz en coordonnées polaires ....

d) Exprimer l'accélération en coordonnées polaires .....

e) Reprendre le PFD pour exprimer le rayon R .....

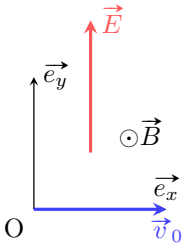
f) Calculer la période T du mouvement circulaire .....

Particule dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$

Entraînement 15.11 — Mouvement uniforme.

Un électron de masse m et de charge $q < 0$ adopte un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$ dans une zone où règnent un champ électrique $\vec{E} = E\vec{e_y}$ et un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e_z}$.

On représente la situation par le schéma ci-contre :



a) Exprimer la force de Lorentz $\vec{F}_L$ dans la base cartésienne. .....

b) À quelle condition l'électron adopte-il un mouvement rectiligne uniforme ? .....

Réponses mélangées

$\sqrt{3}\dfrac{mv_0}{qE}$ $\quad \dfrac{\pi}{3}$ $\quad -\beta\ln(r)+C$ $\quad \dfrac{mv_0}{|q|B}$ $\quad 6{,}3\times10^{18}\,\text{eV}$ $\quad$ violet $\quad$ (a) $\quad 5{,}0\times10^{-19}\,\text{J}$

$qRB\dot{\theta}\vec{e_r}$ $\quad qE\vec{e_y}$ $\quad |q|vB\vec{e_y}$ $\quad R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{e_r}$ $\quad 5$ $\quad qE\big(\cos(\beta)\vec{e_y} - \sin(\beta)\vec{e_x}\big)$ $\quad$ (a)

0 $\quad -\gamma xy + C$ $\quad \dfrac{\alpha}{r}+C$ $\quad -\dfrac{qEv}{2}$ $\quad qvB\cos(\alpha)\vec{e_z}$ $\quad v_0 = \dfrac{E}{B}$ $\quad 1{,}55\,\text{eV}$

$-qvB\big(\cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_y}\big)$ $\quad |qE|\vec{e_x}$ $\quad -Ex+C$ $\quad$ (b) $\quad q(E-v_0B)\vec{e_y}$ $\quad qEv$ $\quad \dfrac{3\sqrt{2}}{2}qEv$

nqU $\quad \sqrt{3}\dfrac{mv_0}{qE}$ $\quad$ tau $\quad \dfrac{q}{m}\vec{v}\wedge\vec{B}$ $\quad R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ $\quad 2\pi\dfrac{m}{|q|B}$ $\quad 1{,}5\,\text{MV}$ $\quad$ (b) et (c)

▶ Réponses et corrigés page 278

Champ magnétique

Prérequis
La force magnétique agissant sur une charge q, de vitesse $\vec{v}$, placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ vaut $\overrightarrow{F_{\text{mag}}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, où $\vec{B}$ est un vecteur axial (ou pseudo-vecteur) dont l'unité est le tesla (noté T).

Constantes utiles
→ perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$

Pour commencer

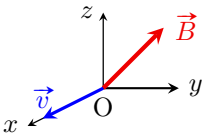
Entraînement 16.1 — À propos de la force magnétique.

La force magnétique agissant sur une charge q animée d'une vitesse $\vec{v}$ est $\overrightarrow{F_{\text{mag}}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

A-t-on toujours $\overrightarrow{F_{\text{mag}}} \perp \vec{v}$? ..... A-t-on toujours $\overrightarrow{F_{\text{mag}}} \perp \vec{B}$? .....

Entraînement 16.2 — Force magnétique connaissant le champ magnétique.

Un électron de charge $-e$ possède un vecteur vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e_x}$ lorsqu'il est en O. Il subit alors l'action d'un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0(\vec{e_y} + \vec{e_z})$.



La force exercée sur l'électron en O vaut :

(a) $\vec{F} = ev_0B_0(-\vec{e_y} - \vec{e_z})$
(b) $\vec{F} = ev_0B_0(\vec{e_y} + \vec{e_z})$
(c) $\vec{F} = ev_0B_0(-\vec{e_y} + \vec{e_z})$
(d) $\vec{F} = ev_0B_0(\vec{e_y} - \vec{e_z})$

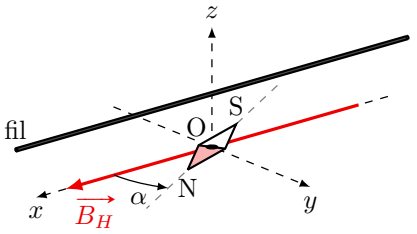
.....

Entraînement 16.3 — Équilibre d'une boussole.

Une aiguille aimantée de centre O est libre de tourner sans frottements autour d'un axe vertical (Oz). Elle s'oriente à l'équilibre suivant $\overrightarrow{B_H} = B_H\vec{e_x}$.

Un fil conducteur de grande longueur devant la taille de l'aiguille et placé à la distance $d = 2\,\text{cm}$ au dessus de O, parallèlement à l'axe (Ox). Le champ magnétique créé en O par le fil vaut

$$\overrightarrow{B_{\text{fil}}}(\text{O}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{e_y}.$$



Lorsqu'un courant d'intensité $I = 1{,}2\,\text{A}$, circule dans ce fil dans le sens des x croissants, la boussole retrouve une position d'équilibre en tournant d'un angle $\alpha = 30°$ comme indiqué sur la figure.

a) Exprimer B_H en fonction de μ_0, I, d et α .....

b) Donner la valeur numérique de B_H .....

Calculs de flux magnétiques

Le flux Φ du champ magnétique à travers une surface S reposant sur un contour orienté et fermé, s'écrit :

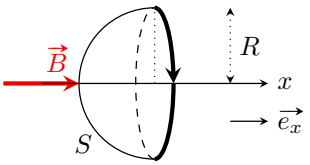
$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

où le vecteur $\mathrm{d}\vec{S}$ est orienté par la règle de Maxwell.

On sait par ailleurs que $\vec{B}$ est un champ vectoriel à flux conservatif : le flux de $\vec{B}$ sortant de toute surface fermée est nul.

Entraînement 16.4 — Flux d'un champ uniforme à travers une demi-sphère.

On considère la surface suivante, une demi-sphère de rayon R et d'axe $(\mathrm{O}x)$.



Combien vaut le flux du champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_x}$ à travers cette surface ?

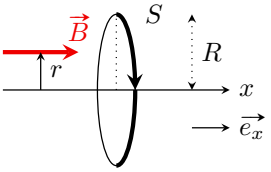
(a) $\phi = 0$ (b) $\phi = 2B\pi R^2$ (c) $\phi = B\pi R^2$

.....

Entraînement 16.5 — Flux d'un champ non uniforme à travers un disque.

On considère un champ magnétique $\vec{B}$ défini par

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = B_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e_x},$$



où M est repéré à l'aide des coordonnées cylindriques r, θ et x
Ainsi, r est la distance du point à l'axe $(\mathrm{O}x)$.

On souhaite calculer le flux ϕ de ce champ à travers le disque de rayon R et d'axe $(\mathrm{O}x)$ orienté comme indiqué sur la figure. Il est défini par

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

où $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{e_x}$ avec $\mathrm{d}S$ élément de surface du disque en un point M quelconque du disque.

On rappelle que l'expression de $\mathrm{d}S$ en coordonnées cylindriques est

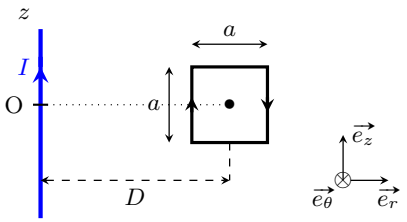
$$\mathrm{d}S = r \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \mathrm{d}r.$$

Exprimer ϕ en fonction de R et B_0 .....

Entraînement 16.6 — Flux à travers un cadre du champ créé par un fil.

Considérons un fil rectiligne infiniment long suivant l'axe (Oz), parcouru par un courant d'intensité I circulant dans le sens des z croissants. Le champ magnétique créé par ce fil, en un point M à la distance r de l'axe (Oz), est :

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}.$$



Nous souhaitons calculer le flux ϕ de ce champ à travers le cadre carré de côté a orienté comme indiqué sur la figure. Il est défini par

$$\phi = \iint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

où $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{e_\theta}$ avec $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}z$ élément de surface du cadre en un point M quelconque du cadre.

a) Exprimer ϕ en fonction de a, D, μ_0 et I .....

b) Donner un équivalent de ϕ si $a \ll D$. .....

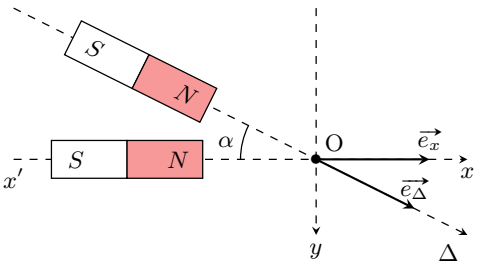
c) Que vaut ϕ si le cadre est situé dans un plan perpendiculaire à (Oz) ? ....

Superposition de champs

Entraînement 16.7 — Champ de deux aimants droits.

On approche le pôle Nord d'un aimant droit d'axe Δ du pôle Nord d'un aimant droit identique d'axe $(x'x)$.

On donne les champs créés par les aimants en O : $\vec{B_1} = B_0\vec{e_x}$ et $\vec{B_2} = B_0\vec{e_\Delta}$ avec $B_0 = 20\,\mathrm{mT}$.



Le champ magnétique résultant de la superposition de $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$ en O sera noté $\vec{B}(\mathrm{O})$.

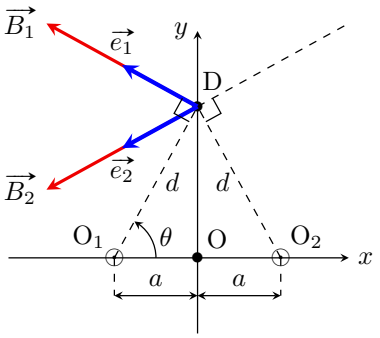
a) Exprimer $\vec{B}(\mathrm{O})$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$, en fonction de B_0 et α .....

b) Exprimer la norme $B(\mathrm{O})$ de $\vec{B}(\mathrm{O})$, en fonction de B_0 et $\cos(\alpha)$ .....

c) Calculer $B(\mathrm{O})$ pour $\alpha = 60°$ .....

Entraînement 16.8 — Champ magnétique créé par deux fils.

Deux fils colinéaires à l'axe (Oz) et parcourus par un courant d'intensité I coupent le plan (xOy) respectivement en O_1 et O_2, comme représenté ci-dessous :



Ces fils passant par O_1 et par O_2 créent, au point $D(0, y)$, respectivement, les champs $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$ vérfiant

$$\overrightarrow{B_1} = B_0\,\vec{e}_1 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B_2} = B_0\,\vec{e}_2.$$

On donne $B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$, où d est la distance commune de D aux points O_1 et O_2.

Le vecteur $\vec{e}_1$ est un vecteur unitaire orthogonal à la droite (O_1D) ; de même pour $\vec{e}_2$.

Le champ magnétique résultant de la superposition de $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$ en D sera noté $\overrightarrow{B_{\text{tot}}}$.

a) Exprimer d en fonction de a et θ .....

b) Exprimer $\vec{e}_1$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .....

c) Exprimer $\vec{e}_2$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .....

d) Exprimer $\overrightarrow{B_{\text{tot}}}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de B_0 et θ .....

Le champ $\overrightarrow{B_{\text{tot}}}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{B_{\text{tot}}} = \frac{\mu_0 I}{\pi} f(y) \vec{e}_x.$$

e) Expliciter la fonction $f(y)$ en fonction de a et y. .....

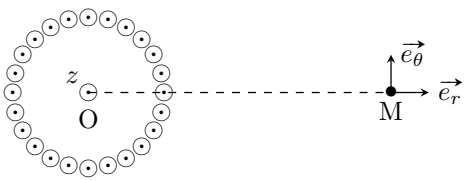
f) Pour quelles valeurs de y, $\left|f(y)\right|$ est-elle maximale ? .....

Champs magnétiques créés par des courants

Entraînement 16.9 — N fils sur un cylindre.

On considère N fils rectilignes ($N \gg 1$) infiniment longs, uniformément répartis sur un cylindre de centre O, de rayon a et d'axe (Oz). Ces fils sont parcourus par le même courant circulant dans le même sens.

Soit un point M à la distance r de O.



a) Pour la distribution des courants, le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ est un plan :

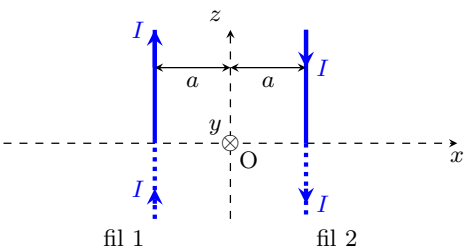
(a) de symétrie
(b) d'antisymétrie
(c) ni de symétrie, ni d'antisymétrie

b) Le champ magnétique en M est alors :

(a) dirigé selon $\vec{e_r}$
(b) dirigé selon $\vec{e_\theta}$
(c) dirigé selon $\vec{e_z}$

Entraînement 16.10 — Champ créé par deux fils parallèles.

On considère deux fils conducteurs infinis parallèles à l'axe (Oz), distants de $2a$ et parcourus par des courants de même intensité I circulant en sens inverse.



a) Lequel de ces trois plans est plan de symétrie pour la distribution des courants ?

(a) le plan (xOy)
(b) le plan (yOz)
(c) le plan (xOz)

b) L'analyse des symétries permet de dire qu'en un point A de l'axe (Ox), le champ $\vec{B}$(A) est :

(a) parallèle à (Ox)
(b) parallèle à (Oy)
(c) parallèle à (Oz)

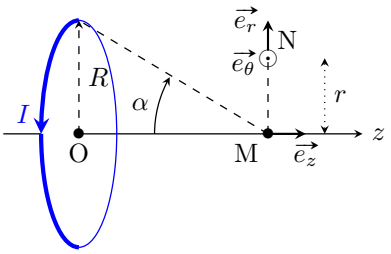
c) L'analyse des symétries permet de dire qu'en un point D de l'axe (Oy), le champ $\vec{B}$(D) est :

(a) parallèle à (Ox)
(b) parallèle à (Oy)
(c) parallèle à (Oz)

Entraînement 16.11 — Champ créé par une spire circulaire.

On considère une spire circulaire de centre O, d'axe (Oz) et de rayon R, parcourue par un courant d'intensité $I > 0$ constante circulant dans le sens indiqué sur la figure.

On cherche la direction du champ $\vec{B}$ créé par la spire en un point M de l'axe (Oz), puis en N à la distance r de M.



a) En un point M de l'axe (Oz), le champ créé par la spire est

(a) colinéaire à $\vec{e_r}$ (b) colinéaire à $\vec{e_\theta}$ (c) colinéaire à $\vec{e_z}$

.....

b) L'analyse des symétries permet de dire qu'en N, le champ $\vec{B}(\mathrm{N})$ est contenu dans le plan :

(a) $(\mathrm{M}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ (b) $(\mathrm{M}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ (c) $(\mathrm{M}, \vec{e_r}, \vec{e_z})$

.....

Entraînement 16.12 — Champ créé sur l'axe par une spire circulaire.

On reprend la spire circulaire de l'entraînement précédent.

Le champ magnétique créé par cette spire en $\mathrm{M}(0,0,z)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{B_{\text{axe}}}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\vec{e_z},$$

où α est l'angle orienté dans le sens horaire sous lequel M voit le rayon de la spire.

Le vecteur $\overrightarrow{B_{\text{axe}}}(\mathrm{M})$ peut également s'écrire en fonction de z. Il prendra alors la forme suivante :

$$\overrightarrow{B_{\text{axe}}}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 I}{2R}f(z)\vec{e_z}.$$

a) Exprimer $\sin(\alpha)$ en fonction de z et de R .....

b) Exprimer $f(z)$ en fonction de z et de R .....

On note B_1 l'intensité du champ $\overrightarrow{B_{\text{axe}}}(\mathrm{M})$ quand $z = R$.

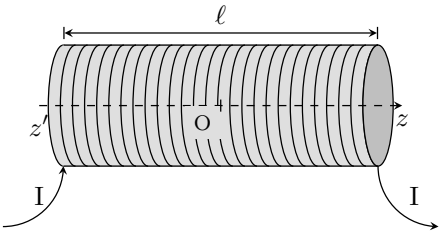
c) Exprimer B_1 en fonction de μ_0, I et R .....

d) Pour quelle valeur de $z > 0$ a-t-on $\left\|\overrightarrow{B_{\text{axe}}}(\mathrm{M})\right\| = \dfrac{B_1}{2}$? .....

Entraînement 16.13 — Champ créé par un solénoïde.

On considère un solénoïde de longueur ℓ comportant n spires par unité de longueur. Les spires sont traversées par un courant d'intensité I.

Les extrémités du solénoïde sont en $z = \pm\dfrac{\ell}{2}$ et on note O son centre.



a) Tout plan qui contient l'axe (Oz) est un plan d'antisymétrie (pour la distribution des courants du solenoïde) à condition de :

(a) négliger l'hélicité de l'enroulement
(b) supposer que $R \ll \ell$
(c) supposer que $\ell \to \infty$

.....

b) En supposant la condition précédente vérifiée, l'analyse des symétries permet de dire qu'en tout point M de son axe, le champ $\vec{B}(\mathrm{M})$ créé par le solénoïde est :

(a) parallèle à $\vec{e_r}$
(b) parallèle à $\vec{e_\theta}$
(c) parallèle à $\vec{e_z}$

.....

Entraînement 16.14 — Expression du champ sur l'axe créé par un solénoïde.

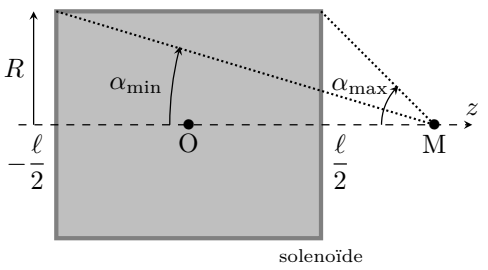
Le champ magnétique créé par un solénoïde de longueur ℓ et de rayon R en un point M de son axe (Oz) s'écrit :

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = B(\mathrm{M})\vec{e_z}$$

avec

$$B(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 n I}{2}\Big(\cos(\alpha_{\min}) - \cos(\alpha_{\max})\Big)$$

où $\alpha_{\min}$ et $\alpha_{\max}$ sont les angles sous lesquels les extrémités du solénoïde sont vues depuis M de cooordoonées $(0, 0, z)$.



On rappelle que I est l'intensité du courant qui traverse chaque spire et n le nombre de spires par unité de longueur. L'origine O de l'axe (Oz) se trouve au milieu du solénoïde.

a) Exprimer $B(\mathrm{M})$ en fonction de μ_0, n, I, R, ℓ et z .....

b) Que vaut $B(\mathrm{O})$ pour ℓ quelconque ? .....

c) Que vaut le rapport $\dfrac{B\left(\pm\dfrac{\ell}{2}\right)}{B(\mathrm{O})}$? .....

d) Vers quelle valeur tend $B(\mathrm{O})$ si $\dfrac{\ell}{R} \to +\infty$? .....

Champs solutions d'une équation différentielle

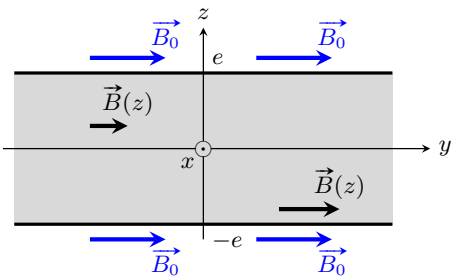
Entraînement 16.15 — Champ magnétique d'une plaquette supraconductrice.

En tout point M d'une plaque supraconductrice d'épaisseur $2e$, le champ magnétique est de la forme :

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = B(z)\vec{e_y}$$

$B(z)$ est une **fonction paire** vérifiant l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2B(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{B(z)}{\delta^2} = 0.$$



où δ est homogène à une longueur.

Le champ magnétique extérieur $\vec{B_0}$ permet d'écrire $B(-e) = B(e) = B_0$ par continuité du champ.

La fonction cosinus hyperbolique ($\cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$) pourra être utilisée.

a) Déterminer $B(z)$ en fonction de B_0, δ, e et z .....

b) Calculer $\dfrac{B(0)}{B_0}$ pour $e = \delta/10$ .....

c) Calculer $\dfrac{B(0)}{B_0}$ pour $e = 10\delta$ .....

Entraînement 16.16 — Évolution temporelle d'un champ uniforme.

On considère un champ magnétique uniforme et dépendant du temps $B(t)\vec{e_z}$ et on suppose que la fonction $B(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2B(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\big(B(t) - B_0\big) = 0 \qquad (*)$$

où ω_0, Q et B_0 sont des constantes. On suppose que $Q > 1/2$.

a) Quelle est l'équation caractéristique associée à $(*)$? ...

b) Combien vaut son discrimimant Δ ? .....

c) Quel est le signe de Δ ? .....

d) Donner une solution particulière de $(*)$ .....

e) Résoudre l'équation différentielle $(*)$ .....

Les conditions initiales du problème sont : $B(0) = 0$ et $B'(0) = 0$.

f) Déterminer complètement $B(t)$ .....

Une analyse dimensionnelle

Entraînement 16.17 — Le magnéton de Bohr.

Le magnéton de Bohr μ_B qui est homogène à un moment magnétique, s'exprime en fonction de e (charge élémentaire), m_e (masse de l'électron) et h (constante de Planck) suivant la relation :

$$\mu_B = \frac{1}{4\pi}\, e^{\alpha} \cdot m_e^{\beta} \cdot h^{\gamma}.$$

Nous cherchons à évaluer α, β et γ par une analyse dimensionnelle. Pour cela, on utilise les deux données suivantes :

- le système international d'unités impose que le moment magnétique s'exprime en $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2$;
- l'énergie d'un photon est proportionnelle à sa fréquence ν : $E = h\nu$.

Donner la valeur de (α, β, γ) .....

Réponses mélangées

$\Delta < 0$ $\quad 20{,}8\,\mu\mathrm{T}$ $\quad$ (c) $\quad 34{,}6\,\mathrm{mT}$ $\quad$ (b) $\quad$ (c) $\quad (1,-1,1)$

$B_0\sqrt{2(1+\cos(\alpha))}$ $\quad \mu_0 nI$ $\quad$ (b) $\quad B_0\Big(1-\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\Big(\cos\big(\frac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\big) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin\big(\frac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\big)\Big)$

$\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2(1-4Q^2)$ $\quad$ en $y=\pm a$ $\quad$ (c) $\quad -\sin(\theta)\vec{e_x} - \cos(\theta)\vec{e_y}$ $\quad$ nul

$\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{D+a/2}{D-a/2}\right)$ $\quad B_0\frac{\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{e}{\delta}\right)}$. $\quad$ (d) $\quad \frac{B(0)}{B_0} \approx 9\times 10^{-5}$ $\quad B_0$

(a) $\quad -\sin(\theta)\vec{e_x} + \cos(\theta)\vec{e_y}$ $\quad$ oui $\quad \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\frac{z+\frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2+\left(z+\frac{\ell}{2}\right)^2}} - \frac{z-\frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2+\left(z-\frac{\ell}{2}\right)^2}}\right)$

$\frac{\mu_0 I}{2\pi d\tan(\alpha)}$ $\quad \frac{a}{\cos(\theta)}$ $\quad B_0(1+\cos(\alpha))\vec{e_x} + B_0\sin(\alpha)\vec{e_y}$ $\quad \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\,R}$

$\frac{B(0)}{B_0}\approx 1$ $\quad \frac{\mu_0 nI\ell}{\sqrt{4R^2+\ell^2}}$ $\quad$ (b) $\quad \phi \approx \frac{\mu I a^2}{2\pi D}$ $\quad$ oui $\quad \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$ $\quad$ (c)

(c) $\quad r^2 + \frac{\omega_0 r}{Q} + \omega_0^2 = 0$ $\quad -2B_0\sin(\theta)\vec{e_x}$ $\quad R\sqrt{2^{5/3}-1}$ $\quad \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4R^2+\ell^2}}{\sqrt{R^2+\ell^2}}$

$\frac{R^3}{(\sqrt{R^2+z^2})^3}$ $\quad -\frac{y}{a^2+y^2}$ $\quad B_0 + \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\Big(\lambda\cos\big(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\big) + \mu\sin\big(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\big)\Big)$ $\quad$ (a) $\quad \frac{\pi}{2}B_0R^2$

► Réponses et corrigés page 281

Induction

Prérequis
Flux magnétique. Loi de Lenz. Force de Laplace.

Autour du flux d'un champ magnétique

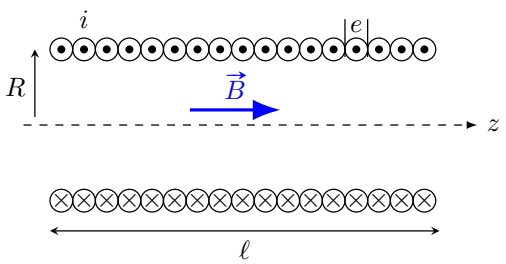
Entraînement 17.1 — Flux propre d'un solénoïde.

On forme une bobine en enroulant du fil de cuivre d'épaisseur e sur un cylindre de rayon R et de longueur ℓ en une seule couche de N spires jointives.

Le champ magnétique créé par un solénoïde infini est :

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e_z}$$

où μ_0 est la perméabilité du vide, i le courant parcourant et $n = \dfrac{N}{\ell}$ le nombre de spires par unité de longueur.



Le flux propre dans cette bobine est $\phi_{\text{tot}} = NBS$ où S est la surface d'une spire.

Par combien est multiplié le flux propre à travers la bobine lorsque l'on double :

a) l'intensité du courant .....

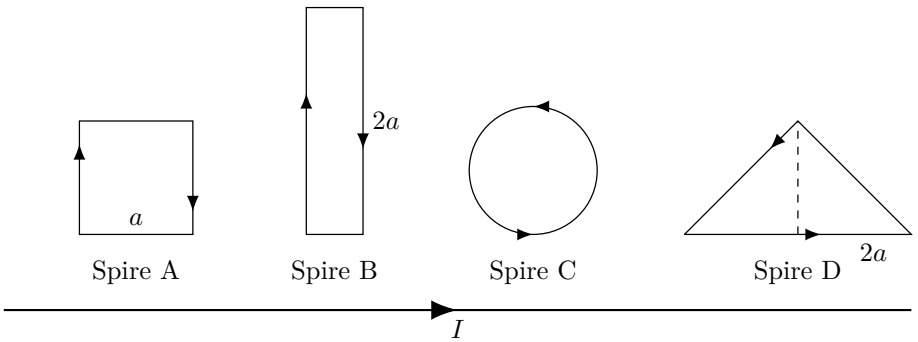
b) la longueur du solénoïde (fil de même épaisseur) .....

c) l'épaisseur du fil (la longueur de fil restant la même) .....

d) le rayon de la bobine (la longueur de fil restant la même) .....

Entraînement 17.2 — Flux dans des circuits orientés.

Des boucles de différentes formes mais toutes de même surface $S = a^2$ sont placées proches d'un fil infini parcourt par un courant I. On peut montrer que le champ produit par un fil infini est de la forme $\vec{B}(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$ dans le repère cylindrique (avec Oz confondu avec le fil).



a) Quels flux sont négatifs ?

(a) ϕ_A (b) ϕ_B (c) ϕ_C (d) ϕ_D (e) Aucun

.....

b) A-t-on $|\phi_A| > |\phi_B|$?

(a) Oui
(b) Non

.....

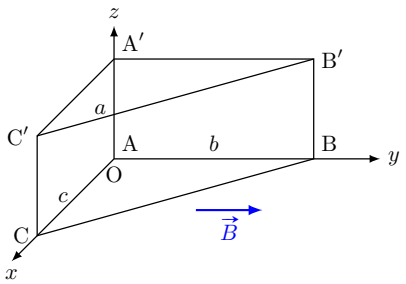
c) A-t-on $|\phi_C| > |\phi_D|$?

(a) Oui
(b) Non

.....

Entraînement 17.3 — Flux dans des polyèdres (1).

Soit le polyèdre ci-dessous placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_y}$. Déterminer les expressions des flux magnétiques sortant à travers les différentes surfaces de ce polyèdre.



$AA' = BB' = CC' = a$
$AB = A'B' = b$
$AC = A'C' = c$

a) $\phi(\vec{B})$ pour ABC = ...

b) $\phi(\vec{B})$ pour A′C′B′ = ...

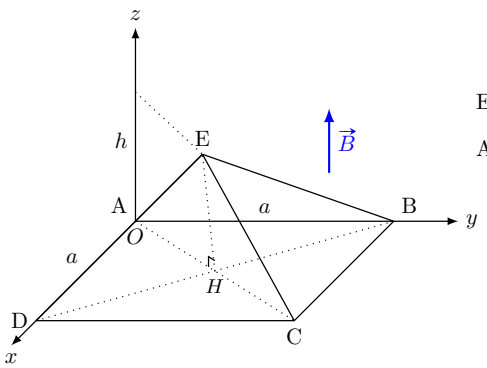
c) $\phi(\vec{B})$ pour AA′B′B = ...

d) $\phi(\vec{B})$ pour A′ACC′ = ...

e) $\phi(\vec{B})$ pour CBB′C′ = ...

Entraînement 17.4 — Flux dans des polyèdres (2).

Soit le polyèdre ci-dessous placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_z}$. Déterminer les expressions des flux magnétiques sortant à travers les différentes surfaces de ce polyèdre.



EH = h

AB = BC = CD = DA = a

a) $\phi(\vec{B})$ pour ABCD = ... ☐

b) $\phi(\vec{B})_{\text{tot}}$ = ... ☐

c) $\phi(\vec{B})$ pour ADE = ... ☐

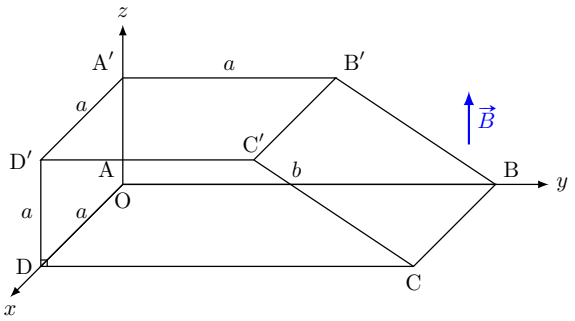
d) $\phi(\vec{B})$ pour DCE = ... ☐

e) $\phi(\vec{B})$ pour CBE = ... ☐

f) $\phi(\vec{B})$ pour BAE = ... ☐

Entraînement 17.5 — Flux dans des polyèdres (3).

Soit le polyèdre ci-dessous placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_z}$. Déterminer les expressions des flux magnétiques sortant à travers les différentes surfaces de ce polyèdre.



A′B′ = B′C′ = C′D′ = D′A′ = a

AA′ = DD′ = AD = A′D′ = a

AB = DC = b

a) $\phi(\vec{B})$ pour ABCD = ... ☐

b) $\phi(\vec{B})$ pour BAA′B′ = ... ☐

c) $\phi(\vec{B})$ pour CC′D′D = ... ☐

d) $\phi(\vec{B})$ pour ADD′A′ = ... ☐

e) $\phi(\vec{B})$ pour A′D′C′B′ = ... ☐

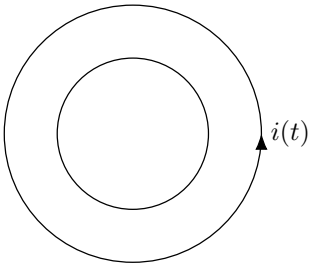
f) $\phi(\vec{B})$ pour CBB′C′ = ... ☐

Loi de Lenz-Faraday

Entraînement 17.6 — Boucles imbriquées.

Deux boucles circulaires se trouvent dans le même plan.

Si le courant $i(t)$ dans la boucle externe est dans le sens trigonométrique et augmente avec le temps, que vaut le courant induit dans la boucle interne ?

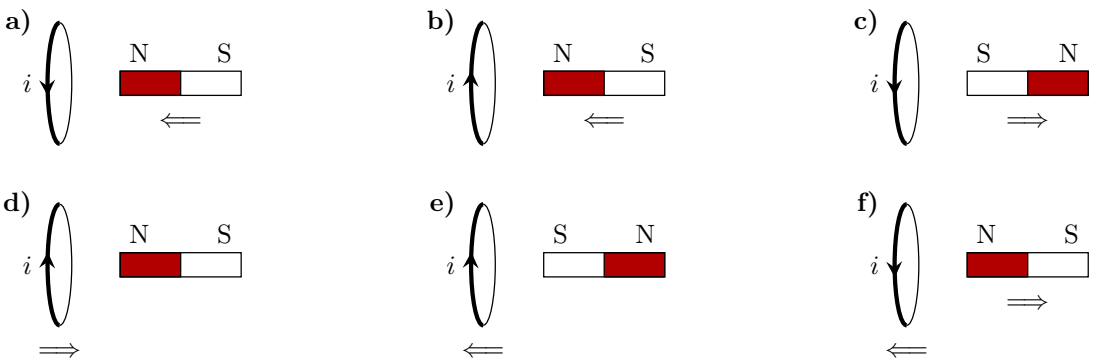


(a) Il n'y a pas de courant induit.
(b) Le courant induit est dans le sens des aiguilles d'une montre.
(c) Le courant induit est antihoraire.
(d) La direction du courant induit dépend des dimensions des boucles.

.....

Entraînement 17.7 — Signe du courant induit (1).

Dans chacun des circuits ci-dessous, la spire circulaire et/ou l'aimant sont déplacés dans le sens indiqué par la double flèche. Le courant apparaissant dans la spire pendant le déplacement est noté i.

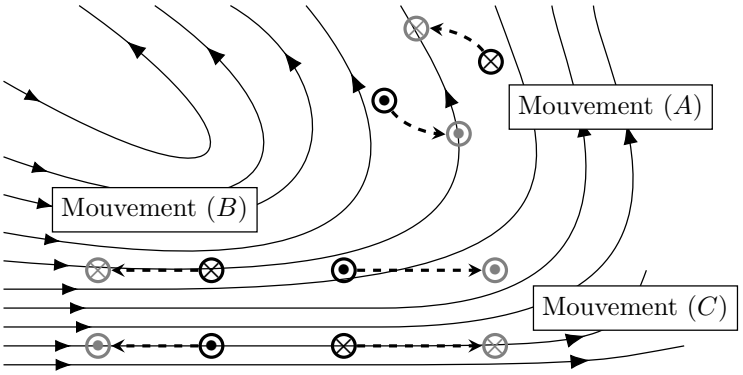


Pour chacune des situations schématisées ci-dessus, dire si on a $i > 0$ ou si on a $i < 0$.

a) .....
b) .....
c) .....
d) .....
e) .....
f) .....

Entraînement 17.8 — Signe du courant induit (2).

Des spires circulaires, orientées, perpendiculaires au plan de la figure, nommées (A), (B) et (C) sont placées dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique (voir figure ci-dessous). Pour chacune d'elles, on veut prévoir par des considérations physiques le signe du courant i lorsque les spires sont déplacées (les déplacements sont indiqués par les flèches pointillées).



Pour chaque mouvement considéré, établir si « le flux diminue », si « le flux augmente » ou si « le flux ne varie pas ».

a) mouvement (A) .....

b) mouvement (B) .....

c) mouvement (C) .....

Pour chaque mouvement considéré, en déduire si $i > 0$, si $i < 0$ ou si $i = 0$.

d) (A) ..... e) (B) ..... f) (C) .....

Entraînement 17.9 — Calcul de fém avec champ magnétique variable.

On plonge une spire de surface $S(t)$ dans une zone où règne un champ magnétique $B(t)$. Déterminer la force électromotrice $e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ induite pour les flux suivants :

a) $\Phi_1 = B_0 S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .....

b) $\Phi_2 = B_0 S_0 \times \left(1 + \dfrac{t}{\tau}\right) \exp^{-\frac{t}{\tau}}$ .....

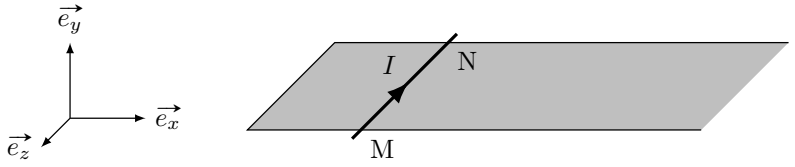
c) $\Phi_3 = B_0(1 - \cos(2\omega t)) S_0 \sin^2(\omega t)$ .....

d) $\Phi_4 = B_0 \cos(\omega t) S_0 \sin(3\omega t)$ .....

Force de Laplace

Entraînement 17.10 — Rails de Laplace.

Une tige métallique de longueur MN = d, de masse m est parcourue par un courant d'intensité constante I et est lancée avec une vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$. À la position $x = 0$ la tige entre dans une zone où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B\vec{e_y}$. On néglige les frottements et tout phénomène d'induction.



Exprimer :

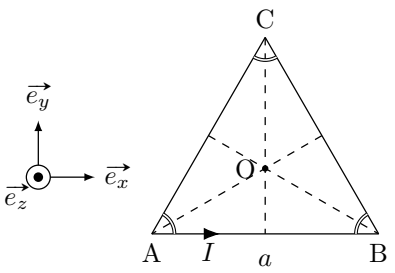
a) La force de Laplace $\vec{F}$ qui s'exerce sur la tige en fonction de B, d et I .....

b) La norme $v(t)$ de la vitesse en fonction du temps .....

c) La distance d'arrêt D depuis la position initiale en fonction de v_0, B, I, m et d ..

Entraînement 17.11 — Résultante des forces de Laplace.

On considère un cadre triangulaire parcouru par un courant d'intensité I. Les trois côtés du cadre ont le même longueur notée a. On plonge ce cadre dans un champ magnétique extérieur orienté suivant la direction $\vec{e_z}$: $\vec{B} = B\vec{e_z}$.



On rappelle qu'un élément de longueur $\mathrm{d}\ell$, parcouru par un courant d'intensité I placé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ est soumis à la force élémentaire, appelée *force de Laplace* :

$$\mathrm{d}\vec{f} = I\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

Exprimer les forces de Laplace sur chaque côté de ce cadre :

a) $\vec{F}_{L,\mathrm{AB}} =$ ....

c) $\vec{F}_{L,\mathrm{CA}} =$ ....

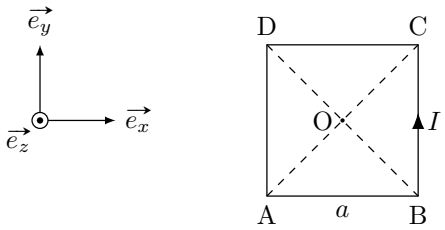
b) $\vec{F}_{L,\mathrm{BC}} =$ ....

Que vaut la résultante de ces forces ?

d) $\vec{F}_{L,\mathrm{tot}} =$ .....

Entraînement 17.12 — Couple des forces de Laplace.

On considère un cadre carré parcouru par un courant d'intensité I. On plonge ce cadre dans un champ magnétique extérieur orienté suivant la direction $\vec{e_y}$: $\vec{B} = B\vec{e_y}$.



Exprimer les forces de Laplace sur chaque côté de ce cadre :

a) $\vec{F}_{L,\mathrm{AB}} =$ .....

b) $\vec{F}_{L,\mathrm{BC}} =$ .....

c) $\vec{F}_{L,\mathrm{CD}} =$ .....

d) $\vec{F}_{L,\mathrm{DA}} =$ .....

Que vaut la résultante de ces forces ?

e) $\vec{F}_{L,\mathrm{tot}} =$ .....

Calculer le moment des forces de Laplace par rapport au point O.

f) $\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}\left(\vec{F}_{L,\mathrm{tot}}\right) =$ .....

On rappelle qu'un dipôle magnétique peut se caractériser par son moment magnétique $\vec{m} = I\vec{S}$. En présence d'un champ magnétique extérieur, le dipôle magnétique subit un couple $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

Exprimer $\vec{m}$ et $\vec{\Gamma}$.

g) $\vec{m} =$ .....

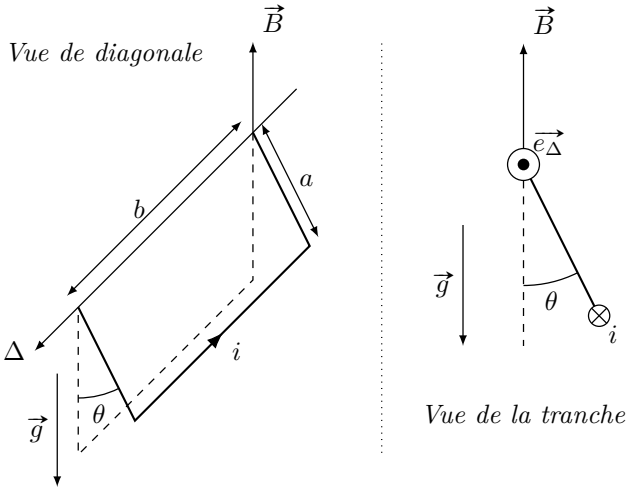
h) $\vec{\Gamma} =$ .....

Entraînement 17.13 — Équilibre d'un cadre.

Un cadre conducteur, de forme rectangulaire, de longueur b et largeur a peut tourner sans frottement autour de l'axe Δ.

La masse totale du cadre est m.

Un dispositif, non représenté sur la figure, impose une intensité du courant i constante dans le cadre.



Exprimer :

a) le moment magnétique $\vec{m}$ en fonction de a, b et i .....

b) le couple magnétique Γ_Δ projeté sur l'axe Δ en fonction de a, b, i, B et θ .....

c) le moment du poids par rapport à l'axe Δ en fonction de a, m, g, et θ .....

d) la position d'équilibre θ_{eq} en fonction de B, m, g, b et i .....

Réponses mélangées

$\vec{0}$ $\quad \dfrac{mv_0^2}{2IBd}$ $\quad 0$ $\quad iab\vec{e_\theta}$ $\quad \vec{0}$ $\quad i>0$ $\quad 0$ $\quad \times 2$ $\quad \arctan\left(\dfrac{2ibB}{mg}\right)$ $\quad$ (b)

$-Bab$ $\quad B_0S_0\dfrac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau}$ $\quad -Ia^2B\vec{e_x}$ $\quad i>0$ $\quad -IaB\vec{e_z}$ $\quad IaB\vec{e_z}$ $\quad$ le flux ne varie pas

$i<0$ $\quad \times 2$ $\quad -8B_0S_0\omega\cos(\omega t)\sin^3(\omega t)$ $\quad i<0$ $\quad i=0$ $\quad 0$ $\quad \vec{0}$ $\quad$ (a) et (b)

Ba^2 $\quad 0$ $\quad i>0$ $\quad i<0$ $\quad -IBd\vec{e_x}$ $\quad Ba(b-a)$ $\quad -IaB\vec{e_y}$ $\quad$ Oui

$-B_0S_0\omega[2\cos(4\omega t)+\cos(2\omega t)]$ $\quad \dfrac{Ba^2}{4}$ $\quad \dfrac{Ba^2}{4}$ $\quad Bac$ $\quad -\dfrac{IBd}{m}t+v_0$ $\quad \times 1/2$

$-Bac$ $\quad IaB\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_x}+\dfrac{1}{2}\vec{e_y}\right)$ $\quad iabB\cos\theta$ $\quad -Ba^2$ $\quad \dfrac{Ba^2}{4}$ $\quad 0$ $\quad$ le flux diminue

0 $\quad \dfrac{Ba^2}{4}$ $\quad$ Non $\quad Ia^2\vec{e_z}$ $\quad -Ia^2B\vec{e_x}$ $\quad -\dfrac{a}{2}mg\sin\theta$ $\quad$ le flux diminue

$i<0$ $\quad i>0$ $\quad IaB\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_x}+\dfrac{1}{2}\vec{e_y}\right)$ $\quad \vec{0}$ $\quad B_0S_0\omega\sin(\omega t+\varphi)$ $\quad 0$ $\quad \times 2$

► Réponses et corrigés page 286

Gaz parfaits

Prérequis
La loi des gaz parfaits s'écrit $PV = nRT$, avec P en pascals, V en mètres cubes, n en moles et T en kelvins.

Constantes utiles

→ constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$

→ définition du bar : $1\,\mathrm{bar} = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$

→ conversion entre kelvins et degrés Celsius : $T\,(\mathrm{K}) = \theta\,(^\circ\mathrm{C}) + 273{,}15$

Entraînement au calcul

Entraînement 18.1 — Quelques calculs de volume.

Calculer le volume (en L) occupé à $T = 25\,^\circ\mathrm{C}$ et sous une pression $P = 1{,}0\,\mathrm{bar}$ pour les gaz suivants.

a) $100\,\mathrm{g}$ d'argon ($M_{\mathrm{Ar}} = 40\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$) .....

b) $32\,\mathrm{g}$ de dioxygène $\mathrm{O_2}$ ($M_{\mathrm{O}} = 16\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$) .....

c) $1{,}2\,\mathrm{kg}$ de dioxyde de carbone $\mathrm{CO_2}$ ($M_{\mathrm{C}} = 12\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$) .....

Entraînement 18.2 — Bouteille de butane.

Une bouteille de 30,6 L, maintenue à 20 °C, contient du butane ($\mathrm{C_4H_{10}}$) qui est sous la forme d'un mélange liquide/gaz comprimé. Le contenu de la bouteille présente une masse m de 13 kg.

On donne $M_{\mathrm{H}} = 1\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ et $M_{\mathrm{C}} = 12\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

a) Combien vaut la masse molaire (en $\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$) du butane ? .....

b) Quelle serait la pression à l'intérieur de la bouteille si tout le butane était à l'état gazeux ?

.....

c) Quel volume occuperait le contenu de la bouteille, s'il était entièrement à l'état gazeux, sous une pression de 1,0 bar et à la température de 20 °C ? .....

Entraînement 18.3 — Volume molaire.

Calculer le volume molaire (en $\mathrm{L \cdot mol^{-1}}$) d'un gaz parfait :

a) sous 1,00 bar et à 25,0 °C .....

b) sous 2,00 bar et à 50,0 °C .....

Entraînement 18.4 — Surchauffe ?

Un pneu de voiture, de volume supposé constant, est gonflé à froid, à la température $T_1 = 20\,°C$, sous la pression $P_1 = 2{,}0\,\text{bar}$. Après avoir roulé un certain temps, le pneu affiche une pression $P_2 = 2{,}3\,\text{bar}$.

Quelle est alors sa température (en °C) si l'on assimile l'air à un gaz parfait ? .....

Entraînement 18.5

Un récipient de volume V_1 enferme de l'air (assimilé à un gaz parfait) à la température $T_1 = 20\,°C$ et sous une pression $P_1 = 1{,}20\,\text{bar}$.

Que vaut la pression finale (en bar) si l'on augmente :

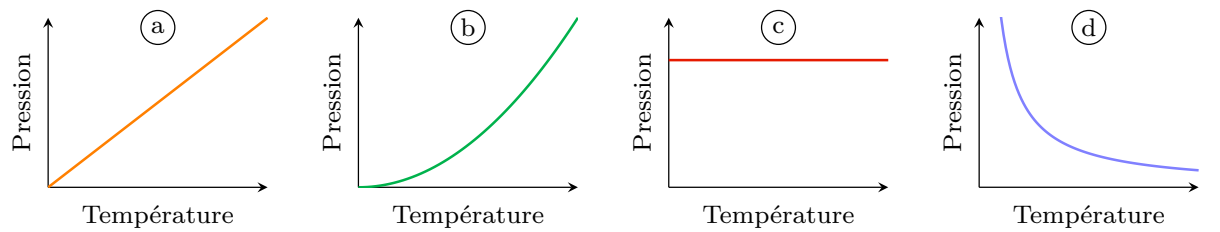
a) le volume de 20 % ? .....

b) la température de 10 °C ? .....

Manipulations algébriques

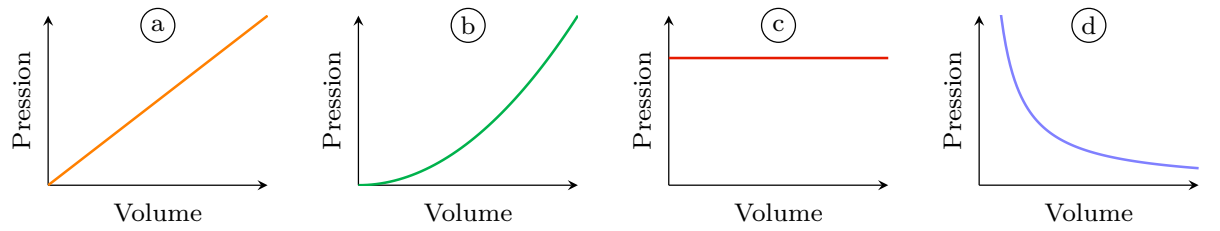
Entraînement 18.6 — Faire le lien entre une formule et un graphe.

a) Lequel de ces graphes représente la relation entre pression et température lorsque n et V sont fixés ?



.....

b) Lequel de ces graphes représente la relation entre pression et volume lorsque n et T sont fixés ?



.....

Entraînement 18.7 — Masse volumique de l'eau.

On considère un gaz parfait de masse molaire M, à la pression P et à la température T.

a) Exprimer sa masse volumique ρ en fonction de M, P et T. .....

b) La vapeur d'eau a pour masse volumique $\rho = 0{,}595\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ à 100 °C et 1 013 hPa. Sa masse molaire est $M_{H_2O} = 18\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Est-ce compatible avec le modèle du gaz parfait ? .....

Entraînement 18.8 — Compression d'un gaz.

Un gaz, initialement à la pression P_1 et à la température $T_1 = 25\,°\text{C}$, est comprimé jusqu'à une pression valant $P_2 = 4P_1$. Sa masse volumique initiale est de ρ_1.

Exprimer sa masse volumique finale ρ_2 en fonction de ρ_1 si sa température T_2 vaut :

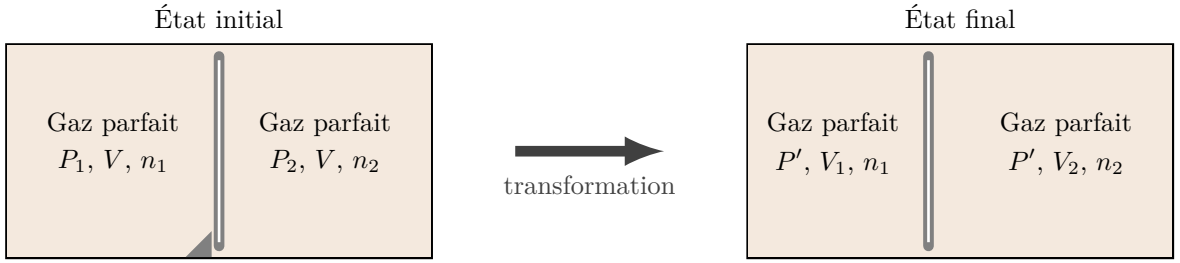
a) $T_2 = T_1$ .....

b) $T_2 = 50\,°\text{C}$ .....

Entraînement 18.9 — Mouvement d'un piston.

Une enceinte maintenue à une température T est divisée en deux parties d'égal volume V, par un piston mobile sans frottement.

Initialement, le piston est bloqué, et chaque compartiment contient un gaz parfait de pressions respectives P_1 et P_2. On note n_1 et n_2 les quantités de matière dans chaque compartiment.



Une fois débloqué, le piston se déplace librement de façon à ce que les pressions dans chaque compartiment deviennent égales.

Déterminer :

a) la relation entre n_1, n_2, P_1 et P_2 .....

b) le volume V_1 en fonction de V, P_1 et P_2 .....

Entraînement 18.10 — Expression de la densité d'un gaz.

La densité d d'un gaz A est le rapport entre la masse volumique du gaz A et la masse volumique de l'air sous les mêmes conditions de pression et de température. Autrement dit, c'est

$$d = \frac{\rho_A}{\rho_{air}}.$$

On note M_A la masse molaire de A et M_{air} celle de l'air.

Exprimer la densité d en fonction de M_A et M_{air} à l'aide de la loi du gaz parfait ....

Entraînement 18.11 — Bulle de savon.

Une bulle de savon sphérique de rayon r enferme n moles d'air à la température ambiante T_0.

La pression qui règne à l'intérieur de la bulle de savon est donnée par

$$P = P_0 + \frac{4\gamma}{r}$$

où γ est la tension superficielle de l'eau savonneuse et où P_0 est la pression atmosphérique.

a) Donner l'expression du volume de la bulle en fonction r .....

b) Exprimer n en fonction de P_0, T_0, γ et r .....

Mélange de gaz parfaits

Tous les mélanges de gaz seront considérés parfaits.

Entraînement 18.12 — Un gaz sous pression.

Un gisement donné fournit du gaz naturel dont la composition (en fractions molaires) est :

- 81,3 % méthane (CH_4)
- 2,9 % éthane (C_2H_6)
- 0,4 % propane (C_3H_8)
- 0,2 % butane (C_4H_{10})
- 14,3 % diazote (N_2)

On donne $M_H = 1\,g \cdot mol^{-1}$, $M_C = 12\,g \cdot mol^{-1}$ et $M_N = 14\,g \cdot mol^{-1}$.

Calculer :

a) la masse molaire du mélange ....

b) la fraction massique de l'éthane .

Entraînement 18.13 — Composition d'un mélange.

Un mélange de diazote N_2 ($M_N = 14\,g \cdot mol^{-1}$) et de dioxygène O_2 ($M_O = 16\,g \cdot mol^{-1}$) présente une masse volumique de $1{,}00\,g \cdot L^{-1}$ à 100 °C et sous une pression de 1 013 hPa.

a) Calculer la masse molaire du mélange .....

b) En déduire la fraction molaire en dioxygène .....

Entraînement 18.14 — Air humide.

L'humidité relative (ou *taux d'hygrométrie*) est le rapport

$$H = \frac{\text{pression partielle de vapeur d'eau}}{\text{pression de vapeur saturante}}.$$

La pression de vapeur saturante de l'eau à 25 °C vaut 3 166 Pa.

Quelle est la masse de vapeur d'eau (on donne $M_{H_2O} = 18\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$) présente dans une pièce de $400\,\text{m}^3$ contenant de l'air à 25 °C un jour où l'humidité relative est de 60 % ? .....

Entraînement 18.15 — Ajout d'un gaz.

Un récipient clos de volume V enferme un mélange gazeux contenant deux espèces A et B à une température T fixée. La pression totale vaut $P = 1\,500\,\text{hPa}$ et la pression partielle de A est de 1 100 hPa.

a) Quelle est la pression partielle de B ? .....

b) On ajoute une espèce C au système de sorte que la pression totale augmente jusqu'à 1 800 hPa.

Quelle est la nouvelle pression partielle de B ? .....

Réponses mélangées

$25\,\text{L}$ $4{,}79\,\%$ $6{,}8\times10^2\,\text{L}$ $24{,}8\,\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}$ (a) $18{,}2\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ $\dfrac{2P_1}{P_1+P_2}V$

$\dfrac{4}{3}\pi r^3$ $3{,}7\rho_1$ $1{,}00\,\text{bar}$ $1{,}24\,\text{bar}$ non $400\,\text{hPa}$ $400\,\text{hPa}$ (d)

$64\,°\text{C}$ $30{,}6\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ $\dfrac{M_\text{A}}{M_\text{air}}$ $1{,}8\times10^2\,\text{bar}$ $\dfrac{4\pi P_0 r^3+16\pi\gamma r^2}{3RT_0}$ $\dfrac{n_2}{n_1}=\dfrac{P_2}{P_1}$

$62\,\text{L}$ $65{,}6\,\%$ $5{,}5\,\text{kg}$ $58\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ $13{,}4\,\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}$ $\dfrac{MP}{RT}$ $4\rho_1$ $5{,}5\,\text{m}^3$

▶ Réponses et corrigés page 292

Premier Principe

Prérequis
Notions sur les gaz parfaits. Équation d'état des gaz parfaits $PV = nRT$.

Constantes utiles
→ constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$

Calcul du travail des forces de pression

Entraînement 19.1 — Les bonnes unités.

Un étudiant doit calculer le travail reçu par un système au cours d'une transformation. L'expression littérale est la suivante :

$$W = -P_0(V_f - V_i).$$

Il sait que pour faire l'application numérique, la pression doit être exprimée en pascal et les volumes en m^3.

On rappelle que $1\,\mathrm{bar} = 1\times10^5\,\mathrm{Pa}$.

a) Calculer W pour $P_0 = 1{,}5\,\mathrm{bar}$, $V_i = 5\,\mathrm{L}$ et $V_f = 3\,\mathrm{L}$ .....

b) Calculer W pour $P_0 = 50\,\mathrm{mbar}$, $V_i = 2\,\mathrm{cL}$ et $V_f = 120\,\mathrm{mL}$ .....

c) Calculer W pour $P_0 = 150\,\mathrm{bar}$, $V_i = 20\,\mathrm{cm}^3$ et $V_f = 10\,\mathrm{cm}^3$ .....

Entraînement 19.2 — Suite de transformations.

Un système composé de $n = 2$ moles de gaz en contact avec un milieu extérieur à la pression $P_{\mathrm{ext}} = 1\,\mathrm{bar}$, subit une suite de transformations.

Au cours de la première, son volume ne varie pas (transformation isochore).

Au cours de la seconde, la pression extérieure ne varie pas (transformation monobare) et son volume initialement à $V_i = 1\,\mathrm{L}$ augmente et se fixe à $V_f = 2\,\mathrm{L}$.

Les transformations étant quasi statiques, le travail des forces de pression se met sous la forme suivante :

$$W = -\int_{V_{\mathrm{initial}}}^{V_{\mathrm{final}}} P_{\mathrm{ext}}\,\mathrm{d}V.$$

a) Calculer W au cours de la première transformation .....

b) Calculer W au cours de la seconde transformation .....

Entraînement 19.3 — Bataille de travaux sans calculatrice.

Considérons deux systèmes A et B recevant de l'énergie du milieu extérieur. La puissance reçue par le premier durant 30 s s'élève à 50 W. Le second reçoit une puissance plus importante (400 W) mais durant un temps plus court (5 s).

Quel système a reçu la plus grande quantité d'énergie (sous forme de travail) ? .....

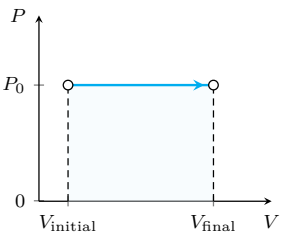
Entraînement 19.4 — Calcul d'aires.

Pour une transformation quasi-statique, le travail des forces de pression s'écrit sous la forme :

$$W = -\int_{V_{\text{initial}}}^{V_{\text{final}}} P\,\mathrm{d}V$$

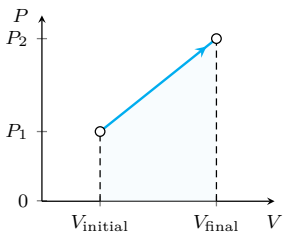
Ce travail W correspond alors à l'opposé de l'aire sous la courbe $P = f(V)$, pour $V_{\text{final}} > V_{\text{initial}}$.

a) Exprimer le travail W en fonction des variables P_0, V_{initial} et V_{final}.



.....

b) Exprimer le travail W en fonction des variables P_1, P_2, V_{initial} et V_{final}.



.....

Entraînement 19.5 — Différents types de transformations.

Un système est composé de n moles de gaz parfait, de volume V, de pression P et de température T.

Nous souhaitons évaluer le travail reçu par ce système au cours de transformations quasi statiques :

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,\mathrm{d}V$$

La loi des gaz parfaits assure que $PV = nRT$.

Transformation isotherme :
Au cours de cette transformation, la température du système ne varie pas et $T = T_0$.

a) Écrire W en fonction de n, R, T_0, V_i et V_f .....

Transformation polytropique et quasi-statique :
Au cours de cette transformation, on a PV^k = constante (avec $k > 1$). Les pressions et volumes du système à l'instant initial seront notés P_i et V_i et à l'instant final P_f et V_f.

b) Écrire le travail W en fonction de V_i, V_f, P_i, P_f et k .....

Variation d'énergie interne et d'enthalpie

Entraînement 19.6 — Problème d'unités.

La capacité thermique massique de l'eau vaut $c = 4{,}2\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

La masse molaire de l'eau vaut $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Une énergie peut être exprimée en joules ou en kilocalories ; on donne la relation $1\,\text{kcal} = 4\,184\,\text{J}$.

a) Évaluer la capacité thermique molaire C_m de l'eau en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .....

b) En déduire sa valeur en $\text{kcal} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .....

Entraînement 19.7 — Variation d'énergie interne d'une phase condensée.

Un opérateur chauffe une masse m d'eau liquide de capacité thermique massique $c = 4{,}2\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. La température initialement à $T_i = 20\,^\circ\text{C}$ se stabilise en fin d'expérience à $T_f = 30\,^\circ\text{C}$.

Il souhaite calculer sa variation d'énergie interne par l'application de la relation suivante :

$$\Delta U = \int_{T_i}^{T_f} C\,\text{d}T$$

où C est la capacité thermique du système.

a) Donner ΔU du système en fonction c, m, T_i et T_f .....

b) Calculer ΔU en kJ pour $m = 100\,\text{g}$ .....

Entraînement 19.8 — Étude d'un gaz parfait diatomique.

Soient n moles de gaz parfait diatomique évoluant d'un état initial caractérisé par $T_i = 60\,^\circ\text{C}$ vers un état final à la température $T_f = 90\,^\circ\text{C}$.

Pour un gaz parfait diatomique, la relation de Mayer impose $C_P - C_V = nR$.

Pour un gaz parfait diatomique, on a $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V} = 1{,}4$.

a) Exprimer C_V (la capacité thermique à volume constant du gaz parfait) en fonction de n, R et γ

.....

b) Évaluer $\Delta U = \displaystyle\int_{T_i}^{T_f} C_V\,\text{d}T$ pour $n = 1\,\text{mol}$ .....

c) Exprimer C_P (la capacité thermique à pression constante du gaz parfait) en fonction de n, R et γ

.....

d) Évaluer $\Delta H = \displaystyle\int_{T_i}^{T_f} C_P\,\text{d}T$ pour $n = 1\,\text{mol}$ .....

Entraînement 19.9 — Des variations d'énergie interne.

Suivant la finesse des modèles utilisés, la capacité calorifique à volume constant C_V peut être une fonction de la température. Le calcul de la variation d'énergie interne $\Delta U = \int_{T_i}^{T_f} C_V(T)\,\mathrm{d}T$ se fera alors en tenant compte de son expression.

Donner, dans chacun des cas suivants, l'expression de ΔU.

a) pour un gaz parfait (C_V est une constante) .....

b) pour un gaz réel ($C_V = AT + B$, où A et B sont des constantes) ...

c) pour un solide ($C_V = DT^3$, où D est une constante) .....

Entraînement 19.10 — Variation d'enthalpie lors d'un changement d'état.

Dans cet entraînement, le système sera de l'eau : à l'état initial, 1 kg d'eau sous forme liquide, à la température de 0 °C ; à l'état final un mélange de 800 g d'eau sous forme solide, et 200 g d'eau sous forme liquide à la température de 0 °C.

On rappelle la valeur de l'enthalpie massique de fusion de l'eau : $L_{\text{fus}} = 335\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Quelle est la variation d'enthalpie du système ? .....

Applications du premier principe

Entraînement 19.11 — Détente de Joule-Gay Lussac d'un gaz réel.

La détente de Joule-Gay Lussac est une détente au cours de laquelle l'énergie interne du système est constante : $\Delta U = 0$. Pour n moles d'un gaz réel passant du volume V_i au volume V_f et de la température V_i à la température T_i à T_f, on a alors

$$\Delta U = C_V(T_f - T_i) - n^2 a\left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i}\right) = 0.$$

Exprimer T_f en fonction de T_i, C_V, n, a, V_f, V_i .....

Entraînement 19.12 — Température finale.

On applique le premier principe à un système subissant une transformation isobare : on a

$$\Delta H = \int_{T_i}^{T_f} C_P(T)\,\mathrm{d}T = Q.$$

Dans chacun des cas suivants, exprimer T_f (en fonction de T_i, Q et des paramètres liés à C_P).

a) $C_P = C$ est une constante .....

b) $C_P = \dfrac{A}{T}$ (où A est une constante) .....

c) $C_P = BT^2$ (où B est une constante) .....

Entraînement 19.13 — Transformations du gaz parfait.

Dans cet entraînement, le système correspond à n moles de gaz parfait de coefficient adiabatique $\gamma = 1{,}4$. Il subit différentes transformations suivant les questions, et nous noterons les variables dans l'état initial P_i, V_i, T_i et les variables dans l'état final P_f, V_f, T_f.

On appliquera le premier principe $\Delta U = W + Q$, avec $\Delta U = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_i)$ et $W = -\displaystyle\int_{V_i}^{V_f} P \, \mathrm{d}V$ pour une transformation quasi-statique.

Dans chaque cas, exprimer le transfert thermique Q reçu par le gaz.

a) Pour une transformation isotherme (à température constante) .....

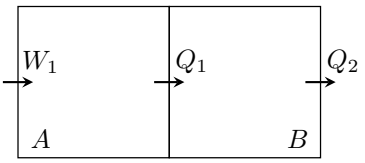
b) Pour une transformation isochore (à volume constant) .....

c) Pour une transformation adiabatique (sans transfert thermique) ....

Entraînement 19.14 — Étude d'une enceinte divisée en deux compartiments.

Une enceinte est divisée en deux compartiments.

- Le compartiment A reçoit un travail W_1 de l'extérieur et fournit un transfert thermique Q_1 au compartiment B.
- Le compartiment B reçoit un transfert thermique Q_1 du compartiment A et fournit un transfert thermique Q_2 à l'extérieur.



On rappelle l'expression du premier principe pour un système : $\Delta U = W + Q$, où ΔU est la variation d'énergie interne du système, et où W et Q sont respectivement le travail et le transfert thermique reçus par le système considéré.

a) Exprimer ΔU_A la variation d'énergie interne du compartiment A .....

b) Exprimer ΔU_B la variation d'énergie interne du compartiment B .....

c) Exprimer ΔU_{tot} la variation d'énergie interne des compartiments A et B, qui correspond à la somme des variations d'énergie interne des compartiments A et B .....

Calorimétrie

Entraînement 19.15 — Capacité thermique d'un calorimètre.

On considère un calorimètre de valeur en eau $m = 10\,\text{g}$. La valeur en eau d'un calorimètre est la masse d'eau ayant la même capacité thermique que le calorimètre vide.
On rappelle la capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_{\text{eau}} = 4{,}2\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Que vaut la capacité thermique du calorimètre ? .....

Entraînement 19.16 — Évolution de la température d'un calorimètre.

Nous considérons ici un calorimètre initialement à la température T_0 alors que l'air extérieur est à la température T_a.
Le calorimètre étant de capacité thermique C, sa température T évolue au cours du temps et obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{h}{C}T = \frac{h}{C}T_a.$$

a) Définir un temps caractéristique pour l'équation différentielle .....

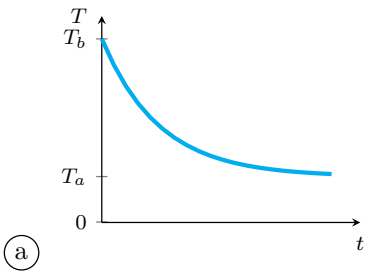
b) Résoudre l'équation différentielle et exprimer T en fonction du temps .....

Entraînement 19.17 — Évolution temporelle de la température.

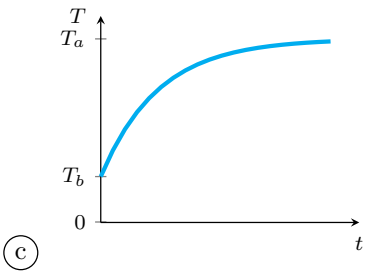
En échangeant avec l'extérieur, la température d'un système varie et suit la loi d'évolution suivante :

$$T = T_b + (T_a - T_b)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}.$$

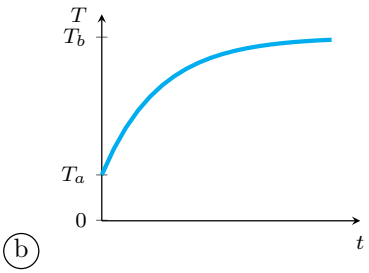
Quelle courbe correspond à cette évolution temporelle ?



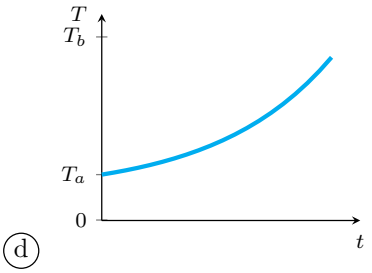
(a)



(c)



(b)



(d)

.....

Entraînement 19.18 — Mélange de liquides.

Dans un calorimètre, on mélange une masse m_1 d'eau liquide à la température T_1 et une masse m_2 d'eau liquide à la température T_2.

a) À l'équilibre, la température de l'ensemble T_{eq} vérifie l'équation :

$$m_1 c(T_{\text{eq}} - T_1) + m_2 c(T_{\text{eq}} - T_2) = 0.$$

Déterminer T_{eq} en fonction de T_1, T_2, m_1, m_2 .....

b) En réalité, des pertes thermiques Q sont observées durant l'évolution de la température.

La température T_{eq} vérifie alors l'équation suivante :

$$m_1 c(T_{\text{eq}} - T_1) + m_2 c(T_{\text{eq}} - T_2) = Q.$$

Déterminer T_{eq} en fonction de T_1, T_2, m_1, m_2 et Q .....

Réponses mélangées

$-0{,}5\,\text{J}$ $\quad \dfrac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2}$ $\quad W_1 - Q_1$ $\quad T_i + \dfrac{n^2a}{C_V}\left(\dfrac{1}{V_f} - \dfrac{1}{V_i}\right)$

$\dfrac{A}{2}({T_f}^2 - {T_i}^2) + B(T_f - T_i)$ $\quad 300\,\text{J}$ $\quad \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_i)$ $\quad 42\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$

$18 \times 10^{-3}\,\text{kcal}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ $\quad mc(T_f - T_i)$ $\quad 6{,}2 \times 10^2\,\text{J}$ $\quad \dfrac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2} + \dfrac{Q}{(m_1 + m_2)c}$

$\dfrac{P_fV_f - P_iV_i}{k - 1}$ $\quad -268\,\text{kJ}$ $\quad B$ $\quad 150\,\text{J}$ $\quad 76\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

$4{,}2\,\text{kJ}$ $\quad -P_0(V_{\text{final}} - V_{\text{initial}})$ $\quad 0\,\text{J}$ $\quad C_V(T_f - T_i)$ $\quad Q_1 - Q_2$

$T_i + \dfrac{Q}{C}$ $\quad -nRT_0\ln\left(\dfrac{V_f}{V_i}\right)$ $\quad W_1 - Q_2$ $\quad \dfrac{-(P_2 + P_1)(V_{\text{final}} - V_{\text{initial}})}{2}$

$\dfrac{D}{4}({T_f}^4 - {T_i}^4)$ $\quad nRT_i\ln\left(\dfrac{V_f}{V_i}\right)$ $\quad 0$ $\quad T_i\,\text{e}^{\frac{Q}{A}}$ $\quad \left({T_i}^3 + \dfrac{3Q}{B}\right)^{1/3}$ $\quad \dfrac{nR}{\gamma - 1}$

$8{,}7 \times 10^2\,\text{J}$ $\quad \dfrac{C}{h}$ $\quad \dfrac{nR\gamma}{\gamma - 1}$ $\quad -100\,\text{J}$ $\quad$ (b) $\quad T_a + (T_0 - T_a)\text{e}^{-\frac{ht}{C}}$

► Réponses et corrigés page 296

Second principe et machines thermiques

Prérequis
Équation d'état des gaz parfaits ($PV = nRT$). Premier principe de la thermodynamique ($\Delta U = W + Q$). Fraction molaire. Activité d'une espèce chimique (en phase gazeuse, en phase condensée). Loi de Dalton.

Constantes utiles

→ constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$

→ conversion entre kelvins et degrés Celsius : $T\,(\mathrm{K}) = \theta\,(^\circ\mathrm{C}) + 273{,}15$

Pour bien commencer

Entraînement 20.1 — Compression d'un gaz parfait.

On comprime un gaz parfait de capacité thermique isochore $C_V = 1{,}04\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ par l'apport d'un travail $W = 100\,\mathrm{J}$. Il passe alors de $T_i = 20\,^\circ\mathrm{C}$ à $T_f = 25\,^\circ\mathrm{C}$.

La variation d'énergie interne de ce gaz parfait vérifie le premier principe $\Delta U = W + Q$ et la première loi de Joule $\Delta U = C_V \Delta T$.

Calculer le transfert thermique Q (en joules) .....

Entraînement 20.2 — Bataille de chiffres.

On chauffe sur deux réchauds identiques de puissance $P = 1\,500\,\mathrm{W}$ une masse d'eau et une même masse identique mais distincte d'huile pour les emmener de $20\,^\circ\mathrm{C}$ à $70\,^\circ\mathrm{C}$. Qui chauffe le plus vite ?

(a) l'eau ($c_{\mathrm{eau}} = 4\,180\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$) (b) l'huile ($c_{\mathrm{huile}} = 2\,000\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$)

.....

Entraînement 20.3 — Identités thermodynamiques.

On rappelle l'identité thermodynamique

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - P\,\mathrm{d}V.$$

a) Exprimer $\mathrm{d}H$ en fonction de T, V, $\mathrm{d}S$ et $\mathrm{d}P$ sachant que $H = U + PV$.

.....

b) À l'aide de la première loi de Joule, déterminer l'expression de $\mathrm{d}U$ pour un gaz parfait suivant une transformation isotherme.

.....

c) En déduire l'expression de $\mathrm{d}S$ pour un gaz parfait suivant une transformation isotherme en fonction de n, R, V et $\mathrm{d}V$.

.....

Entraînement 20.4 — Variation élémentaire d'énergie interne.

On considère un système fermé dont l'énergie cinétique et l'énergie de pesanteur ne varient pas entre l'état initial et l'état final et qui reçoit uniquement un travail des forces de pression extérieures.

On notera P_{ext} la pression extérieure et P la pression du système.

Dans chaque cas suivant, écrire la variation élémentaire d'énergie interne donnée par le premier principe de la thermodynamique ($\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$).

a) pour une transformation adiabatique .....

b) pour une transformation adiabatique et réversible .....

c) pour une transformation isochore .....

L'entropie

Entraînement 20.5 — Variation élémentaire d'entropie.

Dans chaque cas suivant, écrire la variation élémentaire d'entropie donnée par les principes de la thermodynamique.

a) pour une transformation adiabatique .....

b) pour une transformation adiabatique et réversible .....

c) pour une transformation isochore .....

Entraînement 20.6 — Retrouver les lois de Laplace.

Un gaz parfait évolue des conditions initiales données par (T_i, V_i, P_i) vers un nouvel état donné par (T_f, V_f, P_f). Son entropie varie alors de ΔS, qu'on peut exprimer de trois manières différentes :

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \\ &= \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) \\ &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) + \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right).\end{aligned}$$

Sachant que la transformation est isentropique (on a donc $\Delta S = 0$), établir la relation entre :

a) T_f, T_i, V_f et V_i. .....

b) T_f, T_i, P_f et P_i. .....

c) P_i, P_f, V_i et V_f. .....

Entraînement 20.7 — Manipulation des lois de Laplace.

Un gaz parfait évolue de sorte que $PV^\gamma = \mathrm{C^{te}}$.

On peut en déduire d'autres relations du même type. Pour chacune d'entre elles, exprimer l'exposant x en fonction de γ.

a) $TV^x = \mathrm{C^{te}}$ ..... d) $P^\gamma T^x = \mathrm{C^{te}}$ .....

b) $PT^x = \mathrm{C^{te}}$ ..... e) $P^x T^\gamma = \mathrm{C^{te}}$ .....

c) $P^x T = \mathrm{C^{te}}$ .....

Entraînement 20.8 — Bilan d'entropie.

On chauffe 1 mol de vapeur d'eau assimilée à un gaz parfait de pression initiale $P_i = 1\,\mathrm{bar}$ à volume constant de $T_i = 120\,^\circ\mathrm{C}$ à $T_f = 130\,^\circ\mathrm{C}$.

On rappelle la seconde identité thermodynamique $\mathrm{d}H = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}P$ et ici $C_P = \dfrac{5}{2}nR$.

Calculer :

a) la pression finale P_f ..... b) la variation d'entropie ΔS ...

Entraînement 20.9 — Calcul d'entropie créée.

On chauffe une mole d'un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1{,}4$ initialement à une température $T_i = 500\,\mathrm{K}$ en le mettant en contact avec un thermostat à la température $T_0 = 550\,\mathrm{K}$ de manière isochore. Au terme de la transformation, la température finale du gaz vaut $T_f = T_0 = 550\,\mathrm{K}$.

a) Calculer la variation d'entropie du gaz $\Delta S = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\ln\left(\dfrac{T_f}{T_i}\right)$ .....

b) Calculer l'entropie échangée au cours de la transformation $S_e = \dfrac{Q}{T_0}$ .....

c) La transformation est-elle réversible ? .....

Entraînement 20.10 — Calcul d'entropie créée 2.

On considère la détente de n moles d'un gaz parfait selon le dispositif de Joule Gay-Lussac. Le gaz de volume initial V_0 se détend dans le vide pour atteindre un volume final $2V_0$. Cette détente est isoénergétique.

Exprimer l'entropie créée S_c .....

Entraînement 20.11 — Un autre bilan d'entropie.

On chauffe une masse $m = 1{,}00\,\text{kg}$ d'eau sous une pression $P_0 = 1{,}00\,\text{bar}$ de $T_i = 80{,}0\,^\circ\text{C}$ à $T_f = 120{,}0\,^\circ\text{C}$.

On indique que l'eau se vaporise à $T_0 = 100\,^\circ\text{C}$ sous 1 bar et on donne les capacités thermiques massiques

$$c_{\text{eau}} = 4\,180\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$$
$$c_{\text{P,vapeur}} = 2\,010\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$$

ainsi que l'enthalpie massique de vaporisation

$$\Delta_{\text{vap}}H^o = 2\,257\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

La variation d'enthalpie ΔH de l'eau lors de cette transformation peut s'écrire :

$$\Delta H = mc_{\text{eau}}(T_1 - T_2) + m\Delta_{\text{vap}}H^o + mc_{\text{P,vapeur}}(T_3 - T_4).$$

a) Quelle est la valeur de T_1 ?

(a) T_0 (b) T_i (c) T_f

.....

b) Quelle est la valeur de T_2 ?

(a) T_0 (b) T_i (c) T_f

.....

c) Quelle est la valeur de T_3 ?

(a) T_0 (b) T_i (c) T_f

.....

d) Quelle est la valeur de T_4 ?

(a) T_0 (b) T_i (c) T_f

.....

La variation élementaire d'entropie pour un échauffement à pression constante s'exprime

$$\text{d}S = mc_P\frac{\text{d}T}{T}$$

et la variation d'entropie de vaporisation s'exprime

$$\Delta_{\text{vap}}S^o = \frac{\Delta_{\text{vap}}H^o}{T_0}.$$

e) Déterminer numériquement la variation d'entropie ΔS de l'eau lors de cette transformation.

.....

Entraînement 20.12 — Contact entre deux solides.

On met en contact thermique :

- une masse $m_1 = 200\,\text{g}$ de cuivre, de capacité thermique massique c_1, initialement à la température $T_1 = 500\,\text{K}$
- une masse $m_2 = 400\,\text{g}$ de fer, de capacité thermique massique c_2, initialement à la température $T_2 = 300\,\text{K}$.

Le système constitué des deux solides est isolé.

La capacité thermique molaire des deux solides est $C_m = 3R$. On donne

$$M(\text{Fe}) = 55{,}8\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1} \quad \text{et} \quad M(\text{Cu}) = 63{,}5\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}\,:$$

a) Déterminer c_1 ..... b) Déterminer c_2 .....

c) Exprimer la température finale T_f commune aux deux solides en fonction de T_1, T_2, m_1, m_2, c_1 et c_2.

.....

d) Donner la valeur numérique de T_f.

.....

e) Calculer ΔS la variation d'entropie du système constitué des deux solides.

.....

f) Cette transformation est-elle réversible ?

.....

Autour du rendement

Entraînement 20.13 — Machine frigorifique.

On considère une machine frigorifique fonctionnant avec une source froide de température $T_F = 4\,^\circ\text{C}$ et une source chaude de température $T_C = 20\,^\circ\text{C}$.

Elle utilise une énergie journalière $W = 17\,\text{MJ}$ et présente une efficacité (ou COP) égale à 1,2.

a) Exprimer le transfert thermique journalier Q_F avec la source froide.

.....

b) Donner la valeur numérique de Q_F (en joules).

.....

c) Exprimer puis calculer le transfert thermique Q_C avec la source chaude.

.....

Entraînement 20.14 — Moteur réel.

Un moteur cyclique ditherme évoluant entre une source froide de température $T_F = 400\,\text{K}$ et une source chaude de température $T_C = 650\,\text{K}$ produit 500 J par cycle pour 1 500 J de transfert thermique fourni.

L'efficacité de Carnot de ce moteur est $\eta_{\text{Carnot}} = 38{,}5\,\%$.

a) Calculer le transfert thermique Q_F avec la source froide.

(a) $-1\,000\,\text{J}$ (b) $1\,000\,\text{J}$ (c) $2\,000\,\text{J}$ (d) $-2\,000\,\text{J}$

.....

b) Calculer l'efficacité η de ce moteur réel .....

Entraînement 20.15 — Pompe à chaleur.

On considère une pompe à chaleur fournissant un transfert thermique hebdomadaire de 3,0 GJ avec une efficacité (ou COP) égale à 3,0.

a) Exprimer l'énergie hebdomadaire W nécessaire au fonctionnement de cette pompe à chaleur.

.....

b) Donner la valeur numérique de W (en joule)

.....

c) Convertir 1 kWh en joules .....

d) Calculer le coût annuel de fonctionnement de cette pompe à chaleur en supposant qu'elle tourne la moitié de l'année. On considèrera un prix moyen de dix-sept centimes d'euros au kilowattheure.

.....

Entraînement 20.16 — Calcul de la puissance d'un moteur.

On considère un moteur thermique évoluant entre une source froide à $T_F = 126{,}85\,^\circ\text{C}$ et une source chaude à $T_C = 326{,}85\,^\circ\text{C}$. On suppose que ce moteur suit le cycle de Carnot et qu'il libère un transfert thermique de 600 J par cycle. On indique que ce moteur tourne à un régime de 2 000 cycles/ min et qu'un cheval-vapeur (cv) vaut 736 W.

On rappelle que le rendement de Carnot est donné par $\eta = 1 - \dfrac{T_F}{T_C}$.

a) Calculer le rendement de Carnot η de ce moteur. .....

b) Exprimer le travail W libéré par ce moteur lors d'un cycle en fonction de Q_F et η.

.....

c) Donner la valeur numérique de ce travail W .....

d) Calculer la puissance de ce moteur en cv .....

Les dérivées partielles

Entraînement 20.17 — Calcul de dérivées partielles.

On définit coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T.$$

a) Exprimer χ_T pour un gaz parfait en fonction de P .....

On définit le coefficient de dilatation isobare :

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

b) Exprimer α pour un gaz parfait en fonction de T. .....

On considère Y le produit défini par

$$Y = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T.$$

c) Calculer Y pour un gaz parfait .....

Réponses mélangées

ⓒ ⓑ $x = \dfrac{\gamma}{(1-\gamma)}$ $\mathrm{d}S = \delta S_c$ $\Delta S = 7{,}54\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ $13{,}4\,\mathrm{cv}$ $1\,\mathrm{GJ}$

$\mathrm{d}H = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}P$ $20{,}4\,\mathrm{MJ}$ ⓐ $x = \gamma - 1$ $447\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ $nR\ln(2)$

$\mathrm{d}U = \delta W = -P\,\mathrm{d}V$ $\mathrm{d}U = 0$ $W \times \mathrm{COP}$ $x = 1-\gamma$ $393\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ ⓑ

$-295\,\mathrm{J}$ ⓐ $1{,}03\,\mathrm{bar}$ Non ⓐ $x = \dfrac{\gamma^2}{(1-\gamma)}$ $\dfrac{-Q_C}{\mathrm{COP}}$ $0{,}31\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$

$\mathrm{d}S = nR\dfrac{\mathrm{d}V}{V}$ $\eta = 33\,\%$ $33\,\%$ $\dfrac{\eta Q_F}{(1-\eta)}$ $-37{,}4\,\mathrm{MJ}$ $\mathrm{d}U = \delta Q$ $\dfrac{1}{P}$

$6\,390\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ $\dfrac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2}{m_1c_1 + m_2c_2}$ $1{,}2\times10^3$ euros $\dfrac{1}{T}$ $x = \dfrac{(1-\gamma)}{\gamma}$ $1{,}98\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$

$3{,}6\,\mathrm{MJ}$ $P_fV_f{}^{\gamma} = P_iV_i{}^{\gamma}$ $\mathrm{d}S = \dfrac{\delta Q}{T} + \delta S_c$ -1 $1{,}89\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ Non $-94{,}8\,\mathrm{J}$

$T_fV_f{}^{\gamma-1} = T_iV_i{}^{\gamma-1}$ $\mathrm{d}S = 0$ $\mathrm{d}U = \delta W = -P_{\mathrm{ext}}\,\mathrm{d}V$ $T_f{}^{\gamma}P_f{}^{1-\gamma} = T_i{}^{\gamma}P_i{}^{1-\gamma}$ $361\,\mathrm{K}$

▶ Réponses et corrigés page 300

Statique des fluides

Prérequis
Pression dans un gaz et un liquide incompressible. Poussée d'Archimède. Bases de la mécanique. Équations différentielles.

Constantes utiles

→ champ de pesanteur : $g = 9{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

→ constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$

Pour commencer

Entraînement 21.1 — Quelques conversions.

On rappelle que $1\,\mathrm{atm} = 1\,013{,}25\,\mathrm{hPa}$.

Un fluide exerce sur une paroi une pression de 750 kPa. Convertir cette pression en :

a) $\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}^{-2}$ ..... b) bar ..... c) atm .....

Entraînement 21.2 — Champagne !

Dans une bouteille de champagne, le gaz est maintenu sous une pression $p = 6{,}0\,\mathrm{bar}$ grâce à un bouchon cylindrique de diamètre 20 mm.

Quelle est l'intensité de la force pressante qui pousse le bouchon vers le haut ? .....

Quelle est la pression intérieure si l'on incline la bouteille de 30° ? .....

Entraînement 21.3 — Est-ce homogène ?

On considère un fluide dont la pression p dépend de l'altitude z (comprise entre 0 et $z_{\max}$). Pour $z = 0$, la pression vaut p_0. Après analyse et résolution du problème, quatre étudiants obtiennent quatre résultats différents pour l'expression de $p(z)$.

Indiquer le ou les résultats qui ont le mérite d'être homogènes.

(a) $p(z) = p_0 + z$

(b) $p(z) = p_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{z}{z_{\max}}}\right) + z$

(c) $p(z) = \dfrac{z_{\max}}{z_{\max} + z}\,p_0$

(d) $p(z) = \dfrac{1 - z - z^2}{1 - {z_{\max}} - {z_{\max}}^2}\,p_0$

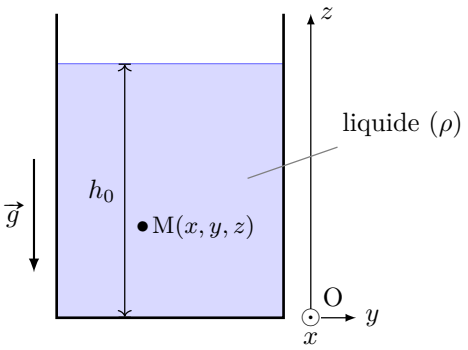
.....

Pression dans un liquide

Entraînement 21.4 — Quelle est la formule déjà ?

On considère un liquide incompressible de masse volumique ρ en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme et soumis à une pression p_0 à sa surface.

Comment s'exprime la pression au point M dans le liquide ?



(a) $p(\mathrm{M}) = p_0(1 - \rho g z)$

(b) $p(\mathrm{M}) = (p_0 + \rho g z)\,\vec{u_z}$

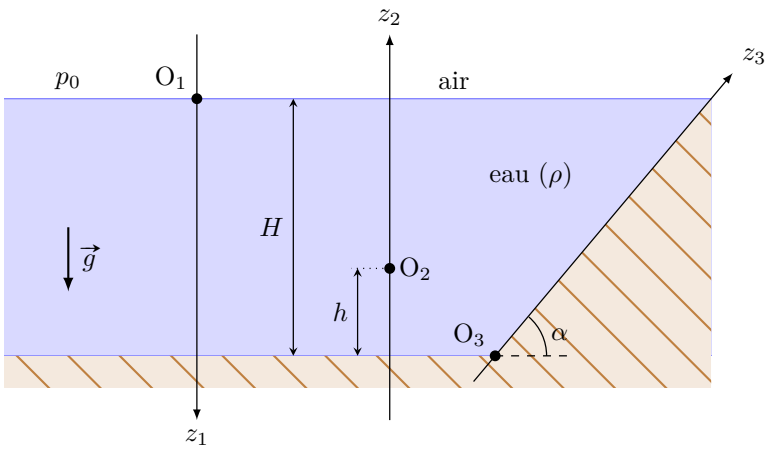
(c) $p(\mathrm{M}) = p_0 + \rho g h_0$

(d) $p(\mathrm{M}) = p_0 + \rho g(h_0 - z)$

.....

Entraînement 21.5 — La pression dans différents repères.

On note p la pression dans l'eau, supposée incompressible et de masse volumique ρ, et p_0 la pression de l'air à l'interface eau–air.



Exprimer p dans les différents systèmes de coordonnées.

a) $p(z_1)$, en fonction de p_0, de g et de z_1 .....

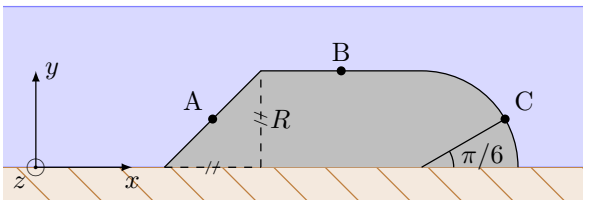
b) $p(z_2)$, en fonction de p_0, de g, de z_2 de H et de h .....

c) $p(z_3)$, en fonction de p_0, de g, de z_3 de H et de α .....

Entraînement 21.6 — Projection de vecteurs.

On considère un solide situé au fond de l'eau.

Exprimer, dans la base orthonormée $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, le vecteur unitaire normal à la surface de l'objet et orienté dans le sens de la force pressante de l'eau sur l'objet :



a) En A ..... c) En C .....

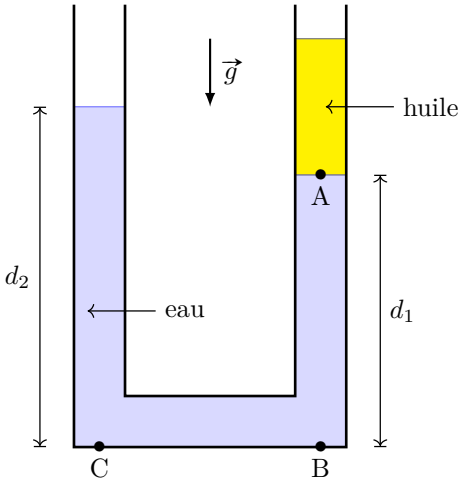
b) En B .....

Entraînement 21.7 — Dans un tube en U.

On verse dans un tube en U, dont la section a pour surface s, une certaine quantité d'eau puis un volume V_h d'huile. Les liquides se répartissent comme indiqué ci-contre.

On cherche à exprimer la différence de hauteur entre les deux niveaux d'eau de part et d'autre.

On note p_atm la pression atmosphérique, ρ_e la masse volumique de l'eau et ρ_h celle de l'huile.



a) Que peut-on dire de la pression en A ?

(a) $p_\text{A} = p_\text{atm} + \rho_\text{e} g \dfrac{V_\text{h}}{s}$ (b) $p_\text{A} = p_\text{atm} + \rho_\text{h} g \dfrac{V_\text{h}}{s}$ (c) $p_\text{A} = p_\text{atm} + \rho_\text{e} g d_1$

.....

b) Que peut-on dire de la pression en B ?

(a) $p_\text{B} = p_\text{atm} + \rho_\text{e} g d_1$ (b) $p_\text{B} = p_\text{atm} + \rho_\text{e} g \left(\dfrac{V_\text{h}}{s} + d_1 \right)$ (c) $p_\text{B} = p_\text{A} + \rho_\text{e} g d_1$

.....

c) Que peut-on dire de la pression en C ?

(a) $p_\text{C} = p_\text{B}$ (b) $p_\text{C} = p_\text{atm} + p_\text{A}$ (c) $p_\text{C} = p_\text{atm} + \rho_\text{e} g d_2$

.....

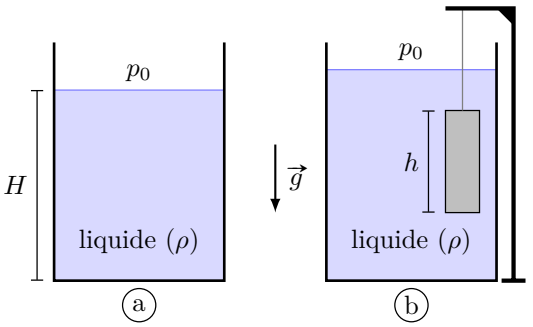
d) En déduire une expression de $d_2 - d_1$. .....

Entraînement 21.8 — Immersion et pression.

Un récipient cylindrique de section de surface S contient un liquide sur une hauteur H : c'est la situation (a).

On immerge complètement un cylindre solide de section de surface s et de hauteur h que l'on maintient grâce à une potence : c'est la situation (b).

On note ρ la masse volumique du liquide et g le champ de pesanteur.



Exprimer la pression au fond du récipient en fonction des données :

a) Situation (a) ...

b) Situation (b) ...

Poussée d'Archimède

Entraînement 21.9 — Immersion de volumes.

La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ subie par un corps submergé ou immergé dans un fluide est une force dont l'intensité correspond à celle du poids de fluide déplacé par ce corps : $\|\vec{\Pi}\| = m_{\text{fluide}} \times g$.

On connaît les masses volumiques suivantes, à 25 °C :

Matériau	aluminium	eau	fer	glycérine	plastique	savon liquide
Masse volumique (en g · cm^{-3})	2,7	1,0	7,9	1,2	0,9	2,5

Calculer, à 25 °C, l'intensité de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur :

a) un cube de fer de côté $a = 10\,\text{cm}$ totalement immergé dans de la glycérine.

.....

b) une boule d'aluminium de rayon $a = 10\,\text{cm}$ à moitié immergée dans du savon liquide.

.....

c) un cylindre de plastique de rayon $a = 10\,\text{cm}$ et de hauteur $4a$ immergé verticalement aux deux-tiers dans de l'eau.

.....

Entraînement 21.10 — Flottaison d'un glaçon.

En déposant un glaçon de masse volumique ρ_S et de volume V_S dans un fluide de masse volumique ρ_L et de volume V_L, il s'immerge d'un volume V_{imm}. Comment sont reliées ces grandeurs ?

(a) $\rho_L V_S = \rho_S V_{\text{imm}}$

(b) $\rho_L V_{\text{imm}} = \rho_S V_S$

(c) $\rho_S V_{\text{imm}} = \rho_S V_S$

(d) $\rho_S V_{\text{imm}} = \rho_L V_S$

(e) $\rho_L V_{\text{imm}} = \rho_L V_L$

(f) $V_{\text{imm}} = V_S$

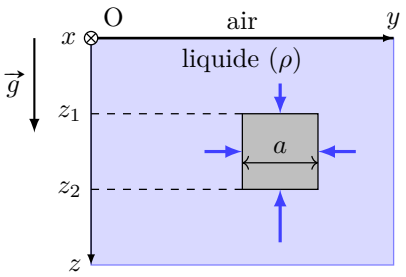
.....

Entraînement 21.11 — Eurêka !

Un bloc solide qui a la forme d'un cube d'arête a est plongé dans un liquide de masse volumique ρ.

Il est soumis à des forces pressantes sur chacune des faces.

On note $\vec{R}$ la résultante de ces forces.



Exprimer les composantes de $\vec{R}$ dans le repère orthonormé (O, x, y, z).

a) R_x .... b) R_y ..... c) R_z .....

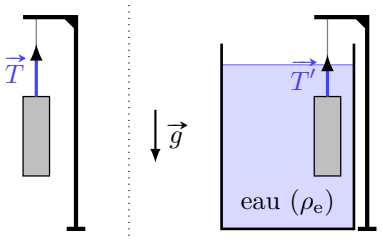
d) Retrouver $\vec{R}$ en fonction du poids $\overrightarrow{P_d}$ du liquide déplacé .....

Entraînement 21.12 — Mesure de densité.

Un morceau de métal de volume inconnu est suspendu à une corde.

Avant immersion, la tension dans la corde vaut 10 N.

Une fois le métal totalement immergé dans l'eau, on mesure une tension de 8 N.



a) Calculer l'intensité de la poussée d'Archimède .....

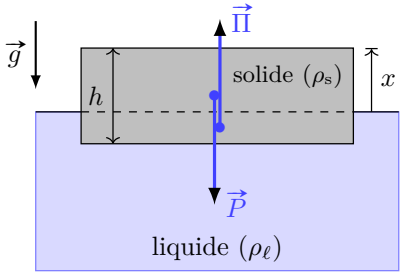
b) En déduire la densité du métal par rapport à l'eau .....

Entraînement 21.13 — Ligne de flottaison.

Un bloc en forme de parallélépipède, de masse volumique ρ_s, de base S et d'épaisseur h flotte à la surface d'un liquide de masse volumique $\rho_\ell > \rho_s$.

On note $\vec{P}$ le poids du solide, $\vec{\Pi}$ la poussée d'Archimède, $\vec{g}$ le champ de pesanteur et x la hauteur de la partie émergée.

Enfin, on note $\vec{R} = \vec{P} + \vec{\Pi}$.



a) Exprimer $\vec{R}$ en fonction de x, h, S, ρ_s, ρ_ℓ et $\vec{g}$ .....

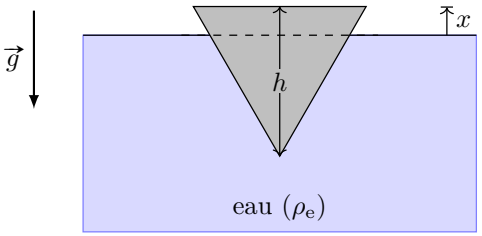
b) En déduire la valeur de x quand le bloc est à l'équilibre .....

c) On exerce une force verticale $\vec{F}$ supplémentaire sur le glaçon pour le maintenir totalement immergé.

Que vaut $\|\vec{F}\|$? .....

Entraînement 21.14 — Iceberg conique.

Un iceberg en forme de cône, de masse volumique ρ_s, de hauteur h flotte à la surface de l'eau de masse volumique ρ_e. On note x la hauteur de la partie émergée.



On rappelle que le volume d'un cône de section de surface S et de hauteur h vaut $\frac{1}{3}Sh$.

a) Parmi les résultats faux suivants, indiquer ceux qui ont le mérite d'être homogènes.

(a) $x = h\left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_e}\right)$

(b) $x = \sqrt[3]{\frac{h\rho_s}{\rho_e}}$

(c) $x = \frac{1}{3}\frac{h - \rho_s}{\rho_e}$

(d) $x = h(\rho_s - \rho_e)$

.....

b) Exprimer le volume immergé en fonction de S, h et x .....

c) En déduire x en traduisant l'égalité entre la poussée d'Archimède et le poids de l'iceberg.

.....

Entraînement 21.15 — Quand Archimède fait mal à la tête.

Considérons deux verres identiques A et B. On remplit le verre A d'eau jusqu'à une certaine hauteur h.

a) Dans le verre B, on met quelques glaçons, et on complète avec de l'eau jusqu'à la même hauteur h.

Les masses m_A et m_B des deux verres vérifient :

(a) $m_A < m_B$ (b) $m_A = m_B$ (c) $m_A > m_B$

.....

b) Dans le verre B, on remplace maintenant les glaçons par des boules de polystyrène de même masse que les glaçons mais de densité inférieure.

Par à rapport à la hauteur initiale, le niveau dans ce verre :

(a) augmente (b) reste le même (c) diminue

.....

c) On remplace les glaçons par des boules en fer de masse identique aux glaçons dans le verre B.

Par à rapport à la hauteur initiale, le niveau dans ce verre :

(a) augmente (b) reste le même (c) diminue

.....

Équation de la statique des fluides

Entraînement 21.16 — Musculation sur le gradient.

On donne l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e_z}.$$

Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}(p)$ pour les champs de pression suivants :

a) $p(x,y,z) = p_0 + Az$, où p_0 et A sont des constantes .....

b) $p(x,y,z) = Bxy^2 + C\mathrm{e}^{2z}$, où B et C sont des constantes .....

Entraînement 21.17 — Atmosphère de Mars.

L'atmosphère de Mars est composée de 96 % de dioxyde de carbone, 2 % d'argon, 2 % de diazote et contient des traces de dioxygène, d'eau, et de méthane.

La pression et la température moyenne à la surface de Mars sont $p_0 = 6\,\text{mbar}$ et $T = -60\,^\circ\text{C}$.

On donne les masses molaires des éléments suivants :

Élément	H	C	O	N	Ar
Masse molaire (en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)	1	12	16	14	40

a) Quelle est la masse molaire M de l'atmosphère martienne ? .....

On considère l'atmosphère martienne comme un gaz parfait, et on note ρ sa masse volumique.

b) Estimer ρ à la surface : .....

Dans le référentiel martien d'axe $(\text{O}z)$ vertical ascendant, la pression vérifie l'équation

$$\frac{\text{d}p}{\text{d}z} = -\rho g.$$

La température est considérée uniforme dans toute l'atmosphère.

c) La pression $p(z)$ dans l'atmosphère de Mars, qui vérifie $p(0) = p_0$, s'écrit alors :

(a) $p(z) = p_0\left(1 - \dfrac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \dfrac{RT}{Mg}$

(b) $p(z) = p_0 \exp\left(-\dfrac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \dfrac{Mg}{RT}$

(c) $p(z) = p_0 \exp\left(-\dfrac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \dfrac{RT}{Mg}$

(d) $p(z) = p_0\left(1 - \dfrac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \dfrac{Mg}{RT}$

.....

Le champ de pesanteur sur Mars vaut $g = 3{,}72\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

d) Estimer l'épaisseur H de l'atmosphère qu'on assimilera à $5z_0$. .....

Entraînement 21.18 — Une expression infinitésimale.

On considère un fluide dont la pression p dépend de l'altitude z (comprise entre 0 et $z_{\max}$).

On suppose que cette pression vérifie la relation suivante :

$$p(z+\mathrm{d}z) - p(z) = -\frac{2}{z_{\max}} p(z)\,\mathrm{d}z.$$

On souhaite trouver l'expression de $p(z)$ en fonction de z et de p_0 (la pression en $z=0$).

a) Donner l'équation différentielle vérifiée par p. .....

b) Donner l'expression de $p(z)$ en fonction de p_0. .....

Entraînement 21.19 — Résoudre l'équation de la statique.

Un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{e_z}$ vérifie l'équation

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) = \rho\,\vec{g}.$$

où ρ est la masse volumique du fluide qui dépend éventuellement de la pression.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le champ de pression $p(x,y,z)$ sachant que $p(x,y,0) = p_0$ et que les paramètres a, b, c et g sont des constantes.

a) $\rho = a\dfrac{p}{p_0}$ .....

b) $\rho = a + b(p - p_0)$ .....

c) $\rho = a - b\,\mathrm{e}^{-z/c}$ .....

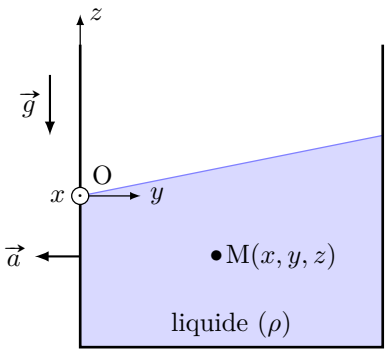
Entraînement 21.20 — Attention ça déborde !

Un récipient cubique contenant un liquide incompressible de masse volumique ρ est soumis à une accélération uniforme $\vec{a} = -a\,\vec{e_y}$.

Dans le référentiel lié au récipient, la pression vérifie l'équation

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) = \rho(\vec{g} - \vec{a})$$

avec $p(0,0,0) = p_0$.



a) Déterminer $p(x,y,z)$ dans le liquide .....

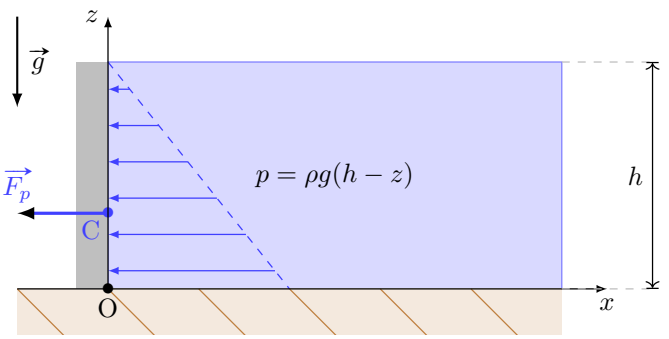
b) En déduire l'équation de la surface libre. .....

Forces pressantes

Entraînement 21.21 — Pression sur un barrage.

Un barrage rectangulaire de hauteur h et de largeur L baigne d'un côté dans l'air de l'autre dans de l'eau.

On modélise la situation à l'aide du schéma suivant :



La fonction $p = \rho g(h-z)$ correspond à la surpression exercée par l'eau à l'altitude z, étant donné la masse volumique de l'eau ρ et l'intensité du champ de pesanteur g.

Calculer :

a) La résultante des forces pressantes $F_p = \iint_{\text{barrage}} p(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ .....

b) Le moment en O des forces pressantes $\mathcal{M}_p = \iint_{\text{barrage}} z\,p(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ .....

c) La position du centre de poussée z_C tel que $\mathcal{M}_p = z_C \times F_P$ .....

Réponses mélangées

$[\rho_s h - \rho_\ell(h-x)]S\,\vec{g}$ $\quad 14{,}8\,\mathrm{g\cdot m^{-3}}$ $\quad z = \dfrac{a}{g}y$ $\quad \rho(ay-gz)+p_0$ $\quad p_0+\rho g(H-h-z_2)$

$7{,}5\,\mathrm{bar}$ $\quad \rho g(H - z_3\sin(\alpha)) + p_0$ $\quad$ (a) $\quad$ (c) $\quad p_0+\rho g z_1$ $\quad \dfrac{1}{3}h$ $\quad$ (a) (c)

$7{,}4\,\mathrm{atm}$ $\quad p_0 \mathrm{e}^{-agz/p_0}$ $\quad p_0+\rho g\left(H+\dfrac{s}{S}h\right)$ $\quad \dfrac{1}{6}\rho g L h^3$ $\quad$ (b) $\quad$ (b) $\quad A\vec{e_z}$

$43{,}6\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ $\quad 0$ $\quad \dfrac{1}{3}\dfrac{S(h-x)^3}{h^2}$ $\quad -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\vec{e_x}+\vec{e_y}\right)$ $\quad 51\,\mathrm{N}$ $\quad h\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{\rho_s}{\rho_e}}\right)$

$6\,\mathrm{bar}$ $\quad By^2\vec{e_x}+2Bxy\vec{e_y}+2C\mathrm{e}^{2z}\vec{e_z}$ $\quad$ (c) $\quad 12\,\mathrm{N}$ $\quad -\rho g a^3$ $\quad p_0\,\mathrm{e}^{-2z/z_{\max}}$ $\quad \dfrac{\rho_h V_h}{\rho_e s}$

$p_0 - agz + bcg\left(1-\mathrm{e}^{-z/c}\right)$ $\quad 5$ $\quad 1{,}9\times10^2\,\mathrm{N}$ $\quad$ (c) $\quad p_0+\rho g H$ $\quad (\rho_\ell-\rho_s)Shg$

(d) $\quad 75\,\mathrm{N\cdot cm^{-2}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_x}-\vec{e_y})$ $\quad 2\,\mathrm{N}$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{2p}{z_{\max}}$ $\quad 0$ $\quad$ (b) $\quad \dfrac{1}{2}\rho g L h^2$

$-\vec{e_y}$ $\quad$ (c) $\quad 82\,\mathrm{N}$ $\quad$ (b) $\quad 55\,\mathrm{km}$ $\quad p_0+\dfrac{a}{b}\left(\mathrm{e}^{-bgz}-1\right)$ $\quad -\vec{P_d}$ $\quad h\left(\dfrac{\rho_\ell-\rho_s}{\rho_\ell}\right)$

▶ Réponses et corrigés page 307

Fondamentaux de la chimie des solutions

Prérequis

Pour cette fiche, on utilisera les masses molaires des éléments suivants :

Élément	H	C	O	F	Ca
Masse molaire (en $\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$)	1	12	16	19	40
	M_{H}	M_{C}	M_{O}	M_{F}	M_{Ca}

On rappelle la masse volumique de l'eau : $\rho_{\mathrm{H_2O}} = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$

Constantes utiles

→ nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$

Avant toute chose

Entraînement 22.1 — Morceau de sucre.

Un morceau de sucre est un corps pur qui contient 6,0 g de saccharose $\mathrm{C_{12}H_{22}O_{11}}$. Calculer :

a) La quantité de matière n de saccharose dans le morceau de sucre .....

b) Le nombre N de molécules de saccharose dans le morceau de sucre .....

Entraînement 22.2 — Atomes de carbone dans le diamant.

Le diamant est un cristal contenant uniquement des atomes de carbone de masse molaire $M = 12\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$. Sa valeur est évaluée par sa masse en carats. Un carat est équivalent à 200 mg. Le plus gros diamant jamais découvert l'a été en 1905 avec une masse de 3 106 carats. Calculer :

a) La masse m d'atomes de carbone contenue dans ce diamant .....

b) La quantité de matière n d'atomes de carbone dans ce diamant .....

c) Le nombre N d'atomes de carbone dans ce diamant .....

Entraînement 22.3 — Un verre d'eau à la mer.

On verse un verre d'eau de volume $V = 24{,}0\,\mathrm{cL}$ contenant initialement N_0 molécules d'eau dans la mer, et on suppose qu'il est possible d'agiter vigoureusement pour obtenir une répartition homogène de ce verre d'eau dans l'ensemble des mers et océans du globe qui représentent un volume total $V_{\mathrm{tot}} = 1{,}37 \times 10^{18}\,\mathrm{m^3}$.

a) Calculer N_0 .....

b) Calculer le rapport $R = \dfrac{V}{V_{\mathrm{tot}}}$ .....

c) Si on remplit alors le verre d'eau dans la mer, combien de molécules N du verre initial retrouve-t-on ?

.....

Entraînement 22.4 — Combat de masses volumiques.

On considère un morceau de cuivre de $20\,\text{cm}^3$ pesant 178 g et un morceau de fer de $3\,\text{dm}^3$ pesant 24 kg.

Qui a la masse volumique la plus élevée ? .....

Entraînement 22.5 — Calcul autour du pH.

Le pH d'une solution aqueuse est défini par $\text{pH} = -\log_{10}(a_{\text{H}_3\text{O}^+}) = -\log_{10}\left(\dfrac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^\circ}\right)$.

On rappelle que $C^\circ = 1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

a) Calculer le pH d'une solution aqueuse contenant $[\text{H}_3\text{O}^+] = 0{,}1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ .....

b) Exprimer puis calculer la concentration en H_3O^+ en fonction du pH si celui-ci vaut 7 ..

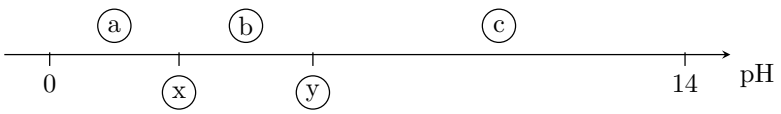
On considère une solution dont la concentration en H_3O^+ vaut x, et on note pH_0 son pH.

c) Exprimer en fonction de pH_0 le pH d'une solution pour laquelle la concentration en H_3O^+ a été multipliée par 100 .....

Entraînement 22.6 — Diagramme de prédominance.

L'acide malonique, ou acide propanedioïque, de formule $\text{HOOC} - \text{CH}_2 - \text{COOH}$ est caractérisé par les constantes $\text{pK}_{A1} = 2{,}85$ et $\text{pK}_{A2} = 5{,}80$. Il sera noté H_2A par la suite.

On rappelle la constante d'équilibre de l'autoprotolyse de l'eau $K_e = 10^{-14}$.



a) Identifier les valeurs de (x) et (y) .....

b) Identifier les espèces correspondant à (a), (b) et (c) .....

c) Quelle espèce prédomine dans une solution de pH = 4,2 ? .....

d) Quelle espèce prédomine dans une solution de concentration $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{éq}} = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ en ions oxonium ? .....

e) Quelle espèce prédomine dans une solution de concentration $[\text{HO}^-]_{\text{éq}} = 1{,}0 \times 10^{-5}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ en ions hydroxyde ? .....

Concentrations, Dilutions

Entraînement 22.7 — Combat de concentrations.

Qui est le plus concentré ?

a) 8 g de sel dans 3 cL d'eau ou 3 kg de sel dans 1×10^3 L d'eau ? .....

b) 3 mol de sucre dans 10 mL d'eau ou 400 kmol de sucre dans 2 m^3 d'eau ? .....

Entraînement 22.8 — Du sucre dans votre thé ?

On prépare 20 cL de thé sucré en y ajoutant 3 morceaux de sucre constitués chacun de 6 g de saccharose de masse molaire $M = 344\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Calculer :

a) La concentration en masse C_m de saccharose dans le thé .....

b) La concentration en quantité de matière C de saccharose dans le thé .....

Entraînement 22.9 — Dilution homogène.

On mélange un volume $V_1 = 10\,\text{mL}$ de solution aqueuse d'ion Fe^{3+} à $C_1 = 0{,}10\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $V_2 = 10\,\text{mL}$ de solution aqueuse d'ions Sn^{2+} à $C_2 = 0{,}10\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

On souhaite donner la composition du système en Fe^{3+} avant toute réaction.

a) Parmi les formules fausses suivantes, laquelle ou lesquelles ont au moins le mérite d'être homogènes ?

(a) $[Fe^{3+}]_i = \dfrac{C_1}{V_1}$

(b) $[Fe^{3+}]_i = C_1 V_1$

(c) $[Fe^{3+}]_i = \dfrac{C_1}{V_1}(V_1 + V_2)$

.....

b) Établir l'expression littérale correcte donnant $[Fe^{3+}]_i$ dans le mélange .....

Entraînement 22.10 — Un café au lait sucré.

On mélange 100 mL de café à la concentration en masse de caféine $C_1 = 0{,}7\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ avec 150 mL de lait sucré à la concentration en masse de sucre $C_2 = 40\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$.

a) Calculer la concentration finale en masse C_1' en caféine .....

b) Calculer la concentration en masse C_2' en sucre dans le mélange obtenu ...

Entraînement 22.11 — Mélange de solutions.

On mélange deux bouteilles d'eau sucrée de volumes respectifs V_1 et V_2 dont les concentrations en mole de sucre sont respectivement C_1 et C_2. On veut exprimer la concentration en quantité de matière C du sucre dans le mélange en fonction de V_1, V_2, C_1 et C_2.

a) Parmi les formules fausses suivantes, laquelle ou lesquelles ont au moins le mérite d'être homogènes ?

(a) $C = \dfrac{C_1}{V_1 + V_2}$

(b) $C = C_1V_1 + C_2V_2$

(c) $C = \dfrac{C_1(V_1 + V_2)}{C_2V_1}$

.....

b) Déterminer la formule correcte donnant C.

.....

Entraînement 22.12 — Manipulation de formules.

Soit C la concentration en quantité de matière et C_m la concentration en masse d'un soluté en solution.

On note n, m et M la quantité de matière, la masse et la masse molaire du soluté et V le volume de la solution.

Exprimer :

a) C_m en fonction de n, M et V .....

b) La quantité de matière n en fonction de C_m, V et M .....

c) Le volume V en fonction de M, C et la masse m .....

Entraînement 22.13 — Préparation d'une solution par dilution.

a) On dispose d'une grande quantité d'une solution mère d'acide acétique à la concentration en masse $C = 80\,\mathrm{g \cdot L^{-1}}$. On souhaite préparer 100 mL d'une solution à la concentration en masse de $20\,\mathrm{g \cdot L^{-1}}$ par dilution.

Quel volume V_i de la solution mère doit-on prélever ? .....

b) On prélève 20 mL d'une solution mère de permanganate de potassium à la concentration en masse $C_m = 40\,\mathrm{g \cdot L^{-1}}$ que l'on verse dans une fiole jaugée de 250 mL et que l'on complète ensuite jusqu'au trait de jauge avec de l'eau distillée.

Calculer la concentration en masse C_f de la solution finale. .....

Dissolution

Prérequis
On rappelle qu'on dit qu'une solution est saturée lorsque la concentration du soluté correspond à la concentration maximale que l'on peut dissoudre (la solubilité) à cette température.

Entraînement 22.14 — Dissoudre du sel ou du sucre.

Une solution aqueuse saturée en sel a une concentration en masse de sel valant $358\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$. Une solution aqueuse saturée en sucre contient 2,00 kg de sucre par litre de solution.

a) Quelle est la masse de sel contenue dans 20 mL d'une solution saturée en sel ?

.....

b) Quelle masse de sucre peut-on dissoudre dans une tasse de 300 mL ?

.....

Entraînement 22.15 — Saturation du carbonate de potassium.

On peut dissoudre au maximum 1 220 g de carbonate de potassium K_2CO_3 dans 1,0 L d'eau. On indique la masse molaire du carbonate de potassium $M = 138\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$.

Calculer :

a) La quantité de matière n de carbonate de potassium dans 250 mL d'une solution saturée en carbonate de potassium. .....

b) La quantité de matière n_1 en ions potassium K^+. .....

c) La quantité de matière n_2 en ions carbonates CO_3^{2-} dans la solution.

Entraînement 22.16 — Fluorure de calcium.

On dissout 10,0 g de fluorure de calcium CaF_2 dans 500 mL d'eau. Calculer :

a) La quantité de matière de fluorure de calcium dissoute. .....

b) La quantité de matière en ions calcium Ca^{2+}. .....

c) La masse en ions fluorures dans la solution. .....

Autour de la masse volumique

Prérequis
On rappelle que la densité d d'un liquide correspond au rapport entre sa masse volumique et la masse volumique de l'eau.

Entraînement 22.17 — Le sel.

On dissout une masse $m = 10\,\text{g}$ de sel dans un volume $V = 20\,\text{mL}$ d'eau à 25 °C. La solubilité du sel à cette température est $s = 330\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$. On suppose que cette dissolution s'opère à volume constant.

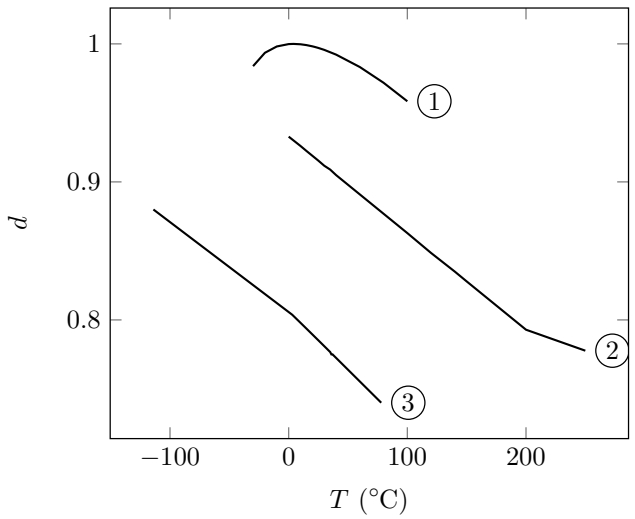
a) Calculer la masse de sel qui reste sous forme solide .....

b) Calculer la densité d de la solution finale .....

c) La densité expérimentale de la solution est $d_{\text{exp}} = 1{,}35$.
Le volume de la solution a-t-il diminué ou augmenté lors de la dissolution ? ...

Entraînement 22.18 — Densité et température.

Le graphe suivant présente l'évolution en fonction de la température de la densité de l'eau pure, de l'huile de tournesol et de l'éthanol. La pression est la pression atmosphérique.



Liquide	$T_{\text{solidification}}$ (°C)	$T_{\text{ébullition}}$ (°C)
Eau	0	?
Éthanol	-117	78
Huile	3	230

Températures de changement d'état ($P = P_{\text{atm}}$)

a) À quelle courbe correspond la densité de l'eau pure ? .....

b) À quelle courbe correspond la densité de l'huile ? .....

c) Retrouver par lecture graphique, la température d'ébullition de l'eau pure.

(a) 0 °C (b) 50 °C (c) 100 °C (d) −50 °C

.....

Titre massique

Prérequis
On rappelle que le titre massique t correspond au rapport exprimé en pourcentage de la masse de composé dissous sur la masse de la solution.

Entraînement 22.19 — Acide chlorhydrique.

Une solution d'acide chlorhydrique concentrée possède un titre massique en HCl de 37 % pour une densité $d = 1{,}19$. On donne $M_{\mathrm{HCl}} = 36{,}5\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

Calculer :

a) La masse m d'un litre de cette solution .....

b) La masse m_{HCl} d'acide chlorhydrique pur contenu dans ce litre de solution.

.....

c) La concentration en quantité de matière C en acide chlorhydrique de cette solution.

.....

Entraînement 22.20 — Acide sulfurique.

Une solution d'acide sulfurique concentrée possède une concentration en quantité de matière $C = 18\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ en $\mathrm{H_2SO_4}$ pour une densité $d = 1{,}84$. On donne $M_{\mathrm{H_2SO_4}} = 98\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

Calculer le titre massique t en acide sulfurique de cette solution .....

Entraînement 22.21 — L'éthanol.

On prépare $V = 10\,000\,\mathrm{L}$ d'éthanol de titre massique $t = 95{,}4\,\%$ par distillation fractionnée. Cette solution possède une densité $d = 0{,}789$ et on indique que l'éthanol de formule brute $\mathrm{C_2H_6O}$ présente une masse molaire $M = 46{,}07\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

Quelle est la quantité de matière n d'éthanol dans cette solution ?

(a) 163×10^3 mol
(b) 461×10^3 mol
(c) 439×10^3 mol
(d) $7{,}53 \times 10^3$ mol

.....

Réponses mélangées

$V = \dfrac{m}{C \times M}$ $\quad 24\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ $\quad \text{A}^{2-}$ $\quad 4{,}4\,\text{mol}$ $\quad 1{,}75 \times 10^{-22}$ $\quad \dfrac{C_1 V_1}{V_1 + V_2}$

$3{,}4\,\text{g}$ $\quad$ ② $\quad 600\,\text{g}$ $\quad 1\,400$ $\quad$ ⓒ $\quad 621\,\text{g}$ $\quad [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7}\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$0{,}128\,\text{mol}$ $\quad 1{,}33$ $\quad$ ① $\quad$ Le cuivre $\quad$ ⓒ $\quad 51{,}8\,\text{mol}$ $\quad$ Le premier

$3{,}2\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ $\quad$ Le premier $\quad 96\,\%$ $\quad 25\,\text{mL}$ $\quad 0{,}26\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $\quad 1{,}1 \times 10^{22}$

$90\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ $\quad$ ⓐ $\quad \dfrac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{V_1 + V_2}$ $\quad 8{,}01 \times 10^{24}$ $\quad 0{,}28\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ $\quad \text{HA}^-$

$2{,}2\,\text{mol}$ $\quad 18\,\text{mmol}$ $\quad$ ⓧ $= 2{,}85$ et ⓨ $= 5{,}80$ $\quad$ Il a diminué. $\quad 7{,}2\,\text{g}$

ⓐ $= \text{H}_2\text{A}$, ⓑ $= \text{HA}^-$ et ⓒ $= \text{A}^{2-}$ $\quad \dfrac{V \times C_m}{M}$ $\quad \text{H}_2\text{A}$ $\quad 1{,}19\,\text{kg}$ $\quad 4{,}86\,\text{g}$ $\quad$ Aucune

$\text{pH}_0 - 2$ $\quad 2{,}2\,\text{mol}$ $\quad 12\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $\quad 1$ $\quad 0{,}128\,\text{mol}$ $\quad \dfrac{n \times M}{V}$ $\quad 3{,}12 \times 10^{25}$ $\quad 0{,}44\,\text{kg}$

▶ Réponses et corrigés page 315

Fondamentaux de la chimie en phase gazeuse

Prérequis
Équation d'état des gaz parfaits ($PV = nRT$). Fraction molaire. Activité d'une espèce chimique (en phase gazeuse, en phase condensée).
Loi de Dalton.

Constantes utiles
→ constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$

Corps pur à l'état gazeux

Entraînement 23.1 — Volume molaire d'un gaz parfait.

On considère un échantillon gazeux de n moles contenues dans un volume V à la température T et à la pression P. Le gaz est supposé se comporter comme un gaz parfait.

Exprimer le volume molaire V_m (en fonction de R, T et P) .....

Entraînement 23.2 — Calculs de volumes molaires.

Pour chacun des jeux de conditions de pression P et de température T suivants, déterminer le volume molaire (en litres par mole) d'un gaz se comportant comme un gaz parfait.

On rappelle que $T(\mathrm{K}) = T(^\circ\mathrm{C}) + 273{,}15$.

a) $P = 1{,}00\,\mathrm{bar}$, $T = 150\,\mathrm{K}$ .....

b) $P = 1{,}00\,\mathrm{bar}$, $T = 300\,\mathrm{K}$ .....

c) $P = 5{,}000\,\mathrm{kPa}$, $T = 25\,^\circ\mathrm{C}$ .....

d) $P = 500\,\mathrm{mbar}$, $T = -123\,^\circ\mathrm{C}$ .....

Entraînement 23.3 — Bataille de chiffres.

On donne les masses molaires suivantes :

Élément chimique	Hydrogène	Hélium	Azote	Oxygène
Masse molaire (en $\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$)	1	4	14	16

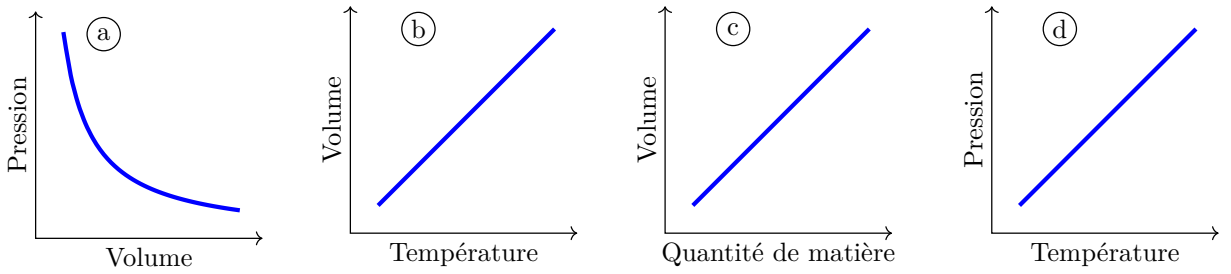
Dans les conditions de pression et de température identiques, quel est l'échantillon gazeux (supposé être un gaz parfait) ayant la masse la plus importante ?

(a) 5 L d'hélium
(b) 750 mL de dioxygène
(c) $1\,000\,\mathrm{cm^3}$ de diazote
(d) 0,1 hL de dihydrogène

.....

Entraînement 23.4 — Expérimentalement parfait.

L'équation d'état des gaz parfaits résulte de la combinaison de différentes lois expérimentales traduisant des relations de proportionnalité entre les grandeurs d'état P, V, n et T. Identifier la représentation graphique associée à chacune des lois expérimentales caractérisant un gaz parfait.



a) Loi de Charles : le rapport V/T est constant si P et n sont fixées. .....

b) Loi d'Avogradro : la grandeur V_m est constante si P et T sont fixées .....

c) Loi de Gay-Lussac : le rapport P/T est constant si V et n sont fixés .....

d) Loi de Boyle-Mariotte : le produit PV est constant si n et T sont fixées .....

Entraînement 23.5 — Une bouteille de plongée.

Une bouteille de plongée standard est une bonbonne de 12 L qui contient de l'air à la pression de 200 bar. Un détendeur permet de fournir au plongeur de l'air à la pression standard. En supposant que la température de l'air en entrée et en sortie du détendeur est constante, et que l'air se comporte comme un gaz parfait, on peut estimer que le plongeur dispose d'une réserve respirable de :

(a) 12 L d'air
(b) 2 400 L d'air
(c) 6 L d'air
(d) 200 L d'air

.....

Entraînement 23.6 — Un gaz mystérieux.

Une expérience réalisée à température ambiante ($T = 25°C$) et sous la pression ambiante ($P = 1{,}00$ bar) permet de produire un volume $V = 9{,}0$ mL d'un gaz, que l'on admet être un gaz parfait. L'échantillon gazeux est caractérisé par une masse $m = 0{,}70$ mg.

a) Calculer la masse volumique ρ du gaz en $g \cdot L^{-1}$ .....

b) Calculer le volume molaire en $L \cdot mol^{-1}$ .....

c) Calculer la masse molaire du gaz en $g \cdot mol^{-1}$ .....

d) Identifier le gaz .....

Entraînement 23.7 — Parfait... mais pas que.

Pour la modélisation d'un gaz, on considère les deux modèles suivants :

- le modèle du gaz parfait : $PV = nRT$;
- le modèle de van der Waals : $\left(P + \dfrac{an^2}{V^2}\right)\left(\dfrac{V}{n} - b\right) = RT$, où a et b sont des constantes.

a) Exprimer PV_m pour un gaz parfait .....

b) Exprimer PV_m pour un gaz de van der Waals .....

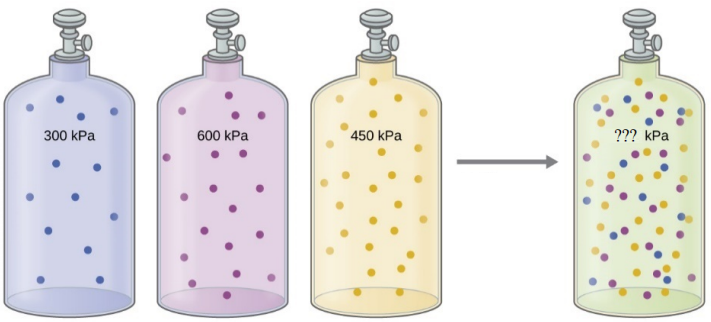
c) Que valent a et b pour un gaz parfait ? .....

Mélanges gazeux

Entraînement 23.8 — La bouteille de gaz.

On dispose de trois bouteilles de gaz de même volume remplies avec des gaz différents (supposés parfaits) et à des pressions différentes.

Si on transvase (sans aucun changement de température) toutes les bouteilles dans une unique bouteille de même volume que les autres, que vaut la pression dans cette bouteille ?



(a) 1 350 kPa
(b) 450 kPa
(c) 600 kPa

.....

Entraînement 23.9 — Cocktails gazeux.

Un système de production industriel permet de transvaser dans un unique flacon de volume V_0 un ensemble de N volumes V_k de différents gaz dont les pressions respectives sont notées P_k. On note P la pression du mélange obtenu dans le flacon. L'ensemble du système est maintenu à une température T_0 constante, et on admet que tous les gaz sont modélisables comme des gaz parfaits.

Exprimer la pression dans le flacon dans le cas :

a) général ..... $\boxed{}$

b) où $V_k = V_0/N$ et $P_k = P_0$ ..... $\boxed{}$

c) où $V_k = V_0$ et $P_k = kP_0$ ..... $\boxed{}$

d) où $V_k = \dfrac{n_0 R T_0}{P_k}$ ..... $\boxed{}$

Entraînement 23.10 — Des fractions molaires aux pressions partielles.

Au cours de la respiration, des échanges chimiques permettent aux poumons de prélever le dioxygène de l'air et de rejeter du dioxyde de carbone. Tous les gaz sont supposés parfaits.

• Mélange inspiré :

Espèce chimique	N_2	O_2	CO_2	total
Quantité de matière	119 mmol	32 mmol	0 mmol	**a)**
Fraction molaire	**b)**	**c)**	0 mmol	1,000
Pression	800 mbar	**d)**	0 mmol	1 013 mbar

• Mélange expiré :

Espèce chimique	N_2	O_2	CO_2	total
Quantité de matière	119 mmol	24 mmol	**e)**	151 mmol
Fraction molaire	0,788	**f)**	0,050	1,000
Pression	798 mbar	**g)**	**h)**	1 013 mbar

Compléter les valeurs manquantes dans les deux tableaux.

a) $n_{\text{tot}} =$ ..... $\boxed{}$

b) $x_{\text{ins}}(N_2) =$ ..... $\boxed{}$

c) $x_{\text{ins}}(O_2) =$ ..... $\boxed{}$

d) $P_{\text{ins}}(O_2) =$ ..... $\boxed{}$

e) $n_{\text{exp}}(CO_2) =$ ..... $\boxed{}$

f) $x_{\text{exp}}(O_2) =$ ..... $\boxed{}$

g) $P_{\text{exp}}(O_2) =$ ..... $\boxed{}$

h) $P_{\text{exp}}(CO_2) =$ ..... $\boxed{}$

Entraînement 23.11 — Proportions dans un mélange gazeux.

On considère une enceinte fermée contenant un mélange de deux gaz parfaits différents. Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses : « Les quantités de matière sont différentes si ...

a) les pressions partielles sont égales » ..

b) les fractions molaires sont égales » ...

c) les masses des gaz sont égales » .....

d) les volumes des gaz sont égaux » .....

Entraînement 23.12 — Atmosphères et pressions partielles.

Le tableau suivant présente la composition de différentes atmosphères de planètes du système solaire.

Planète	Pression en surface	Composition atmosphérique (fractions molaires)
Vénus	9 MPa	Dioxyde de carbone (96%), Diazote (4%)
Terre	1 000 hPa	Diazote (78%), Dioxygène (21%)
Mars	600 Pa	Dioxyde de carbone (95%), Diazote (3%)

Calculer les pressions suivantes en bar :

a) P_{N_2} sur Vénus .....

b) P_{N_2} sur Terre .....

c) P_{N_2} sur Mars .....

d) P_{CO_2} sur Vénus .....

e) P_{CO_2} sur Mars .....

f) P_{O_2} sur Terre .....

Entraînement 23.13 — Pression et avancement.

On considère la réaction chimique de synthèse de l'ammoniac, modélisée par l'équation chimique suivante :

$$N_{2\,(g)} + 3H_{2\,(g)} = 2NH_{3\,(g)}.$$

Les quantités initiales valent $n_{N_2} = n$ mol et $n_{H_2} = 3n$ mol. On considère un état intermédiaire quelconque de la réaction, qui est réalisée à température constante dans un volume constant. On considère que tous les gaz se comportent comme des gaz parfaits. Exprimer les grandeurs suivantes uniquement en fonction de la pression initiale totale P_i du mélange et/ou de la quantité de matière n et/ou de l'avancement ξ de la réaction.

a) Quantité de matière totale .....

b) Pression totale .....

c) Pression partielle en amoniac .....

d) Pression partielle en diazote .....

e) Pression partielle en dihydrogène .....

Activité chimique et constante d'équilibre

Entraînement 23.14 — Activité d'un gaz.

On considère un mélange de gaz parfaits confiné dans une enceinte de $2\,\mathrm{m}^3$ à la température de $25\,^\circ\mathrm{C}$. Ce système contient du dioxygène présent à hauteur de 10 moles. Son activité doublera si :

(a) on ajoute 20 moles de dioxygène

(b) l'enceinte est agrandie à $4\,\mathrm{m}^3$

(c) la température passe à $323\,^\circ\mathrm{C}$

(d) la température passe à $50\,^\circ\mathrm{C}$

.....

Entraînement 23.15 — La juste puissance.

Pour chacun des quotients de réaction suivants, déterminer la puissance à laquelle est élevée la pression de référence P° après l'avoir simplifié au maximum.

a) $Q_1 = \dfrac{\left(\dfrac{n_1}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)^2\left(\dfrac{n_2}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)^3}{\left(\dfrac{n_3}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)^3\left(\dfrac{n_4}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)^2}$ .....

b) $Q_2 = \dfrac{\left(\dfrac{n_1}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)^4\left(\dfrac{n_2}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)^2}{\left(\dfrac{n_3}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)\left(\dfrac{n_4}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)^3}$ .....

c) $Q_3 = \dfrac{\left(\dfrac{c_1}{C^\circ}\right)^2\left(\dfrac{n_1}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)^5}{\left(\dfrac{n_2}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)^3\left(\dfrac{n_3}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)^4}$ .....

d) $Q_4 = \left(\dfrac{n_1}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)^3\left(\dfrac{c_1}{C^\circ}\right)^2\left(\dfrac{n_2}{n_{\text{tot}}}\dfrac{P}{P^\circ}\right)^{-2}\left(\dfrac{c_2}{C^\circ}\right)^{-3}$ .....

Entraînement 23.16 — Des quotients de réaction.

Pour chacune des réactions chimiques suivantes, exprimer les quotients de réaction en les simplifiant au maximum, c'est-à-dire en faisant apparaître le moins de fois possible les facteurs P° et/ou C° correspondant respectivement à la pression de référence 1 bar et la concentration de référence $1\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.

a) $\mathrm{N_{2\,(g)}} + 3\mathrm{H_{2\,(g)}} = 2\mathrm{NH_{3\,(g)}}$ .....

b) $4\mathrm{H_{(g)}} + \mathrm{O_{2\,(g)}} = 2\mathrm{H_2O_{(\ell)}}$ .....

c) $\mathrm{CH_{4\,(g)}} + 2\mathrm{O_{2\,(g)}} = \mathrm{CO_{2\,(aq)}} + 2\mathrm{H_2O_{(\ell)}}$ .....

d) $\mathrm{H_2O_{(\ell)}} + \mathrm{CO_{2\,(g)}} = \mathrm{H_2CO_{3\,(aq)}}$ .....

Entraînement 23.17 — Un soda pétillant.

Les boissons gazeuses contiennent du dioxyde de carbone dissous et sont pressurisées avec ce même gaz pour leur stockage et leur transport.

On considère une boisson qui contient $7{,}0\,\mathrm{g\cdot L^{-1}}$ de dioxyde de carbone (de masse molaire $44\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$) et dont le gaz en haut de la bouteille (uniquement du dioxyde de carbone) est à une pression de 3,0 bar.

En supposant l'équilibre chimique atteint, la constante d'équilibre de la réaction $\mathrm{CO_{2(g)}} = \mathrm{CO_{2(aq)}}$ à la température considérée vaut :

(a) 2,3
(c) 0,050
(b) 19
(d) 2,1

.....

Réponses mélangées

4 bar 164 mbar 0,162 $\frac{3(n-\xi)}{4n}P_i$ $\frac{Nn_0RT_0}{V_0}$ $\frac{[\mathrm{CO_2}](P^\circ)^3}{P_{\mathrm{CH_4}}P_{\mathrm{O_2}}^2C^\circ}$

(a) 6×10^{-3} bar faux (d) $\frac{N(N+1)}{2}P_0$ $\frac{1}{V_0}\sum_{k=0}^{N}P_kV_k$ (c)

$\frac{(n-\xi)}{4n}P_i$ $\frac{(P^\circ)^5}{P_{\mathrm{H_2}}^4P_{\mathrm{O_2}}}$ (c) (a) $4n-2\xi$ 0,21 bar vrai (b)

$\mathrm{H_2}$ 0 faux (b) 0,78 bar $24{,}9\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}$ P_0 $\frac{RT}{P}$ +2

8 mmol 2×10^{-4} bar $495\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}$ 51 mbar faux RT $\frac{2n-\xi}{2n}P_i$

(c) $RT+bP-\frac{a}{V_m}+\frac{ab}{V_m^2}$ (c) $\frac{P_{\mathrm{NH_3}}^2(P^\circ)^2}{P_{\mathrm{N_2}}P_{\mathrm{H_2}}^3}$ $0{,}078\,\mathrm{g\cdot L^{-1}}$ $2\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$

9×10^{1} bar 0,788 −1 213 mbar $\frac{\xi}{2-\xi}P_i$ $24{,}9\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}$ 0,21

$12{,}5\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}$ −2 $24{,}8\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}$ $\frac{[\mathrm{H_2CO_3}]P^\circ}{P_{\mathrm{CO_2}}C^\circ}$ 0 151 mmol

▶ Réponses et corrigés page 320

Réactions chimiques

Prérequis
Tableaux d'avancement, avancement (ξ) et avancement volumique (ξ_v) d'une réaction. Loi d'action de masse. Définition du pH, constante d'acidité. Constante d'autoprotolyse de l'eau.

Pour commencer

Entraînement 24.1 — Ajuster des équations de réaction.

Ajuster les équations des réactions suivantes.

a) $CO + O_2 = CO_2$ .....

b) $Ag^+ + Cu = Ag + Cu^{2+}$ .....

c) $NO + CO = N_2 + CO_2$ .....

d) $S_2O_8^{2-} + I^- = SO_4^{2-} + I_2$ .....

e) $C_8H_{18} + O_2 = CO_2 + H_2O$ .....

f) $MnO_4^- + H^+ + Fe^{2+} = Fe^{3+} + Mn^{2+} + H_2O$ .....

Entraînement 24.2 — Tableau d'avancement.

On considère le tableau d'avancement en quantité de matière suivant :

	$N_{2(g)}$ +	$3\ H_{2(g)}$ =	$2\ NH_{3(g)}$
État initial	n_1	n_2	0
État final	α	β	γ

où n_1 et n_2 sont des quantités de matière. À l'instant final, l'avancement molaire de la réaction vaut ξ.

Déterminer en fonction de n_1, n_2 et ξ, les quantités suivantes :

α .....

β .....

γ .....

Entraînement 24.3 — Dimension de la constante thermodynamique d'équilibre.

On considère la transformation d'équation :

$$SO_2Cl_{2(g)} = SO_{2(g)} + Cl_{2(g)}.$$

Trouver, parmi les formules suivantes, l'expression de sa constante d'équilibre K° :

(a) $K^\circ = \dfrac{P(SO_2)_{eq} \times P(Cl_2)_{eq}}{P(SO_2Cl_2)_{eq}}$

(b) $K^\circ = \dfrac{P(SO_2Cl_2)_{eq}}{P(SO_2)_{eq} \times P(Cl_2)_{eq}}$

(c) $K^\circ = \dfrac{P(SO_2Cl_2)_{eq} \times P^\circ}{P(SO_2)_{eq} \times P(Cl_2)_{eq}}$

(d) $K^\circ = \dfrac{P(SO_2)_{eq} \times P(Cl_2)_{eq}}{P(SO_2Cl_2)_{eq} \times P^\circ}$

.....

Entraînement 24.4 — Expression de la constante thermodynamique d'équilibre.

On considère la transformation d'équation :

$$Cd(OH)_{2(s)} + 4\ NH_{3(aq)} = [Cd(NH_3)_4]^{2+}{}_{(aq)} + 2\ HO^-{}_{(aq)}.$$

Trouver, parmi les formules suivantes, l'expression de sa constante d'équilibre K° :

(a) $K^\circ = \dfrac{\left[HO^-\right]_{eq} \times \left[[Cd(NH_3)_4]^{2+}\right]_{eq}}{[Cd(OH)_2]_{eq} \times [NH_3]_{eq}}$

(b) $K^\circ = \dfrac{\left[HO^-\right]_{eq}^2 \times \left[[Cd(NH_3)_4]^{2+}\right]_{eq}}{[Cd(OH)_2]_{eq} \times [NH_3]_{eq}^4 \times (C^\circ)^2}$

(c) $K^\circ = \dfrac{\left[HO^-\right]_{eq}^2 \times \left[[Cd(NH_3)_4]^{2+}\right]_{eq} \times (C^\circ)^2}{[Cd(OH)_2]_{eq} \times [NH_3]_{eq}^4}$

(d) $K^\circ = \dfrac{\left[HO^-\right]_{eq}^2 \times \left[[Cd(NH_3)_4]^{2+}\right]_{eq}}{[NH_3]_{eq}^4 \times C^\circ}$

(e) $K^\circ = \dfrac{\left[HO^-\right]_{eq}^2 \times \left[[Cd(NH_3)_4]^{2+}\right]_{eq} \times C^\circ}{[NH_3]_{eq}^4}$

(f) $K^\circ = \dfrac{[NH_3]_{eq}^4 \times C^\circ}{\left[HO^-\right]_{eq}^2 \times [[Cd(NH_3)_4]^{2+}]_{eq}}$

.....

Entraînement 24.5 — Expression et calcul de la constante d'équilibre.

On considère la réaction acide-base entre le chlorure d'ammonium (NH_4^+ ; Cl^-) et l'hydroxyde de sodium (Na^+ ; HO^-) :

$$NH_4^+{}_{(aq)} + HO^-{}_{(aq)} = NH_{3(aq)} + H_2O_{(\ell)}.$$

a) En utilisant la loi d'action de masse, exprimer la constante d'équilibre K° de la réaction en fonction des activités des différentes espèces physico-chimiques intervenant dans la réaction.

.....

b) La constante d'acidité K_A du couple NH_4^+/NH_3 est la constante d'équilibre de la réaction

$$NH_4^+{}_{(aq)} + H_2O = NH_{3(aq)} + H_3O^+{}_{(aq)}.$$

Exprimer K_A en fonction des activités des espèces pertinentes .....

c) La constante d'autoprotolyse de l'eau K_e est la constante d'équilibre de la réaction

$$2\,H_2O_{(\ell)} = H_3O^+{}_{(aq)} + HO^-{}_{(aq)}.$$

Exprimer K_e en fonction des activités des espèces pertinentes .....

d) Donner l'expression de K° en fonction de K_A et K_e .....

e) À 25 °C, on donne $pK_A = -\log_{10}(K_A) = 9{,}25$ et $pK_e = -\log_{10}(K_e) = 14$.

Calculer K° .....

Composition finale d'un système siège d'une réaction chimique

Entraînement 24.6 — Sens d'évolution d'une réaction.

On considère la transformation d'équation :

$$CH_3COOH_{(aq)} + F^-_{(aq)} = CH_3COO^-_{(aq)} + HF_{(aq)}$$

dont la constante d'équilibre à 25 °C est $K^\circ = 10^{-1,6}$.

On réalise cette réaction en partant de différentes concentrations initiales de réactifs et de produits.

Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer le sens d'évolution de la réaction.

a) $[CH_3COOH]_i = [F^-]_i = 1 \times 10^{-1}\,mol \cdot L^{-1}$ et $[CH_3COO^-]_i = [HF]_i = 0\,mol \cdot L^{-1}$

(a) sens direct (c) pas d'évolution

(b) sens indirect

.....

b) $[CH_3COOH]_i = [F^-]_i = [CH_3COO^-]_i = 1 \times 10^{-1}\,mol \cdot L^{-1}$ et $[HF]_i = 0\,mol \cdot L^{-1}$

(a) sens direct (c) pas d'évolution

(b) sens indirect

.....

c) $[CH_3COOH]_i = [F^-]_i = [CH_3COO^-]_i = [HF]_i = 1{,}0 \times 10^{-1}\,mol \cdot L^{-1}$

(a) sens direct (c) pas d'évolution

(b) sens indirect

.....

d) $[CH_3COOH]_i = 8{,}0 \times 10^{-4}\,mol \cdot L^{-1}$ et $[F^-]_i = [HF]_i = 4{,}0 \times 10^{-3}\,mol \cdot L^{-1}$ et $[CH_3COO^-]_i = 2{,}0 \times 10^{-5}\,mol \cdot L^{-1}$

(a) sens direct (c) pas d'évolution

(b) sens indirect

.....

Entraînement 24.7 — Détermination du réactif limitant.

On considère la réaction entre les ions fer (III) et les ions hydroxyde, formant un précipité d'hydroxyde de fer $Fe(OH)_{3(s)}$, aussi connu sous le nom de rouille. L'équation de la réaction est :

$$Fe^{3+}_{(aq)} + 3\ HO^{-}_{(aq)} = Fe(OH)_{3(s)}$$

À l'instant initial, on mélange une solution de chlorure de fer (III) (Fe^{3+} ; 3 Cl^-) avec une solution de soude (hydroxyde de sodium (Na^+ ; HO^-)) de sorte à obtenir les conditions suivantes :

	Fe^{2+}	Cl^-	Na^+	HO^-
Quantité de matière initiale	$3{,}0 \times 10^{-2}$ mol	$9{,}0 \times 10^{-2}$ mol	$6{,}0 \times 10^{-2}$ mol	$6{,}0 \times 10^{-2}$ mol

Déterminer le réactif limitant.

(a) $Fe^{3+}_{(aq)}$ (b) $HO^{-}_{(aq)}$ (c) $Fe(OH)_{3(s)}$ (d) Il n'y en a pas

.....

Entraînement 24.8 — Transformation totale.

On considère la réaction de combustion du butane à l'état gazeux suivante, ainsi que les concentrations initiales des réactifs :

$$2\ C_4H_{10(g)} + 13\ O_{2(g)} \longrightarrow 8\ CO_{2(g)} + 10\ H_2O_{(g)}$$

	C_4H_{10}	O_2	CO_2	H_2O
Quantité de matière initiale	$n_1 = 0{,}10$ mol	$n_2 = 0{,}65$ mol	0 mol	0 mol

Sachant que la réaction est totale, déterminer :

a) L'avancement maximal ξ_{max} pour cette transformation .....

b) La quantité de matière de dioxyde de carbone (CO_2) à l'état final .....

Entraînement 24.9 — Une autre transformation totale.

On s'intéresse à la réaction des ions argent avec le cuivre selon l'équation de réaction :

$$2\ Ag^{+}_{(aq)} + Cu_{(s)} \longrightarrow Cu^{2+}_{(aq)} + 2\ Ag_{(s)}.$$

Cette réaction est totale. On mélange initialement un volume $V = 20$ mL d'une solution contenant des ions argent (Ag^+) à la concentration $C = 0{,}25\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ avec une masse $m = 0{,}254$ g de cuivre solide (Cu).

On donne la masse molaire du cuivre $M_{Cu} = 63{,}5\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et celle de l'argent $M_{Ag} = 107\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

a) Quel est le réactif limitant ?

(a) $Ag^{+}_{(aq)}$ (b) $Cu_{(s)}$ (c) Il n'y en a pas

.....

b) À la fin de la réaction, la quantité de matière de $Cu_{(s)}$ vaut :

(a) 1,5 mmol (b) 2,5 mmol (c) 0 mmol

.....

Entraînement 24.10 — Loi d'action de masse et composition à l'équilibre.

À l'instant initial, on mélange un volume V_1 d'une solution aqueuse d'ions benzoate ($PhCOO^-$) à la concentration C_1 et un volume V_2 d'une solution aqueuse d'ions oxonium (H_3O^+) à la concentration C_2.

On donne l'équation de la réaction et son tableau d'avancement en quantité de matière :

	$PhCOO^-_{(aq)}$ +	$H_3O^+_{(aq)}$ =	$PhCOOH_{(s)}$ +	$H_2O_{(\ell)}$
État initial	C_1V_1	C_2V_2	0	excès
État final	$C_1V_1 - \xi$	$C_2V_2 - \xi$	ξ	excès

a) À l'aide de la loi d'action de masse, exprimer la constante d'équilibre K° associée à cette réaction, en fonction de C_1, C_2, V_1, V_2, C° et ξ.

.....

b) En déduire l'équation du second degré permettant de déterminer la valeur de ξ.

.....

Entraînement 24.11 — À la recherche de l'équilibre.

La loi d'action de masse permet de déterminer l'avancement ξ ou l'avancement volumique ξ_v à l'équilibre.

Mettre ces différentes lois d'action de masse sous la forme d'une équation du second degré en ξ ou ξ_v.

a) $K^\circ = \dfrac{\xi_v^2}{(C_1 - \xi_v) \times (C_2 - \xi_v)}$ .....

b) $K^\circ = \dfrac{\xi_v(C_2 + \xi_v)}{(C_1 - \xi_v) \times C^\circ}$ .....

c) $K^\circ = \dfrac{\left(\frac{\xi RT}{V}\right)^2}{\left(\frac{(n_1-\xi)RT}{V}\right) \times \left(\frac{(n_2-\xi)RT}{V}\right)}$ .....

d) $K^\circ = \dfrac{\left(\frac{\xi RT}{V}\right) \cdot P^\circ}{\left(\frac{(n-2\xi)RT}{V}\right)^2}$ .....

e) $K^\circ = \dfrac{\left(\frac{\xi}{n-\xi} \cdot P\right)P^\circ}{\left(\frac{(n-2\xi)}{n-\xi} \cdot P\right)^2}$ .....

Entraînement 24.12 — Calcul de l'avancement à l'équilibre.

Dans chacune des situations suivantes, une réaction se produit dans le sens direct. On indique que son l'avancement maximal est $\xi_{v,\max} = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

La loi d'action de masse donne l'équation dont est solution l'avancement volumique ξ_v.

Calculer ξ_v.

a) $\xi_v^2(1-K^\circ)+\xi_v K^\circ(C_1+C_2)-K^\circ C_1 C_2 = 0$ avec $\begin{cases} K^\circ = 2{,}0 \\ C_2 = 2C_1 = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \end{cases}$

b) $\xi_v^2+\xi_v K^\circ C^\circ - K^\circ C_1 C^\circ = 0$ avec $\begin{cases} K^\circ = 10^{-1,7} \\ C_1 = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \end{cases}$ .....

Autour des réactions acido-basiques

Entraînement 24.13 — pH d'une solution.

La constante d'autoprotolyse de l'eau $K_e = \dfrac{a(\text{HO}^-)\times a(\text{H}_3\text{O}^+)}{a(\text{H}_2\text{O})^2}$ vaut $K_e = 10^{-14}$ à 25 °C.

Calculer le pH de la solution dans les cas suivants.

a) Une solution telle que $[\text{H}_3\text{O}^+] = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ .....

b) Une solution telle que $[\text{HO}^-] = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ .....

Entraînement 24.14 — Quelques combats de concentration.

Pour chacun des cas suivants, déterminer quelle solution possède la plus grande concentration en ions oxonium.

a) Premier cas

(a) Une solution de pH = 1,0. (b) Une solution de pH = 2,0.

.....

b) Deuxième cas

(a) Une solution avec $[\text{H}_3\text{O}^+] = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. (b) Une solution de pH = 3,0.

.....

c) Troisième cas

(a) Une solution avec $[\text{HO}^-] = 2{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

(b) Une solution avec $[\text{HO}^-] = 8{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

.....

d) Quatrième cas

(a) Une solution avec $[\text{HO}^-] = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

(b) Une solution de pH = 9,0.

.....

Entraînement 24.15 — Constante d'acidité.

On considère le couple NH_4^+/NH_3.

Sa constante d'acidité K_A est la constante d'équilibre de la réaction :

$$NH_{4\,(aq)}^+ + H_2O_{(\ell)} = NH_{3(aq)} + H_3O^+{}_{(aq)}.$$

On donne $K_A = 10^{-9,2}$ à 25 °C.

a) À l'aide de la loi d'action de masse, exprimer le pH en fonction de $pK_A = -\log_{10}(K_A)$ ainsi que des concentrations $[NH_4^+]$ et $[NH_3]$.

.....

b) Sachant qu'on a $[NH_4^+] = 2{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et $[NH_3] = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$, calculer le pH de la solution.

.....

Entraînement 24.16 — Équilibre acido-basique.

On introduit un volume $V = 20{,}0\,\text{mL}$ d'une solution d'acide éthanoïque CH_3COOH à la concentration $C = 2{,}00 \times 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ dans un bécher contenant un volume $V' = 20{,}0\,\text{mL}$ d'eau distillée.

Un équilibre s'établit selon l'équation de réaction :

$$CH_3COOH_{(aq)} + H_2O_{(\ell)} = CH_3COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$$

La constante d'équilibre de cette réaction est $K_A = 10^{-4,8}$ à la température de l'expérience.

a) Établir l'équation du second degré vérifiée par l'avancement volumique ξ_v à l'état final d'équilibre

.....

b) Calculer $[CH_3COOH]_{eq}$ à l'équilibre. .....

c) En déduire le pH de la solution à l'équilibre. .....

Réponses mélangées

$2\ \mathrm{NO} + 2\ \mathrm{CO} = \mathrm{N_2} + 2\ \mathrm{CO_2}$ (c) (b) $10^{4,75}$ 3,9 $4{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{mol}$

$3{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ (b) (a) $n_2 - 3\xi$ $7{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ (a)

(d) (a) (e) (a) (b) $5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$ $8{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ 1,3

$4K^\circ\xi^2 - \xi\left(4K^\circ n + \dfrac{P^\circ V}{RT}\right) + K^\circ n^2 = 0$ $\xi^2(K^\circ - 1) - \xi K^\circ(n_1 + n_2) + K^\circ n_1 n_2 = 0$

$\dfrac{a(\mathrm{HO^-})_{\mathrm{eq}} \times a(\mathrm{H_3O^+})_{\mathrm{eq}}}{a(\mathrm{H_2O})^2_{\mathrm{eq}}}$ $K^\circ = \dfrac{K_A}{K_e}$ (a) $n_1 - \xi$ $\xi_v^2 + K_A C^\circ\,\xi_v - K_A C_1 C^\circ = 0$

$\xi_v^2(1 - K^\circ) + \xi_v K^\circ(C_1 + C_2) - K^\circ C_1 C_2 = 0$ $2\ \mathrm{Ag^+} + \mathrm{Cu} = 2\ \mathrm{Ag} + \mathrm{Cu^{2+}}$

12 8,9 $\dfrac{(C^\circ(V_1 + V_2))^2}{(C_1V_1 - \xi) \times (C_2V_2 - \xi)}$ (a) $\dfrac{a(\mathrm{NH_3})_{\mathrm{eq}} \times a(\mathrm{H_3O^+})_{\mathrm{eq}}}{a(\mathrm{NH_4^+})_{\mathrm{eq}} \times a(\mathrm{H_2O})_{\mathrm{eq}}}$

$2\,\mathrm{C_8H_{18}} + 25\,\mathrm{O_2} = 16\,\mathrm{CO_2} + 18\,\mathrm{H_2O}$ $\mathrm{MnO_4^-} + 8\,\mathrm{H^+} + 5\,\mathrm{Fe^{2+}} = 5\,\mathrm{Fe^{3+}} + \mathrm{Mn^{2+}} + 4\,\mathrm{H_2O}$

$\xi_v^2 + \xi_v(C_2 + K^\circ C^\circ) - K^\circ C_1 C^\circ = 0$ $\mathrm{S_2O_8^{2-}} + 2\,\mathrm{I^-} = 2\,\mathrm{SO_4^{2-}} + \mathrm{I_2}$ $2\,\mathrm{CO} + \mathrm{O_2} = 2\,\mathrm{CO_2}$

$\xi^2(4K^\circ P + P^\circ) - \xi(4nK^\circ P + nP^\circ) + K^\circ n^2 P = 0$ $\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_A + \log_{10}\left(\dfrac{[\mathrm{NH_3}]}{[\mathrm{NH_4^+}]}\right)$

$\dfrac{a(\mathrm{NH_3})_{\mathrm{eq}} \times a(\mathrm{H_2O})_{\mathrm{eq}}}{a(\mathrm{NH_4^+})_{\mathrm{eq}} \times a(\mathrm{HO^-})_{\mathrm{eq}}}$ 2ξ $\xi^2 - \xi(C_1V_1 + C_2V_2) + C_1C_2V_1V_2 - \dfrac{[C^\circ(V_1 + V_2)]^2}{K^\circ} = 0$ (a)

▶ Réponses et corrigés page 326

Cinétique chimique

Prérequis
Avancement. Spectrophotométrie. Catalyse. Équations différentielles.

Vitesse de réaction et notion d'ordre

Entraînement 25.1 — Constante de vitesse.

On considère une transformation chimique modélisée par la réaction d'équation :

$$\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}.$$

On suppose que la réaction admet un ordre, on note k la constante de vitesse et v la vitesse volumique de réaction.

a) On suppose que k s'exprime en s^{-1}.

Parmi ces relations fausses laquelle a au moins le mérite d'être homogène ?

(a) $v = k \times [\mathrm{B}]$
(b) $v = k^2 \times [\mathrm{A}]$
(c) $v = \dfrac{k}{[\mathrm{A}]}$
(d) $v = \ln(k) \times [\mathrm{A}]$

.....

b) La constante k s'exprime en $\mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{mol}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Quel est l'ordre probable de la réaction ?

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) 2 (d) 3

.....

L'unité de k s'écrit $\mathrm{mol}^{\alpha} \cdot \mathrm{L}^{\beta} \cdot \mathrm{s}^{\gamma}$.

c) Quelle est la valeur de γ quel que soit l'ordre de la réaction ?

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

.....

d) Quelle est la valeur de α si l'ordre de la réaction est 2 ?

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

.....

Entraînement 25.2 — Exprimer des vitesses de réaction.

On considère l'équation de la réaction de formation de l'ammoniac NH_3 à partir du diazote N_2 et du dihydrogène H_2, en phase gazeuse :

$$N_{2(g)} + 3\,H_{2(g)} = 2\,NH_{3(g)}.$$

a) Exprimer la vitesse volumique de formation du produit en fonction de sa concentration.

(a) $v_{\text{form}}(NH_3) = +\dfrac{\mathrm{d}[NH_3]}{\mathrm{d}t}$

(b) $v_{\text{form}}(NH_3) = -\dfrac{\mathrm{d}[NH_3]}{\mathrm{d}t}$

(c) $v_{\text{form}}(NH_3) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}[NH_3]}{\mathrm{d}t}$

(d) $v_{\text{form}}(NH_3) = 2\dfrac{\mathrm{d}[NH_3]}{\mathrm{d}t}$

.....

b) Exprimer la vitesse volumique de disparition de H_2 en fonction de sa concentration.

(a) $v_{\text{disp}}(H_2) = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\mathrm{d}[H_2]}{\mathrm{d}t}$

(b) $v_{\text{disp}}(H_2) = -\dfrac{\mathrm{d}[H_2]}{\mathrm{d}t}$

(c) $v_{\text{disp}}(H_2) = 3\dfrac{\mathrm{d}[H_2]}{\mathrm{d}t}$

(d) $v_{\text{disp}}(H_2) = -3\dfrac{\mathrm{d}[H_2]}{\mathrm{d}t}$

.....

c) Choisir les bonnes réponses parmi les propositions suivantes définissant la vitesse volumique v de réaction.

(a) $v = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}[NH_3]}{\mathrm{d}t}$

(b) $v = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}[NH_3]}{\mathrm{d}t}$

(c) $v = -\dfrac{\mathrm{d}[N_2]}{\mathrm{d}t}$

(d) $v = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\mathrm{d}[H_2]}{\mathrm{d}t}$

.....

d) Exprimer la vitesse de disparition des réactifs et la vitesse de formation du produit en fonction de la vitesse volumique v de réaction.

(a) $\dfrac{1}{2}v\,;\ v\,;\ v$

(b) $v\,;\ -3v\,;\ -2v$

(c) $v\,;\ 3v\,;\ 2v$

(d) $v\,;\ -v\,;\ -v$

.....

Entraînement 25.3 — Notion d'ordre.

Indiquer si les réactions suivantes possèdent un ordre global et si oui préciser sa valeur.

a) $NO_{2(g)} + CO_{(g)} = NO_{(g)} + CO_{2(g)}\,;\ v = k \times [NO_2]^2$ ....

b) $CO_{(g)} + C\ell_{2(g)} = COC\ell_{2(g)}\,;\ v = k \times [CO][C\ell_2]^{3/2}$ .....

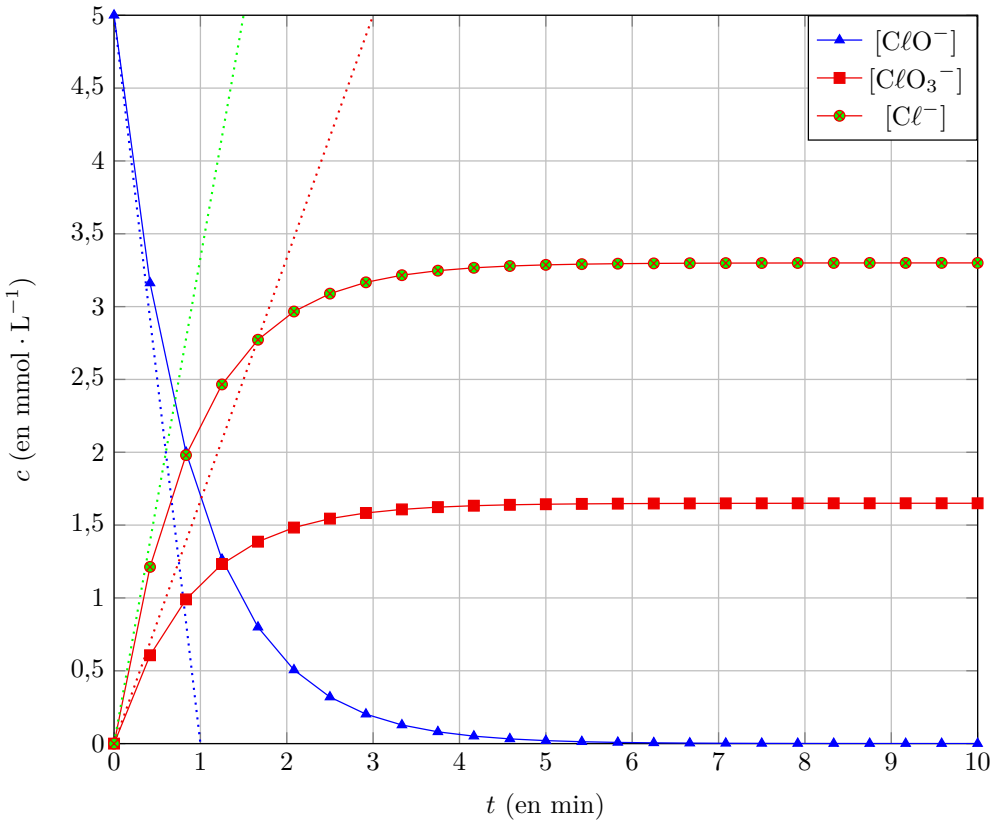
c) $H_{2(g)} + Br_{2(g)} = 2\,HBr_{(g)}\,;\ v = \dfrac{k \times [H_2][Br_2]^{1/2}}{1 + k' \times \dfrac{[HBr]}{[Br_2]}}$ .....

Entraînement 25.4 — Déterminer graphiquement des vitesses.

On considère la transformation chimique d'équation suivante :

$$3\,C\ell O^-_{(aq)} \longrightarrow C\ell O_3{}^-_{(aq)} + 2\,C\ell^-_{(aq)}.$$

Le profil de concentration des réactifs et des produits est présenté ci-dessous :



Déterminer graphiquement, à l'instant $t = 0\,\text{min}$:

a) la vitesse de disparition des ions hypochlorite $C\ell O^-$ .....

b) la vitesse de formation des ions chlorate $C\ell O_3{}^-$ .....

c) la vitesse de formation des ions chlorures $C\ell^-$ .....

d) la vitesse de réaction v .....

Autour de la loi d'Arrhenius

La constante de vitesse k d'une réaction est donnée par la relation d'Arrhenius :

$$k = A \times \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right), \qquad (*)$$

où A est le facteur de fréquence indépendant de la température, E_a l'énergie d'activation de la transformation (en $\mathrm{J \cdot mol^{-1}}$) et $R = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ la constante des gaz parfaits.

Entraînement 25.5 — Exploiter la loi d'Arrhenius.

a) À l'aide de $(*)$, exprimer E_a en fonction de k, A, R et T .....

La valeur de k double entre $T_1 = 25\,°\mathrm{C}$ et $T_2 = 35\,°\mathrm{C}$.

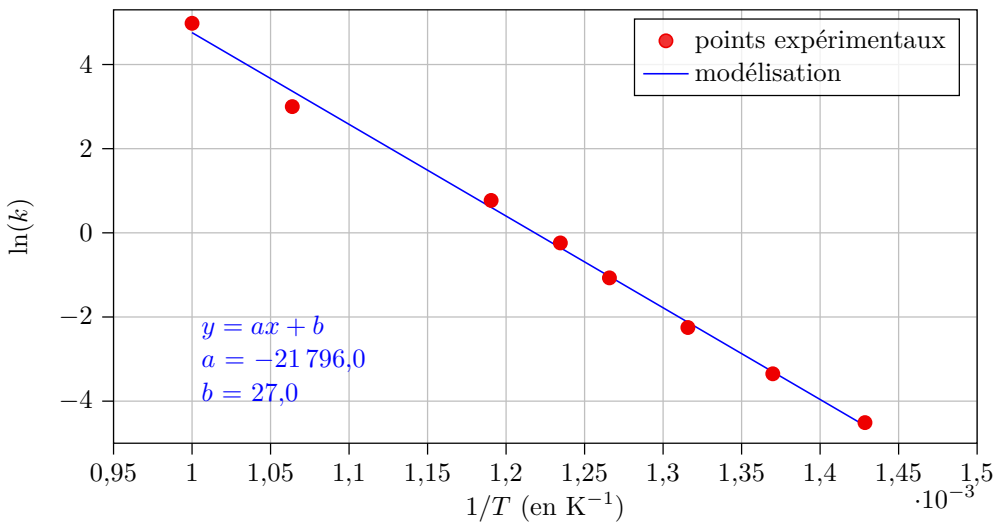
b) Déterminer la valeur de E_a .....

Entraînement 25.6 — Exploiter la loi d'Arrhenius linéarisée.

Dans cet entraînement, la constante de vitesse k est exprimée en $\mathrm{L \cdot mol^{-1} \cdot s^{-1}}$.

a) À l'aide de $(*)$, exprimer $\ln(k)$ en fonction de E_a, A, R et T. .....

On considère la régression linéaire ci-dessous.



b) À l'aide cette régression, déterminer la valeur de l'énergie d'activation E_a .....

c) À l'aide cette régression, déterminer la valeur du facteur de fréquence A .....

Autour des réactions admettant un ordre

On considère une transformation chimique modélisée par la réaction d'équation :

$$\alpha\,\mathrm{A} \longrightarrow \beta\,\mathrm{B},$$

où A et B sont des composés chimiques et où α et β sont les coefficients stœchiométriques correspondants. La constante de vitesse de la réaction est notée k.

Entraînement 25.7 — Établir une loi d'ordre 0.

a) Donner l'expression de v la vitesse volumique de réaction en fonction de [A].

.....

b) La réaction est supposée d'ordre 0 par rapport à A. Quelle est l'autre expression de v ?

.....

c) En déduire, par intégration, la concentration [A] en fonction du temps.

On notera $[\mathrm{A}]_0$ la concentration initiale.

.....

Entraînement 25.8 — Établir une loi d'ordre 1.

a) La réaction est supposée d'ordre 1 par rapport à A. Quelle est l'autre expression de v ?

.....

b) En déduire, par intégration, la concentration [A] en fonction du temps.

On notera $[\mathrm{A}]_0$ la concentration initiale.

.....

Entraînement 25.9 — Établir une loi d'ordre 2.

a) La réaction est supposée d'ordre 2 par rapport à A. Quelle est l'autre expression de v ?

.....

b) En déduire, par intégration, l'expression de $\dfrac{1}{[\mathrm{A}]}$ en fonction du temps.

On notera $[\mathrm{A}]_0$ la concentration initiale.

.....

c) En déduire l'expression de [A] en fonction du temps.

.....

Entraînement 25.10 — Exprimer un temps de demi-réaction.

On considère une transformation chimique modélisée par la réaction d'équation :

$$\alpha\,\mathrm{A} \longrightarrow \beta\,\mathrm{B},$$

où A et B sont des composés chimiques et où α et β sont les coefficients stœchiométriques correspondants.

On appelle *temps de demi-réaction* et on note $t_{1/2}$, le temps au bout duquel la moitié du réactif limitant a été consommée. On note $[\mathrm{A}]_0$ la concentration initiale en A.

Exprimer le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ pour chaque expression de [A] :

a) $[\mathrm{A}] = [\mathrm{A}]_0 - \alpha k t$ .....

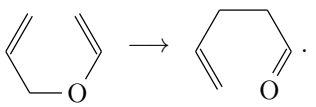
b) $[\mathrm{A}] = [\mathrm{A}]_0 \times \exp(-\alpha k t)$ .....

c) $\dfrac{1}{[\mathrm{A}]} = \dfrac{1}{[\mathrm{A}]_0} + \alpha k t$ .....

Détermination expérimentale d'ordre

Entraînement 25.11 — Appliquer la méthode du temps de demi-réaction.

On considère la réaction d'isomérisation ci-dessous dont on a mesuré le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ pour différentes concentrations initiales en réactif :



A B

$[\mathrm{A}]_0$ (en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$)	2,66	3,24	4,03	4,87
$t_{1/2}$ (en s)	877	876	878	877

On rappelle ci-dessous les expressions des temps de demi-réaction pour des réactions d'ordre 0, 1 ou 2.

Ordre	0	1	2
$t_{1/2}$	$\dfrac{[\mathrm{A}]_0}{2k}$	$\dfrac{\ln(2)}{k}$	$\dfrac{1}{[\mathrm{A}]_0 k}$

a) Déterminer l'ordre de la réaction .....

b) Calculer la constante de vitesse .....

Entraînement 25.12 — Appliquer la méthode de la dégénérescence de l'ordre.

On étudie dans cet entraînement la réaction de transformation du 1-bromo-2-méthylpropane (noté RBr) en 2-méthylpropan-1-ol (noté ROH) par l'hydroxyde de sodium en solution aqueuse.

L'équation associée à cette réaction, de constante de vitesse k, est :

$$\mathrm{RBr_{(aq)} + HO^-{}_{(aq)} \longrightarrow ROH_{(aq)} + Br^-{}_{(aq)}}.$$

Pour étudier sa cinétique, on mesure la concentration en réactif [RBr] au cours du temps, au cours d'une expérience pour laquelle la concentration initiale en ions hydroxyde est $[\mathrm{OH^-}] = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

Temps t (en min)	0	20	70	140	280
Concentration c (en 10^{-3} mol/L)	1,00	0,80	0,50	0,25	0,06

a) Déterminer le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ à l'aide du tableau.

(a) $t_{1/2} = 20\,\mathrm{min}$
(b) $t_{1/2} = 70\,\mathrm{min}$
(c) $t_{1/2} = 140\,\mathrm{min}$
(d) $t_{1/2} = 280\,\mathrm{min}$

.....

b) On suppose que l'ordre partiel par rapport à chacun des réactifs est de 1.

La loi de vitesse peut s'écrire (*plusieurs réponses sont possibles*) :

(a) $v = k[\mathrm{RBr}][\mathrm{HO^-}]$
(b) $v = k_{\mathrm{app}}[\mathrm{HO^-}]$ avec $k_{\mathrm{app}} = k[\mathrm{RBr}]_0$
(c) $v = k_{\mathrm{app}}[\mathrm{RBr}]$ avec $k_{\mathrm{app}} = k[\mathrm{HO^-}]_0$
(d) $v = k[\mathrm{RBr}]^2$

.....

c) Indiquer le graphique à tracer pour déterminer la valeur de la constante apparente k_{app}.

(a) [RBr] en fonction du temps
(b) $\ln\big([\mathrm{RBr}]\big)$ en fonction du temps
(c) $\dfrac{1}{[\mathrm{RBr}]}$ en fonction du temps
(d) $\exp\big([\mathrm{RBr}]\big)$ en fonction du temps

.....

d) On trouve $k_{\mathrm{app}} = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{min^{-1}}$. En déduire la valeur de k.

(a) $k = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}}$
(b) $k = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{L \cdot mol^{-1} \cdot min^{-1}}$
(c) $k = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}}$
(d) $k = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{L \cdot mol^{-1} \cdot min^{-1}}$

.....

Entraînement 25.13 — Appliquer la méthode différentielle.

On étudie la synthèse du sulfure d'hydrogène $H_2S_{(g)}$ à partir de vapeurs de soufre $S_{(g)}$ et de dihydrogène gazeux $H_{2(g)}$ suivant la réaction d'équation :

$$S_{(g)} + H_{2(g)} \longrightarrow H_2S_{(g)}.$$

On suppose que la vitesse initiale est de la forme $v_0 = k \times [S]_0^{\,n} \times [H_2]_0^{\,m}$.

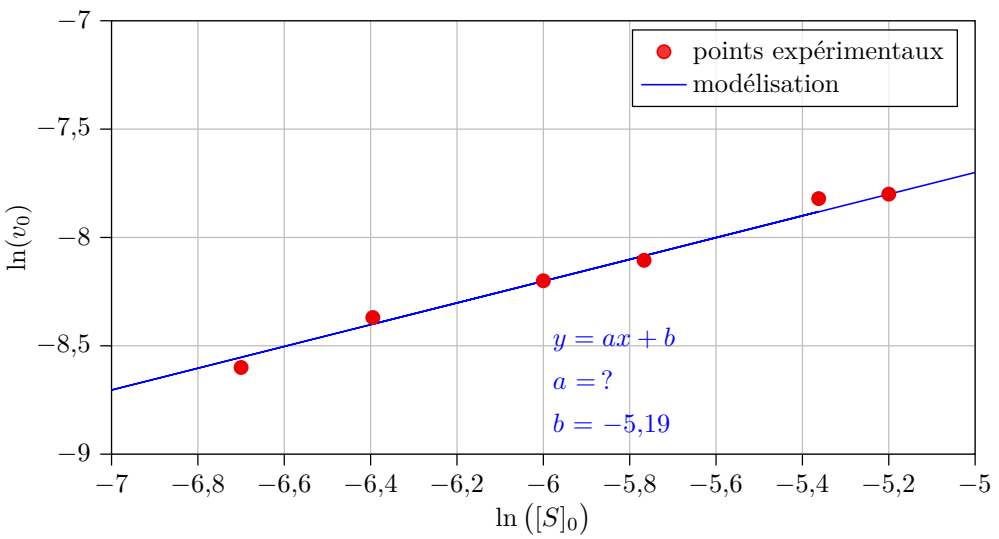
Deux séries d'expériences ont été effectuées afin de déterminer les ordres partiels par rapport à chacun des réactifs.

Série 1			
$[S]_0$ (en $10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$)	1,67	1,67	1,67
$[H_2]_0$ (en $10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$)	0,62	1,24	1,86
v_0 (en $10^{-4}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{min}^{-1}$)	0,75	1,50	2,25

a) Déterminer la valeur de m par exploitation des données expérimentales de la série 1.

.....

La deuxième série d'expériences donne la régression linéaire suivante pour $[H_2]_0 = 1{,}86 \times 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.



b) Exprimer $\ln(v_0)$ en fonction de $\ln[S]_0$ et montrer que ces entités sont reliées par une fonction affine.

.....

c) Exploiter la régression linéaire afin de déterminer la valeur de n .....

d) Déterminer la valeur de la constante de vitesse k .....

Réponses mélangées

(b) $RT\big(\ln(A) - \ln(k)\big)$ $[\mathrm{A}]_0 \times \exp(-\alpha k t)$ $m = 1$ $\dfrac{[\mathrm{A}]_0}{2\alpha k}$ (a) et (c)

$3{,}00\ \mathrm{L}^{1/2} \cdot \mathrm{mol}^{-1/2} \cdot \mathrm{min}^{-1}$ (d) Non (c) (d) (a) $\dfrac{\ln(2)}{\alpha k}$

(c) $53\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$ $n = \dfrac{1}{2}$ $1{,}8 \times 10^2\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$ $7{,}90 \times 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$

$\dfrac{[\mathrm{A}]_0}{1 + \alpha[\mathrm{A}]_0 k t}$ $3{,}3\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}}$ Oui : 2 (a) k $k[\mathrm{A}]^2$ (a)(c)(d)

Oui : $\dfrac{5}{2}$ $\ln(A) - \dfrac{E_\mathrm{a}}{RT}$ $-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t}$ $\dfrac{1}{[\mathrm{A}]_0 \alpha k}$ $5{,}3 \times 10^{11}\,\mathrm{L \cdot mol^{-1} \cdot s^{-1}}$ 1

$\dfrac{1}{[\mathrm{A}]_0} + \alpha k t$ $\ln\left(k \times [\mathrm{H_2}]_0^m\right) + n \ln\left([\mathrm{S}]_0\right)$ (b) $1{,}7\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}}$ (c)

$v = k[\mathrm{A}]$ $1{,}7\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}}$ (b) $[\mathrm{A}]_0 - \alpha k t$ $5{,}0\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}}$

▶ Réponses et corrigés page 333

Chiffres significatifs et incertitudes

Prérequis

- Les incertitudes sont à donner avec deux chiffres significatifs.
- Toutes les incertitudes fournies sont des incertitudes-type.

Ainsi, si le résultat d'une mesure de vitesse est de 30 mètres par seconde avec une incertitude-type de 1 mètre par seconde, on notera cette vitesse

$$v = (30{,}0 \pm 1{,}0)\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Résultats numériques

Entraînement 26.1 — Écriture scientifique.

Réécrire les nombres en utilisant l'écriture scientifique. On veillera à garder les chiffres significatifs.

a) 31,5 .....

b) 0,001 9 .....

c) 0,812 0 .....

d) 1 600 002 .....

e) 2 023,9 .....

f) 7 300 .....

g) 330×10^{6} .....

h) $70{,}22 \times 10^{-4}$ .....

Entraînement 26.2 — Combien de chiffres significatifs ?

Indiquer le nombre de chiffres significatifs des grandeurs mesurées suivantes :

a) une intensité électrique de 0,39 A. ..

b) une tension de 12,84 mV. .....

c) une vitesse de $12{,}250\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. .....

d) une longueur de 0,002 0 m. .....

Entraînement 26.3 — Opérations et chiffres significatifs.

Effectuer les calculs en gardant le bon nombre de chiffres significatifs.

a) Combien de kilomètres sont parcourus en 6,0 min par une voiture roulant à une vitesse moyenne $v = 80\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$? .....

b) Quel est le périmètre d'un rectangle de largeur 6 mm et de longueur 15 cm ? .....

Le gain d'un pont diviseur de tension vaut $G = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$. On effectue le montage avec une résistance $R_1 = 0{,}9\,\mathrm{k\Omega}$ et d'une résistance $R_2 = 100\,\Omega$.

c) Que vaut le gain G ? .....

Entraînement 26.4 — Incertitude et chiffres significatifs.

Une mesure de focale donne pour résultat $f' = 12{,}016\,835\,7$ cm avec une incertitude-type de $32{,}316\,648\,2$ mm. Quel sera votre résultat numérique final ?

(a) $f' = (12 \pm 3)$ cm
(b) $f' = (120 \pm 65)$ mm
(c) $f' = (12{,}0 \pm 3{,}2)$ cm
(d) $f' = (120 \pm 33)$ mm

.....

Propagation des erreurs

Prérequis

On considère deux grandeurs expérimentales indépendantes x et y, et $z = f(x, y)$ une grandeur calculée.

L'incertitude-type $\mathsf{u}(z)$ est reliée à celles de x et y *via* les relations :

$$\mathsf{u}(z)^2 = a^2\,\mathsf{u}^2(x) + b^2\,\mathsf{u}^2(y) \quad \text{si} \quad z = ax + by$$

$$\left(\frac{\mathsf{u}(z)}{z}\right)^2 = a^2\left(\frac{\mathsf{u}(x)}{x}\right)^2 + b^2\left(\frac{\mathsf{u}(y)}{y}\right)^2 \quad \text{si} \quad z = c\,x^a y^b$$

où a, b et c sont des paramètres fixés.

Entraînement 26.5 — Pour commencer.

On mesure $x = (10{,}0 \pm 0{,}2)$ m et $y = (9{,}1 \pm 0{,}3)$ m.

Calculer :

a) $x + y$ .....

b) $x - y$ .....

c) $x \times y$ .....

d) $\dfrac{y}{x}$ .....

Entraînement 26.6 — Dosage d'une solution.

On dose une solution acide de concentration c_A inconnue. Le volume de solution dosée est V_A, et la solution utilisée pour le dosage est de concentration c_B. À l'équivalence, un volume V_B de base est versée et l'on a

$$c_A = \frac{c_B \times V_B}{V_A}$$

La base est préparée de sorte à avoir $c_B = (100{,}0 \pm 2{,}0)\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}$.

De plus, on mesure les volumes $V_A = (20{,}00 \pm 0{,}10)$ mL et $V_B = (11{,}80 \pm 0{,}10)$ mL

Quel résultat obtient-on pour c_A ? (en $\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}$) .....

Entraînement 26.7 — Puissance électrique dans une résistance.

On désire mesurer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance, donnée par $\mathcal{P} = U \times I = R\,I^2$.

Donner la puissance (exprimée en watts) et son incertitude pour les mesures suivantes :

a) $U = (2{,}382 \pm 0{,}050)\,\text{V}$ et $I = (0{,}500 \pm 0{,}010)\,\text{A}$ .....

b) $I = (0{,}500 \pm 0{,}010)\,\text{A}$ et $R = (4{,}70 \pm 0{,}14)\,\Omega$ .....

c) Ces deux mesures sont-elles compatibles ?

(a) Oui (b) Non

.....

Entraînement 26.8 — Diamètre d'un tube.

On mesure l'épaisseur d'un tube cylindrique au pied à coulisse.

Le diamètre intérieur du tube est $d = (6{,}8 \pm 0{,}1)\,\text{mm}$ et le diamètre extérieur $D = (10{,}3 \pm 0{,}1)\,\text{mm}$.

a) Exprimer l'épaisseur e du tube en fonction de d et D.

(a) $\pi(D^2 - d^2)$ (b) $\dfrac{D-d}{2}$ (c) $\sqrt{D^2 + d^2}$ (d) $\dfrac{d-D}{2}$

.....

b) En déduire l'expression de l'incertitude-type sur l'épaisseur $\mathsf{u}(e)$ en fonction de D, d, $\mathsf{u}(d)$ et $\mathsf{u}(D)$.

(a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\mathsf{u}^2(D) + \mathsf{u}^2(d)}$

(b) $\sqrt{\left(\dfrac{\mathsf{u}(D)}{D}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathsf{u}(d)}{d}\right)^2}$

(c) $\sqrt{u^2(D) + u^2(d)}$

(d) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{\mathsf{u}(D)}{D}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathsf{u}(d)}{d}\right)^2}$

.....

c) En déduire le résultat de la mesure de e.

(a) $e = (1{,}75 \pm 0{,}07)\,\text{mm}$

(b) $e = (1{,}75 \pm 0{,}10)\,\text{mm}$

(c) $e = (1{,}8 \pm 0{,}1)\,\text{mm}$

(d) $e = (1{,}750 \pm 0{,}071)\,\text{mm}$

.....

Entraînement 26.9 — Analyse d'une figure de diffraction.

On mesure la figure de diffraction obtenue en interposant un cheveu entre un écran et un laser. La distance entre le cheveu et l'écran est $D = (3 \pm 10 \times 10^{-3})\,\text{m}$ la longueur d'onde du laser $\lambda = (632{,}80 \pm 0{,}10)\,\text{nm}$, et l'on observe une tache de diffraction de largeur $\ell = (5{,}10 \pm 0{,}30)\,\text{cm}$.

Le diamètre d du cheveu peut alors se déduire de ces mesures *via* la relation :

$$d = 2\frac{\lambda\, D}{\ell}.$$

a) Exprimer l'incertitude $\mathsf{u}(d)$ en fonction de d, λ, D, ℓ, et de $\mathsf{u}(\lambda)$, $\mathsf{u}(D)$ et $\mathsf{u}(\ell)$ .....

b) Quel résultat obtient-on pour d ? (en µm) .....

Incertitudes expérimentales

Entraînement 26.10 — Série de mesures.

On procède à $n = 10$ mesures d'une tension. Le tableau ci-dessous recense les résultats :

Mesure n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_i (en V)	4,955	5,596	4,271	4,955	5,164	5,371	4,671	4,736	5,393	4,183

a) Que vaut la moyenne arithmétique $m = \dfrac{1}{n}\sum_i U_i$ de la série ? .....

b) Calculer l'écart-type expérimental de la série $\sigma_U = \sqrt{\dfrac{\sum_i (U_i - m)^2}{n-1}}$ .....

L'incertitude-type de m est donnée par $\mathsf{u}(m) = \dfrac{\sigma_U}{\sqrt{n}}$.

c) En déduire le résultat final de la mesure .....

Entraînement 26.11 — Focométrie.

On procède à des mesures d'une distance focale (notée f') ; le tableau ci-dessous recense les résultats :

f' (en cm)	24,6	24,5	25,1	25,1	25,3	25,4	24,9	24,8	24,9	25,4	25,3	24,9

Donner le résultat final de la mesure .....

Entraînement 26.12 — Résistances en série.

On dispose de n résistances identiques, dont l'incertitude relative est donnée à 1 %. On les monte en série. Ainsi, la résistance totale est égale à la somme des résistances individuelles.

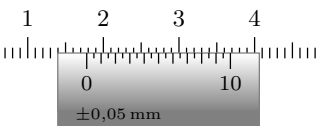
Quelle est l'incertitude relative pour la résistance totale lorsque $n = 5$?

(a) 0,44 % (b) 1 % (c) 2,2 %

.....

Entraînement 26.13 — Mesure au pied à coulisse.

On mesure le diamètre d d'un fil de cuivre au pied à coulisse (on prendra $\mathsf{u}(d) = 0{,}050\,\text{mm}$) :



a) Que vaut le diamètre ? .....

b) En déduire la section droite du fil (en mm^2) .....

Autour du z-score

Prérequis

On appelle *écart normalisé* (ou z-*score*) entre deux grandeurs x_1 et x_2, connues avec une incertitude type $\mathsf{u}(x_1)$ et $\mathsf{u}(x_2)$, le nombre réel positif défini par

$$\mathsf{z} = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{\mathsf{u}(x_1)^2 + \mathsf{u}(x_2)^2}}.$$

Par convention, les deux valeurs x_1 et x_2 sont dites compatibles si $\mathsf{z} \leqslant 2$. Comme c'est un indicateur à comparer à 2, on ne garde qu'une décimale lors de sa détermination.

On utilise en particulier cette définition dans le cas où une des grandeurs, par exemple x_1 peut être considérée comme une référence, avec une incertitude négligeable. On a alors $\mathsf{u}(x_1) \ll \mathsf{u}(x_2)$ et la formule approchée plus simple :

$$\mathsf{z} = \frac{|x_2 - x_1|}{\mathsf{u}(x_2)}.$$

Entraînement 26.14 — Z-scores et compatibilité.

Dans chaque situation, deux valeurs d'une même grandeur sont obtenues indépendamment.

Indiquer, en calculant leurs z-scores, si ces valeurs sont compatibles :

a) La vitesse du son dans l'air est déterminée expérimentalement à $(349{,}0 \pm 2{,}3)\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Une table de référence donne $(344{,}08 \pm 0{,}69)\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

(a) Oui, elles sont compatibles (b) Non, elles ne le sont pas

.....

b) Une température est mesurée par deux groupes en TP. Le premier groupe obtient $(52{,}900 \pm 0{,}060)\,°\mathrm{C}$, le second $(53{,}100 \pm 0{,}060)\,°\mathrm{C}$.

(a) Oui, elles sont compatibles (b) Non, elles ne le sont pas

.....

c) Une lentille est vendue pour avoir une focale de 25 cm. Lors d'une séance de TP, cette focale est mesurée à $(24{,}05 \pm 0{,}85)\,\mathrm{cm}$.

(a) Oui, elles sont compatibles (b) Non, elles ne le sont pas

.....

Réponses mélangées

$1{,}0 \times 10^{-1}$ (a) $1{,}9 \times 10^{-3}$ $(1{,}175 \pm 0{,}059)\,\mathrm{W}$ $(59{,}0 \pm 1{,}4)\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$

$(19{,}10 \pm 0{,}36)\,\mathrm{m}$ (b) $(1{,}191 \pm 0{,}035)\,\mathrm{W}$ $(1{,}780 \pm 0{,}050)\,\mathrm{mm}$ $7{,}022 \times 10^{-3}$

$0{,}472\,\mathrm{V}$ (a) 4 (d) $8{,}120 \times 10^{-1}$ $(74{,}4 \pm 4{,}4)\,\mu\mathrm{m}$ 2 (b)

$2{,}023\,9 \times 10^{3}$ $31\,\mathrm{cm}$ $7{,}300 \times 10^{3}$ 2 $d\sqrt{\left(\frac{\mathsf{u}(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(\ell)}{\ell}\right)^2}$

$1{,}600\,002 \times 10^{6}$ $(0{,}90 \pm 0{,}36)\,\mathrm{m}$ $3{,}30 \times 10^{8}$ $(2{,}49 \pm 0{,}14)\,\mathrm{mm^2}$

(a) (c) et (d) $4{,}929\,5\,\mathrm{V}$ (a) $(25{,}017 \pm 0{,}092)\,\mathrm{cm}$ $8{,}0\,\mathrm{km}$

$3{,}15 \times 10^{1}$ $(91{,}0 \pm 3{,}5)\,\mathrm{m^2}$ 5 (b) $(4{,}93 \pm 0{,}15)\,\mathrm{V}$ $0{,}910 \pm 0{,}035$

► Réponses et corrigés page 337

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Conversions

Réponses

1.1 a) ..... $1 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}$

1.1 b) ..... $2{,}5 \cdot 10^{3}\,\mathrm{m}$

1.1 c) ..... $3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$

1.1 d) ..... $7{,}2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}$

1.1 e) ..... $5{,}2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$

1.1 f) ..... $1{,}3 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$

1.2 a) ..... $1{,}50 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m}$

1.2 b) ..... $7 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m}$

1.2 c) ..... $2{,}34\,\mathrm{m}$

1.2 d) ..... $1{,}20 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$

1.2 e) ..... $2{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$

1.2 f) ..... $4{,}1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$

1.3 a) ..... $7{,}3 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m/s}$

1.3 b) ..... $2{,}6 \cdot 10^{7}\,\mathrm{km/h}$

1.4 ..... $2{,}4\,\mathrm{MJ}$

1.5 ..... $5{,}5 \cdot 10^{-2}\,\Omega$

1.6 a) ..... $1{,}99 \cdot 10^{6}\,\mathrm{Rg}$

1.6 b) ..... $1{,}99 \cdot 10^{3}\,\mathrm{Qg}$

1.6 c) ..... $1{,}90 \cdot 10^{3}\,\mathrm{Rg}$

1.6 d) ..... $1{,}90\,\mathrm{Qg}$

1.6 e) ..... $5{,}97\,\mathrm{Rg}$

1.6 f) ..... $5{,}97 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Qg}$

1.6 g) ..... $1{,}67 \cdot 10^{3}\,\mathrm{rg}$

1.6 h) ..... $1{,}67 \cdot 10^{6}\,\mathrm{qg}$

1.6 i) ..... $9{,}10 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{rg}$

1.6 j) ..... $9{,}10 \cdot 10^{2}\,\mathrm{qg}$

1.7 a) ..... $250\,\mathrm{g}$

1.7 b) ..... $200\,\mathrm{g}$

1.7 c) ..... $125\,\mathrm{g}$

1.7 d) ..... $5\,\mathrm{g}$

1.8 a) 10%

1.8 b) ..... $0{,}7\,\%$

1.8 c) ..... $50\,\%$

1.8 d) ..... $5\,\%$

1.8 e) ..... $180\,\%$

1.8 f) ..... $0{,}5\,\%$

1.9 ..... $5{,}2\%$

1.10 a) ..... $1{,}03 \times 10^{3}\,\mathrm{TWh}$

1.10 b) ..... $722\,\mathrm{TWh}$

1.10 c) ..... $406\,\mathrm{TWh}$

1.10 d) ..... $113\,\mathrm{TWh}$

1.10 e) ..... $64\,\mathrm{TWh}$

1.10 f) ..... $62\,\mathrm{TWh}$

1.10 g) ..... $41\,\mathrm{TWh}$

1.10 h) ..... $134\,\mathrm{TWh}$

1.11 ..... l'or

1.12 a) ..... $1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$

1.12 b) .... $0{,}000\ 000\ 000\ 1\,\mathrm{m}$

1.13 a) ..... $4{,}43 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$

1.13 b) ..... $4{,}33 \cdot 10^{13}\,\mathrm{km}$

1.14 a) ..... $10\ 000\,\mathrm{m}^2$

1.14 b) ..... $0{,}01\,\mathrm{km}^2$

1.14 c) ..... $6{,}72 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}^2$

1.14 d) ..... $6{,}72 \cdot 10^{7}\,\mathrm{ha}$

1.14 e) ..... $5{,}89 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}^2$

1.14 f) ..... $5{,}89 \cdot 10^{4}\,\mathrm{ha}$

1.15 a) ..... oui

1.15 b) ..... oui

1.16 a) ..... $1 \cdot 10^{3}\,\mathrm{kg/m}^3$

1.16 b) ..... $625\,\mathrm{kg/m}^3$

1.17 a) 7,87

1.17 b) ..... $1{,}6 \times 10^{3}\,\mathrm{kg/m}^3$

1.18 ..... La boule en or

1.19 ..... non

1.20 ..... voiture

1.21 a) ..... $30\,\mathrm{dm/s}$

1.21 b) ... 1 année-lumière/an

1.22 a) ..... $0{,}017\,\mathrm{tr/min}$

1.22 b) ..... $0{,}001\ 7\,\mathrm{rad/s}$

1.22 c) .... $1{,}90 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{tr/min}$

1.22 d) ..... $1{,}99 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad/s}$

Corrigés

1.3 a) Il faut bien penser à garder le bon nombre de chiffres significatifs (deux ici car les données en possèdent également deux) :

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \times 150\,\text{V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}}} = 7{,}3 \cdot 10^{6}\,\text{m/s}.$$

1.3 b) On $v = 7{,}3 \cdot 10^{6}\,\text{m/s} = 7{,}3 \cdot 10^{3}\,\text{km/s} = 7{,}3 \cdot 10^{3}\ \times 3\,600\,\text{km/h} = 2{,}6 \cdot 10^{7}\,\text{km/h}$.

1.4 On a $1\,\text{W} \cdot \text{s} = 1\,\text{J}$ donc $1\,\text{W} \cdot \text{h} = 3\,600\,\text{J}$ donc $1\,\text{kW} \cdot \text{h} = 3{,}6 \cdot 10^{6}\,\text{J}$.

Ainsi, on trouve $T = 0{,}67\,\text{kW} \cdot \text{h} = 2{,}4 \cdot 10^{6}\,\text{J} = 2{,}4\,\text{MJ}$.

1.5 On calcule $R = \dfrac{10\,\text{m}}{59 \cdot 10^{6}\,\text{S/m} \times 3{,}1 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2} = 5{,}5 \cdot 10^{-2}\,\Omega$.

1.11 Pour comparer ces abondances et trouver la plus petite, on peut les convertir dans la même unité, par exemple en ppm :

Silicium	**Or**	**Hydrogène**	**Fer**	**Oxygène**	**Cuivre**
$2{,}75 \cdot 10^{5}$ ppm	$1 \cdot 10^{-3}$ ppm	$1{,}4 \cdot 10^{3}$ ppm	$5{,}0 \cdot 10^{4}$ ppm	$4{,}6 \cdot 10^{5}$ ppm	50 ppm

1.13 a) Une année lumière est la distance que parcourt la lumière en une année. Elle vaut donc

$$1\,\text{an} \times 365{,}25\,\text{jour/an} \times 24\,\text{h/jour} \times 3\,600\,\text{s/h} \times 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\text{m/s} = 9{,}47 \cdot 10^{15}\,\text{m}.$$

La distance entre Alpha du centaure et la Terre est donc $4{,}7 \times 9{,}47 \cdot 10^{15}\,\text{m} = 4{,}4 \cdot 10^{16}\,\text{m}$.

1.14 a) On a $1\,\text{ha} = 100\,\text{m} \times 100\,\text{m} = 1 \times 10^{4}\,\text{m}^2$.

1.14 b) On a $1\,\text{ha} = 0{,}1\,\text{km} \times 0{,}1\,\text{km} = 0{,}01\,\text{km}^2$.

1.14 c) On a $672\,051\,\text{km}^2 = 672\,051 \cdot 1 \times 10^{6}\,\text{m}^2 = 6{,}72 \cdot 10^{11}\,\text{m}^2$.

1.14 d) On a $672\,051\,\text{km}^2 = 672\,051 \cdot 1 \times 10^{2}\,\text{ha} = 6{,}72 \cdot 10^{7}\,\text{ha}$.

1.14 e) On a $589\,\text{km}^2 = 589 \times 1 \times 10^{6}\,\text{m}^2 = 5{,}89 \cdot 10^{8}\,\text{m}^2$.

1.14 f) On a $589\,\text{km}^2 = 589 \times 1 \times 10^{2}\,\text{ha} = 589 \cdot 10^{2}\,\text{ha} = 5{,}89 \cdot 10^{4}\,\text{ha}$.

1.15 a) On peut convertir : $2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3 = 250\,\text{mL}$.

1.15 b) On peut convertir : $7{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{m}^3 = 75\,\text{L}$.

1.16 b) La masse volumique de la farine est $\dfrac{0{,}25\,\text{g}}{0{,}4\,\text{cL}} = 0{,}625\,\text{kg/L} = 625\,\text{kg/m}^3$.

.....

1.18 Le volume du cube est $(10\,\text{cm})^3 = 1\ 000\,\text{cm}^3$. Sa masse est donc

$$11{,}20\,\text{g/cm}^3 \times 1\ 000\,\text{cm}^3 = 11{,}20 \cdot 10^3\,\text{g} = 11{,}2\,\text{kg}.$$

Le volume de la boule est $\dfrac{4}{3}\pi(15\,\text{cm})^3 = 14 \cdot 10^3\,\text{cm}^3 = 1{,}4 \cdot 10^{-2}\,\text{m}^3$. Sa masse est alors

$$19\ 300\,\text{kg/m}^3 \times 1{,}4 \cdot 10^{-2}\,\text{m}^3 = 270\,\text{kg}.$$

.....

1.19 On a $\dfrac{2\,\text{mg}}{1 \cdot 10^3\,\text{mm}^3} = \dfrac{2 \cdot 10^{-3}\,\text{g}}{1 \cdot 10^{-3}\,\text{L}} = 2\,\text{g/L}$.

.....

1.20 On a $110\,\text{km/h} = 30\,\text{m/s}$.

.....

1.21 a) On résume les calculs dans le tableau suivant :

$20\,\text{km/h}$	$10\,\text{m/s}$	1 année-lumière/an	$22\,\text{mm/ns}$	$30\,\text{dm/s}$	$60\,\text{cm/ms}$
$5{,}56\,\text{m/s}$	$10\,\text{m/s}$	$3{,}00 \cdot 10^8\,\text{m/s}$	$2{,}2 \cdot 10^7\,\text{m/s}$	$3{,}0\,\text{m/s}$	$600\,\text{m/s}$

.....

1.21 b) Voir les vitesses indiquées dans le corrigé précédent.

.....

1.22 a) On a $1\,\text{tr}/60\,\text{min} = 0{,}017\,\text{tr/min}$.

.....

1.22 b) On a $1\,\text{tr}/60\,\text{min} = 2\pi\,\text{rad}/3\ 600\,\text{s} = 0{,}001\ 7\,\text{rad/s}$.

.....

1.22 c) On a $1\,\text{tr}/1\,\text{an} = 1\,\text{tr}/(1\,\text{an} \times 365{,}25\,\text{j/an} \times 24\,\text{h/j} \times 60\,\text{min/h}) = 1{,}90 \cdot 10^{-6}\,\text{tr/min}$.

.....

1.22 d) On a $1\,\text{tr}/1\,\text{an} = 2\pi\,\text{rad}/(1\,\text{an} \times 365{,}25\,\text{j/an} \times 24\,\text{h/j} \times 60\,\text{min/h} \times 60\,\text{s/min}) = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\,\text{rad/s}$.

.....

Fiche nº 2. Signaux

Réponses

2.1 a) ..... $\boxed{-\sin(\alpha)}$

2.1 b) ..... $\boxed{-\sin(\alpha)}$

2.1 c) ..... $\boxed{\cos(\alpha)}$

2.1 d) ..... $\boxed{\cos(\alpha)}$

2.2 a) ..... $\boxed{2\cos(2t)}$

2.2 b) ... $\boxed{-2\sin(t+4)\cos(t+4) = -\sin(2t+8)}$

2.2 c) ..... $\boxed{\cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)}$

2.3 a) ..... $\boxed{2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)}$

2.3 b) ..... $\boxed{2A\sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)}$

2.4 ..... $\boxed{A\sin(\varphi)\cos(\omega t) + A\cos(\varphi)\sin(\omega t)}$

2.5 a) ..... $\boxed{\text{Courbe 2}}$

2.5 b) ..... $\boxed{\text{Courbe 4}}$

2.5 c) ..... $\boxed{\text{Courbe 3}}$

2.5 d) ..... $\boxed{\text{Courbe 1}}$

2.6 ..... $\boxed{\text{c}}$

2.7 a) ..... $\boxed{1{,}5\,\text{V}}$

2.7 b) ..... $\boxed{\frac{\pi}{2}\,\text{rad}}$

2.7 c) ..... $\boxed{2\,\text{s}}$

2.7 d) ..... $\boxed{0{,}5\,\text{Hz}}$

2.7 e) ..... $\boxed{\pi\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$

2.8 a) ..... $\boxed{\text{En retard}}$

2.8 b) ..... $\boxed{\varphi < 0}$

2.8 c) ..... $\boxed{-\frac{2\pi}{3}\,\text{rad}}$

2.9 a) ..... $\boxed{u_3(t)}$

2.9 b) ..... $\boxed{u_1(t)}$

2.9 c) ..... $\boxed{u_2(t)}$

2.10 a) ..... $\boxed{0}$

2.10 b) ..... $\boxed{\frac{U_0}{\sqrt{2}}}$

2.11 a) ..... $\boxed{1{,}5\,\text{V}}$

2.11 b) ..... $\boxed{\sqrt{3}\,\text{V}}$

2.12 a) ..... $\boxed{\frac{U_0}{2}}$

2.12 b) ..... $\boxed{\frac{U_0}{\sqrt{2}}}$

2.13 a) ..... $\boxed{1{,}7\,\text{km}}$

2.13 b) ..... $\boxed{5{,}7\,\mu\text{s}}$

2.13 c) ..... $\boxed{\text{oui}}$

2.14 ..... $\boxed{18\,\text{km/h}}$

2.15 a) ..... $\boxed{1{,}6\,\text{s}}$

2.15 b) ..... $\boxed{48\,\text{cm}}$

2.15 c) ..... $\boxed{2\sin(3{,}9t - 13x + 0{,}3\pi)}$

Corrigés

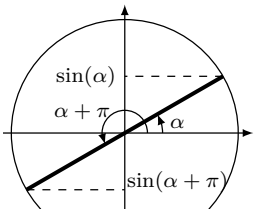
2.1 a)

En utilisant le cercle trigonométrique, on voit directement que

$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha).$$

Remarquons qu'on peut également utiliser les formules trigonométriques :

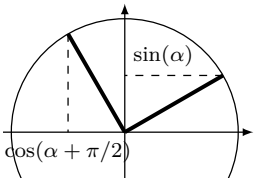
$$\sin(\alpha+\pi) = \sin(\alpha)\cos(\pi) + \sin(\pi)\cos(\alpha) = -\sin(\alpha).$$



.....

2.1 b)

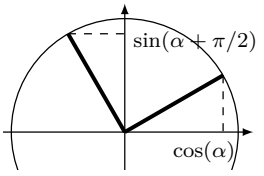
On a $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$.



.....

2.1 c)

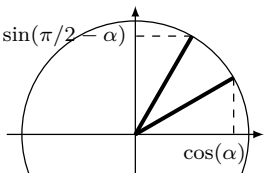
On a $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$.



.....

2.1 d)

On a $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos(\alpha)$.



.....

2.3 a) On somme les formules trigonométriques :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \end{cases} \quad \text{pour obtenir} \quad \cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

On a

$$\begin{cases} a+b = \omega_1 t \\ a-b = \omega_2 t \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2} t \\ b = \dfrac{\omega_1-\omega_2}{2} t. \end{cases}$$

On en déduit

$$A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\,t\right).$$

Ainsi, $C = 2A$, $\Omega = \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$ et $\omega = \dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}$ conviennent.

.....

2.3 b) On somme les formules trigonométriques :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \end{cases} \quad \text{pour obtenir} \quad \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b).$$

On a

$$\begin{cases} a - b = \omega_1 t \\ a + b = \omega_2 t \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \\ b = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2} t. \end{cases}$$

On en déduit $A\cos(\omega_1 t) - A\cos(\omega_2 t) = 2A\sin\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}\, t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}\, t\right)$.

.....

2.4 On utilise la formule trigonométrique : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

On a $A\sin(\omega t + \varphi) = A[\sin(\omega t)\cos(\varphi) + \cos(\omega t)\sin(\varphi)] = A\sin(\varphi)\cos(\omega t) + A\cos(\varphi)\sin(\omega t)$.

Ainsi, $B = A\sin(\varphi)$ et $C = A\cos(\varphi)$ conviennent.

.....

2.5 a) On a $\sin(0) = 0$. La courbe 2 est la seule courbe passant par le point $(0, 0)$ et est donc la seule courbe compatible. On vérifie aussi que la courbe 2 est comprise dans l'intervalle $[-1, 1]$ et que sa période est égale à 2π.

.....

2.5 b) On a $\cos(0) = 1$, ce qui est cohérent avec les courbes 1, 3 et 4. Ce n'est donc pas suffisant pour déterminer quelle courbe correspond à la fonction cosinus. Mais on sait de plus que $\cos(x) \in [-1, 1]$, ce qui correspond à la courbe 4. On vérifie également que la courbe 4 a une période égale à 2π.

.....

2.5 c) On a $1 + \sin(0) = 1$ et $1 + \sin(x) \in [0, 2]$. Cela correspond à la courbe 3. On vérifie également que la courbe 3 a une période égale à 2π.

.....

2.5 d) On a $\cos^2(0) = 1$ et $\cos^2(x) \in [0, 1]$. Cela correspond à la courbe 1. C'est aussi la seule courbe qui a une période égale à π.

.....

2.6 On peut mettre $A\sin(\omega t + \varphi)$ sous la forme $B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$ avec $B = A\sin(\varphi)$ et $C = A\cos(\varphi)$. On a donc ici :

$$\begin{cases} A\sin(\varphi) = 1 \\ A\cos(\varphi) = 1 \end{cases}$$

En faisant le rapport des deux équations, on obtient $\dfrac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) = 1$, ce qui correspond à $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

On utilise alors la première équation : $A\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{A}{\sqrt{2}} = 1$. Donc, $A = \sqrt{2}$.

Finalement, $\cos(\omega t) + \sin(\omega t) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4)$ ce qui correspond à la réponse (c).

.....

2.7 b) On lit graphiquement $u(0) = 0 = U_0\cos(\varphi)$. Donc, $\cos(\varphi) = 0$. Donc, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

.....

2.7 d) On a mesuré à la question précédente $T = 2\,\text{s}$. D'où $f = \dfrac{1}{T} = 0{,}5\,\text{Hz}$.

.....

2.7 e) On a déterminé $f = 0{,}5\,\text{Hz}$ à la question précédente, d'où $\omega = 2\pi f = \pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

.....

2.8 a) Le signal $u_1(t)$ atteint son premier maximum avant $u_2(t)$. Le signal $u_2(t)$ est donc en retard sur $u_1(t)$.

.....

2.8 c) On lit graphiquement le retard $\tau = -1\,\text{s}$ de $u_2(t)$ sur $u_1(t)$. On en déduit $\varphi = \omega\tau = -\dfrac{2\pi}{3}$ rad.

.....

2.9 c) Le signal $u_1(t)$ a pour période $T_1 = 300\,\mu\text{s}$. Le signal $u_2(t)$ a pour période $T_2 = \dfrac{1}{f_2} = 125\,\mu\text{s}$. Enfin, le signal $u_3(t)$ a pour période $T_3 = \dfrac{2\pi}{\omega_3} = 628\,\mu\text{s}$. On classe donc les trois signaux par ordre croissant de période : $T_2 < T_1 < T_3$ puis par identification : $u_3(t) \longleftrightarrow$ Voie A ; $u_1(t) \longleftrightarrow$ Voie B ; $u_2(t) \longleftrightarrow$ Voie C.

.....

2.10 a) Par définition, on a $U_{\text{moy}} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u(t)\,\text{d}t$. On calcule donc :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T U_0\cos\Big(\frac{2\pi}{T}t\Big)\,\text{d}t = \frac{U_0}{T}\times\frac{T}{2\pi}\Big[\sin\Big(\frac{2\pi}{T}t\Big)\Big]_0^T = \frac{U_0}{2\pi}(0-0) = 0.$$

.....

2.10 b) Par définition, on a $U_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u(t)^2\,\text{d}t}$. On calcule donc : ${U_{\text{eff}}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T U_0^2\cos^2\Big(\frac{2\pi}{T}t\Big)\,\text{d}t$.

Pour calculer cette intégrale, il faut linéariser le cosinus au carré. Pour cela, on peut utiliser les formules trigonométriques :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \qquad \text{donc} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

D'où,

$${U_{\text{eff}}}^2 = \frac{U_0^2}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos\Big(\frac{2\pi}{T}t\Big)}{2}\right)\text{d}t = \frac{U_0^2}{2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T\text{d}t\right) + \frac{U_0}{2}U_{\text{moy}} = \frac{U_0^2}{2}.$$

Ainsi, $U_{\text{eff}} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$.

.....

2.11 a) On lit graphiquement que la période est $T = 4\,\text{s}$ et que, sur une période, le signal prend les valeurs :

$$u(t) = \begin{vmatrix} 3\,\text{V si } 0\,\text{s} < t \leqslant 1\,\text{s} \\ 1\,\text{V si } 1\,\text{s} < t \leqslant 4\,\text{s}. \end{vmatrix}$$

On calcule donc :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 3\,\text{d}t + \int_1^4 1\,\text{d}t\right) = \frac{1}{4}(3+3) = \frac{6}{4} = 1{,}5\,\text{V}.$$

.....

2.11 b) On a toujours $T = 4\,\text{s}$ et

$$u(t) = \begin{vmatrix} 3\,\text{V si } 0\,\text{s} < t \leqslant 1\,\text{s} \\ 1\,\text{V si } 1\,\text{s} < t \leqslant 4\,\text{s}. \end{vmatrix}$$

On calcule donc :

$${U_{\text{eff}}}^2 = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 9\,\text{d}t + \int_1^4 1\,\text{d}t\right) = \frac{1}{4}(9+3) = \frac{12}{4} = 3\,\text{V}^2.$$

Donc, $U_{\text{eff}} = \sqrt{3}\,\text{V}$.

.....

2.12 a) On calcule

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} U_0\,\text{d}t + \int_{T/2}^T 0\,\text{d}t\right) = \frac{U_0}{2}.$$

2.12 b) On calcule

$$U_{\text{eff}}{}^2 = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} U_0^2 \,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} 0 \,\mathrm{d}t\right) = \frac{{U_0}^2}{2}.$$

Ainsi, $U_{\text{eff}} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$.

2.13 a) Le délai entre l'éclair et le tonnerre est dû à la durée nécessaire pour que le son se propage entre l'endroit où l'onde sonore a été émise et l'endroit où se tient l'observateur. On a donc

$$d = c_s \times \Delta t = 1{,}7\,\text{km}.$$

On garde uniquement deux chiffres significatifs car Δt est donné avec deux chiffres significatifs.

2.13 b) On a $\tau = \dfrac{d}{c} = 5{,}7\,\mu\text{s}$.

2.13 c) La durée τ est très inférieure à la précision de la mesure de 0,5 s, on peut donc considérer que la propagation de la lumière est instantanée.

2.14 On lit graphiquement que la vague a avancé de 300 m en 1 minute, donc sa célérité est

$$c = \frac{300}{60} = 5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 18\,\text{km/h}.$$

2.15 a) Le sinus étant 2π périodique, la période est $T = \dfrac{2\pi}{3{,}9} = 1{,}6\,\text{s}$.

2.15 b) On a $\lambda = cT = 48\,\text{cm}$.

2.15 c) Compte tenu de la vitesse de propagation, on trouve

$$s(x,t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = 2\sin\left(3,9\left(t - \frac{x}{0,30}\right) + 0,3\pi\right) = 2\sin(3{,}9t - 13x + 0{,}3\pi).$$

Fiche n° 3. Étude des circuits électriques I

Réponses

3.1 ..... $\boxed{\text{b}}$

3.2 ..... $\boxed{2{,}5 \cdot 10^{17}}$

3.3 a) ..... $\boxed{2i}$

3.3 b) ..... $\boxed{i}$

3.3 c) ..... $\boxed{0}$

3.4 a) ..... $\boxed{80\,\text{mA}}$

3.4 b) ..... $\boxed{30\,\text{mA}}$

3.4 c) ..... $\boxed{-350\,\text{mA}}$

3.5 a) ..... $\boxed{E - U_1}$

3.5 b) ..... $\boxed{U_1 - E}$

3.5 c) ..... $\boxed{E - U_1}$

3.6 a) ..... $\boxed{1\,\text{V}}$

3.6 b) ..... $\boxed{-6\,\text{V}}$

3.6 c) ..... $\boxed{7\,\text{V}}$

3.7 a) ..... $\boxed{-\dfrac{u}{R}}$

3.7 b) ..... $\boxed{\dfrac{u}{2R}}$

3.7 c) ..... $\boxed{\dfrac{u}{3R}}$

3.8 a) ..... $\boxed{\dfrac{5}{6}R}$

3.8 b) ..... $\boxed{\dfrac{R}{5}}$

3.8 c) ..... $\boxed{\dfrac{R}{N}}$

3.8 d) ..... $\boxed{R\left(\dfrac{1-a^2}{3-a^2}\right)}$

3.9 a) ..... $\boxed{1\,\text{k}\Omega}$

3.9 b) ..... $\boxed{1\,\text{k}\Omega}$

3.9 c) ..... $\boxed{1\,\text{k}\Omega}$

3.10 ..... $\boxed{\dfrac{4R(R+R')}{2R+R'}}$

3.11 a) ..... $\boxed{2R}$

3.11 b) ..... $\boxed{R}$

3.11 c) ..... $\boxed{0}$

3.12 a) ..... $\boxed{\dfrac{I_0}{3}}$

3.12 b) ..... $\boxed{\dfrac{R_2}{R_1+R_2}I_0}$

3.13 a) ..... $\boxed{\dfrac{1}{4}Ri + Ri_1}$

3.13 b) ..... $\boxed{\dfrac{13}{4}Ri - 3Ri_1}$

3.14 a) ..... $\boxed{\dfrac{E}{R}}$

3.14 b) ..... $\boxed{\dfrac{3E}{4R}}$

3.15 a) .. $\boxed{\dfrac{ER_1}{R_1+R_2+R_3+R_4}}$

3.15 b) .. $\boxed{\dfrac{E(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3+R_4}}$

3.15 c) .. $\boxed{\dfrac{-ER_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}}$

3.16 a) ..... $\boxed{2}$

3.16 b) ..... $\boxed{3}$

3.17 a) ..... $\boxed{\dfrac{3}{4}R}$

3.17 b) ..... $\boxed{\dfrac{3}{4}E}$

3.17 c) ..... $\boxed{-\dfrac{E}{4}}$

3.18 a) ..... $\boxed{\dfrac{3E}{8R}}$

3.18 b) ..... $\boxed{\dfrac{E}{4R}}$

3.18 c) ..... $\boxed{-\dfrac{E}{8R}}$

Corrigés

3.1 Calculons le nombre d'électrons transférés pendant une seconde :

- 5 000 électrons durant 1 ms correspond à $5 \cdot 10^6\,\text{s}^{-1}$;
- 0,2 mol d'électrons durant 1 an correspond à

$$0{,}2\,\text{mol} \times 6{,}0 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1} / \left(365\,\text{jour} \cdot \text{an}^{-1} \times 24\,\text{h} \cdot \text{jour}^{-1} \times 3\,600\,\text{s} \cdot \text{h}^{-1}\right) = 3{,}8 \cdot 10^{15}\,\text{s}^{-1}\ ;$$

- 20 milliards d'électrons durant 1 min correspond à $\dfrac{20 \times 10^9\,\text{min}^{-1}}{60\,\text{min/h}^{-1}} = 3{,}3 \cdot 10^8\,\text{s}^{-1}$.

Par conséquent, c'est le courant (b) qui donne la plus grande intensité.

.....

3.2 La quantité de charge transférée vaut $q = I \times \Delta t = 4 \times 10^{-3}\,\text{A} \times 10\,\text{s} = 40\,\text{mC}$. Cette quantité de charge correspond à un nombre d'électrons $N = q/e = 40 \times 10^{-3}\,\text{C}/1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C} = 2{,}5 \cdot 10^{17}$ électrons.

.....

3.5 a) La loi des mailles donne la relation : $U + U_1 - E = 0$ soit $U = E - U_1$.

.....

3.5 b) Les points A et C sont au même potentiel, ainsi que les points B et D. Par conséquent, la tension $U_{\text{AB}} = U_{\text{CD}} = -U_{\text{DC}} = -U$. Donc, $U_{\text{AB}} = U_1 - E$.

.....

3.5 c) D est au même potentiel que B de sorte que $U_{\text{DA}} = U_{\text{BA}} = -U_{\text{AB}}$. On trouve donc $U_{\text{DA}} = E - U_1$.

.....

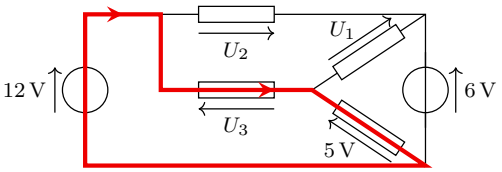
3.6 a) Dans la maille triangulaire, on a $6 = U_1 + 5$, soit $U_1 = 1\,\text{V}$.

.....

3.6 b) Dans la grande maille rectangulaire, la loi des mailles donne $12 + U_2 - 6 = 0$, soit $U_2 = -6\,\text{V}$.

.....

3.6 c)



Dans la maille surlignée et parcourue dans le sens indiqué, on trouve la relation $12 - U_3 - 5 = 0$, ce qui donne $U_3 = 7\,\text{V}$.

.....

3.7 a) La loi d'Ohm s'écrit $u = Ri$ en convention récepteur et $u = -Ri$ en convention générateur. Ici la résistance est fléchée en convention générateur. Ainsi, on trouve $i = -u/R$.

.....

3.7 b) La loi d'Ohm donne $u = 2Ri$ soit $i = \dfrac{u}{2R}$.

.....

3.7 c) La résistance est fléchée en convention générateur : on a $u = -(3R) \times (-i)$, d'où $i = \dfrac{u}{3R}$.

.....

3.8 a) $R_{\text{eq}} = \dfrac{R}{2} + \dfrac{R}{3} = \dfrac{5}{6}R$.

.....

3.8 b) $\dfrac{1}{R_{\text{eq}}} = \dfrac{2}{R} + \dfrac{3}{R} = \dfrac{5}{R}$, soit $R_{\text{eq}} = \dfrac{R}{5}$.

.....

3.8 c) $\dfrac{1}{R_{\text{eq}}} = \underbrace{\dfrac{1}{R} + \ldots + \dfrac{1}{R}}_{N \text{ fois}} = \dfrac{N}{R}$, d'où $R_{\text{eq}} = \dfrac{R}{N}$.

.....

3.8 d) La résistance équivalente R_{eq} est telle que :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R(1+a)} + \frac{1}{R(1-a)} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a}\right) = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{2}{1-a^2}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{3-a^2}{1-a^2}\right).$$

On en déduit $R_{\text{eq}} = R\left(\dfrac{1-a^2}{3-a^2}\right)$.

.....

3.9 a) En associant les deux résistances en série, on se ramène à deux résistances de $2\,\text{k}\Omega$ en parallèle, ce qui est équivalent à une résistance de $1\,\text{k}\Omega$.

.....

3.9 b) En répétant la méthode précédente plusieurs fois, on arrive au même résultat.

.....

3.10 La résistance équivalente du dipôle AB vaut $R_{\text{eq}} = 2R + \dfrac{2RR'}{2R+R'}$ soit $R_{\text{eq}} = \dfrac{4R(R+R')}{2R+R'}$.

.....

3.11 a) On doit résoudre

$$\frac{4R(R+R')}{2R+R'} = 3R \quad \text{soit} \quad 4R^2 + 4RR' = 6R^2 + 3RR' \quad \text{d'où} \quad RR' = 2R^2.$$

Comme $R \neq 0$, on obtient $R' = 2R$.

.....

3.11 b) On doit résoudre

$$\frac{4R(R+R')}{2R+R'} = \frac{8}{3}R \quad \text{soit} \quad 12R^2 + 12RR' = 16R^2 + 8RR' \quad \text{d'où} \quad 4RR' = 4R^2.$$

Comme $R \neq 0$, on obtient $R' = R$.

.....

3.11 c) Résolvons l'équation

$$\frac{4R(R+R')}{2R+R'} = 2R \quad \text{soit} \quad 4R^2 + 4RR' = 4R^2 + 2RR' \quad \text{d'où} \quad 2RR' = 0.$$

Comme $R \neq 0$, il faut nécessairement $R' = 0$.

.....

3.12 b) Isolons I :

$$\begin{aligned} R_1 I + R_2(I_0 + I) &= 2R_2 I_0 \\ (R_1 + R_2)I + R_2 I_0 &= 2R_2 I_0 \\ (R_1 + R_2)I &= R_2 I_0 \\ I &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0. \end{aligned}$$

.....

3.13 a) Appliquons la loi des mailles en parcourant la maille dans le sens ABCF :

$$E - \frac{1}{4}Ri - Ri_1 = 0 \quad \text{soit} \quad E = \frac{1}{4}Ri + Ri_1.$$

.....

3.13 b) Appliquons la loi des mailles en parcourant la maille dans le sens ABDE :

$$E - \frac{1}{4}Ri - 3R(i - i_1) = 0 \quad \text{d'où} \quad E = \frac{13}{4}Ri - 3Ri_1.$$

.....

3.14 a) Additionnons les deux relations après avoir multiplié par 3 la première

$$\begin{cases} 3Ri + 12Ri_1 = 12E \\ 13Ri - 12Ri_1 = 4E \end{cases} \quad \text{donnent ainsi} \quad 16Ri = 16E \quad \text{d'où} \quad i = \frac{E}{R}.$$

.....

3.14 b) Dans la première relation, remplaçons i par E/R :

$$R \times \left(\frac{E}{R}\right) + 4Ri_1 = 4E \quad \text{donc} \quad 4Ri_1 = 3E \quad \text{d'où} \quad i_1 = \frac{3E}{4R}.$$

.....

3.15 a) Rappelons la règle du diviseur de tension :

Dans un circuit où N conducteurs de résistances $R_1, \dots, R_N$ sont placés en série, la tension U_k qui règne aux bornes de la résistance R_k est donnée par la formule

$$U_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} U \quad \text{avec} \quad U = \sum_{i=1}^{N} U_i.$$

Ici, cela donne $U_1 = E \times \dfrac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$.

.....

3.15 b) Ici, on cherche la tension aux bornes de l'ensemble des résistances $\{R_2, R_3\}$ placés en série et donc équivalent à $R_2 + R_3$. La règle du diviseur donne alors $U_2 = E \times \dfrac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$.

.....

3.15 c) Attention, ici il y a un piège. La loi du diviseur de tension donne $U_3 = U\dfrac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$ où U est la somme algébrique des tensions orientées dans le même sens que la tension que l'on cherche. Aussi a-t-on $U = -E$ de sorte que $U_3 = -E \times \dfrac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$.

.....

3.16 a) La formule du diviseur de courant donne $\dfrac{i_1}{i} = \dfrac{1/(\alpha R)}{1/(\alpha R) + 1/R}$. Par conséquent, α doit vérifier l'équation

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{3} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha = 2.$$

.....

3.16 b) On peut utiliser les formules du diviseur de courant :

$$i_1 = i \times \frac{1/(\alpha R)}{1/(\alpha R) + 1/R} \quad \text{et} \quad i_2 = i \times \frac{1/R}{1/(\alpha R) + 1/R}$$

ce qui permet de déduire $i_2/i_1 = \alpha$. La solution est donc $\alpha = 3$.

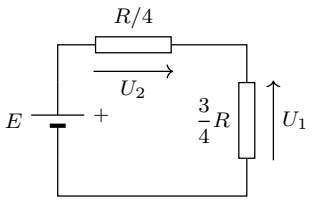
On peut aussi tout simplement écrire la loi des mailles : $\alpha R i_1 = R i_2$ pour aboutir plus immédiatement au résultat.

.....

3.17 a) L'association $(R \parallel 3R)$ est équivalent à un conducteur de résistance $R_{\text{eq}} = \dfrac{R \times 3R}{R + 3R} = \dfrac{3}{4}R$.

.....

3.17 b) Simplifions le montage en remplaçant l'association $(R \parallel 3R)$ par un conducteur de résistance $R_{\text{eq}} = \dfrac{3}{4}R$.



On reconnaît un diviseur de tension. La formule du diviseur donne $U_1 = E \times \dfrac{\frac{3}{4}R}{\frac{1}{4}R + \frac{3}{4}R} = \dfrac{3}{4}E$.

.....

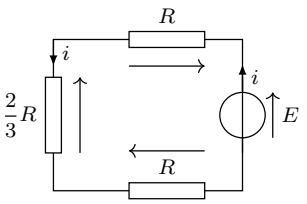
3.17 c) Là encore on peut utiliser la formule du diviseur de tension en faisant attention à l'orientation :

$$-U_2 = E \times \frac{\frac{1}{4}R}{\frac{1}{4}R + \frac{3}{4}R} \quad \text{soit} \quad U_2 = -\frac{E}{4}.$$

Remarque : on peut aussi obtenir U_2 à l'aide de la loi des mailles : $E + U_2 - U_1 = 0$ avec $U_1 = \dfrac{3}{4}E$.

.....

3.18 a) Remplaçons l'association $(2R \parallel R)$ par un conducteur de résistance $R_{\text{eq}} = \dfrac{2R \times R}{2R + R} = \dfrac{2}{3}R$. On obtient le circuit à une maille suivant :



La loi des mailles donne alors $E - Ri - \dfrac{2}{3}Ri - Ri = 0$, d'où $i = \dfrac{3}{8}\dfrac{E}{R}$.

.....

3.18 b) La formule du diviseur donne

$$i_1 = \frac{1/R}{1/R + 1/(2R)} \times i = \frac{2}{3}i = \frac{E}{4R}.$$

.....

3.18 c) Le plus simple consiste à utiliser la loi des nœuds : $i + i_2 = i_1$ ce qui donne $i_2 = i_1 - i = -\dfrac{E}{8R}$.
On peut aussi utiliser la formule du diviseur de courant en faisant attention à l'orientation des courants :

$$-i_2 = \frac{1/(2R)}{1/R + 1/(2R)} \times i = \frac{1}{3}i = \frac{E}{8R}.$$

.....

Fiche n° 4. Étude des circuits électriques II

Réponses

4.1 ..... ⓑ

4.2 a) ..... $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L'\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

4.2 b) ..... $L + L'$

4.2 c) ..... $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u}{L} + \dfrac{u}{L'}$

4.2 d) ..... $\dfrac{LL'}{L + L'}$

4.3 L

4.4 a) ..... $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C'}\right) i$

4.4 b) ..... $\dfrac{CC'}{C + C'}$

4.4 c) ..... $i = (C + C')\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

4.4 d) ..... $C + C'$

4.5 ..... ⓐ

4.6 ..... $\dfrac{C}{2}$

4.7 a) ..... ⓒ

4.7 b) ..... ⓐ

4.8 ..... ⓑ

4.9 a) ..... ⓒ et ⓓ

4.9 b) ..... ⓐ et ⓒ

4.9 c) ..... ⓑ

4.9 d) ..... ⓐ, ⓒ et ⓓ

4.9 e) ..... ⓐ, ⓑ et ⓒ

4.10 a) 0

4.10 b) ..... E

4.10 c) ..... $\dfrac{E}{R}$

4.10 d) ..... E

4.10 e) ..... $\dfrac{E}{R}$

4.11 a) 0

4.11 b) 0

4.11 c) ..... $\dfrac{2E}{3R}$

4.11 d) ..... $\dfrac{1}{3}E$

4.12 a) ..... $\dfrac{L}{R}$

4.12 b) ..... $\dfrac{RC}{2}$

4.13 a) ..... $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$

4.13 b) ..... $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}u_C = \dfrac{1}{RC}E$

4.13 c) ..... $\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}i(t) = 0$

4.13 d) ..... $i = \dfrac{u}{R} + C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

4.13 e) ..... $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2}{RC}u = \dfrac{E}{RC}$

4.14 a) ..... $u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$

4.14 b) ..... $i(t) = \dfrac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$

4.14 c) ..... $u_C(t) = \dfrac{1}{2}E$

4.15 a) ..... ⓑ

4.15 b) ..... ⓒ

4.15 c) ..... ⓐ

4.15 d) ..... $4\,\text{V}$

4.15 e) ..... $4\,\text{V}$

4.15 f) ..... $1{,}3\,\text{k}\Omega$

4.16 a) ..... $[\omega_0] = T^{-1}$

4.16 b) ..... Q est sans dimension

4.16 c) ..... $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

4.16 d) ..... $R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

4.17 a) ..... $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = \dfrac{E}{LC}$

4.17 b) ..... $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = 0$

4.18 a) ..... $E \times (1 - \cos(\omega_0 t))$

4.18 b) ..... $\dfrac{E}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

4.19 a) ..... ⓑ

4.19 b) ..... ⓒ

4.19 c) ..... ⓑ

4.19 d) ..... ⓐ

4.19 e) ..... $1{,}2 \times 10^3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Corrigés

4.1 L'intensité est une succession de droites. Sa dérivée est donc constante par morceaux (et non définie au niveau de la discontinuité). Si le dipôle se comportait comme une bobine, la tension devrait être constante par morceaux ce qui n'est pas ce que l'on observe. Il ne s'agit donc pas d'une bobine.

.....

4.2 a) En vertu de la loi d'additivité des tensions, on a $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L'\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

.....

4.2 b) On peut donc écrire $u = L_{\text{eq}}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ à condition de poser $L_{\text{eq}} = L + L'$.

.....

4.2 c) En vertu de la loi des nœuds, on a $i = i_L + i_{L'}$ ce qui donne après dérivation $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u}{L} + \dfrac{u}{L'}$.

.....

4.2 d) On peut écrire $u = L_{\text{eq}}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ à condition de poser

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L} + \frac{1}{L'} \quad \text{soit} \quad L_{\text{eq}} = \frac{LL'}{L+L'}.$$

.....

4.3 On commence par regrouper les deux bobines en parallèle. On obtient alors $L_1 = \dfrac{L \times L}{L+L} = \dfrac{L}{2}$. Cette bobine se retrouve alors en série avec la première d'où $L_{\text{eq}} = \dfrac{L}{2} + \dfrac{L}{2} = L$.

.....

4.4 a) En vertu de la loi d'additivité des tensions, on a $u = u_C + u_{C'}$. Après dérivation par rapport au temps, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C'}\right)i$.

.....

4.4 b) On peut donc écrire $i = C_{\text{eq}} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ à condition de poser

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \quad \text{soit} \quad C_{\text{eq}} = \frac{CC'}{C + C'}.$$

.....

4.4 c) En vertu de la loi des nœuds, on a $i = i_C + i_{C'} = (C + C')\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

.....

4.4 d) On peut écrire $i = C_{\text{eq}} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ à condition de poser $C_{\text{eq}} = C + C'$.

.....

4.5 Si le dipôle est un condensateur alors l'intensité est proportionnelle à la dérivé de la tension. La tension est constituée d'une droite croissante, puis d'une droite décroissante de pente opposée et enfin d'une parabole de type $at^2 + bt + c$ avec $a > 0$. Si l'on dérive la tension on obtient alors une constante positive, puis une constante opposée et enfin une droite croissante $(at + b)$. C'est bien ce que l'on observe.

Notez que la tension est continue ce qui est le propre d'un condensateur.

.....

4.6 On commence par regrouper les deux condensateurs en parallèle. On obtient alors $C_1 = C/2 + C/2 = C$. Ce condensateur se retrouve alors en série avec le premier d'où $C_{\text{eq}} = \dfrac{C \times C}{C + C} = C/2$.

.....

4.7 a) En régime stationnaire, on a $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$ d'où $i = 0$. Cela correspond à la relation constitutive de l'interrupteur ouvert, qui ne laisse pas passer le courant.

.....

4.7 b) En régime stationnaire, on a $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ d'où $u_L = 0$ ce qui correspond à la relation constitutive de l'interrupteur fermé.

.....

4.8 En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. L'ampoule A_1 est court-circuitée et ne brille pas. Le courant dans la branche du condensateur est nul : l'ampoule A_3 est éteinte. Reste l'ampoule A_2 dont la tension à ses bornes est E : elle brille donc.

.....

4.9 a) La tension aux bornes du condensateur est toujours continue ; de plus, la tension d'un interrupteur fermé est nulle, donc toujours continue.

.....

4.9 b) Du fait de la présence de la bobine, l'intensité i du courant électrique est une grandeur continue. Vu que $u_R = Ri$, c'est aussi le cas de la grandeur u_R.

.....

4.9 c) Du fait de la présence du condensateur, la tension u_C est une grandeur continue. En revanche i est discontinue : sa valeur passe de $i(0^-) = 0$ à $i(0^+) = E/R$. Par conséquent $u_R = Ri$ est également discontinue.

.....

4.9 d) Le courant i circulant à travers une bobine est continu. On en déduit que $u_R = Ri$ est aussi continu. De plus, la tension u_C, aux bornes du condensateur est aussi continue. Seule la tension aux bornes de la bobine peut présenter une discontinuité.

.....

4.9 e) Les courants i et i_2 sont continus car ces courants traversent une bobine. Ainsi, d'après la loi des nœuds, le courant i_1 l'est également.

La tension u est celle aux bornes du condensateur donc continue (la présence de la bobine en parallèle n'y change rien). Finalement, la tension u_L ne l'est pas car $u_L(0^-) = 0$ (régime stationnaire) et $u_L(0^+) = E$ (loi des mailles).

.....

4.10 a) À $t = 0^-$, l'interrupteur K est ouvert donc $i(0^-) = 0$. De plus, ce courant circulant dans une bobine, il est continu, d'où finalement $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

.....

4.10 b) La tension u_L n'est pas nécessairement une grandeur continue, il convient alors d'appliquer la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ d'où $E = Ri(0^+) + u_L(0^+)$.

De plus, on a par continuité du courant (bobine dans la branche) $i(0^-) = i(0^+) = 0$ car K est initialement ouvert. On en déduit finalement que $u_L(0^+) = E - R \times 0 = E$.

.....

4.10 c) Le courant i n'est pas nécessairement une grandeur continue car il n'y a pas de bobine dans la branche. On applique alors la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ d'où $E = Ri(0^+) + u_C(0^+)$.

Or, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur) puis $u_C(0^+) = 0$ car ce dernier est initialement déchargé. On en déduit finalement que $i(0^+) = E/R$.

.....

4.10 d) La tension u_R n'est pas nécessairement continue. On applique alors la loi des mailles (maille de gauche) à l'instant $t = 0^+$ d'où $E = u_R(0^+) + u(0^+)$.

Or, la tension u est à la fois celle du résistor mais aussi du condensateur car ces dipôles sont placés en parallèle. On en déduit que $u(0^+) = u(0^-)$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur) puis $u(0^+) = 0$ car ce dernier est initialement déchargé d'où finalement $u_R(0^+) = E$.

.....

4.10 e) On applique la loi des nœuds à l'instant $t = 0^+$ d'où $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$.

De plus, on a $i_2(0^+) = u(0^+)/R = 0$ et $i(0^+) = u_R(0^+)/R = E/R$ d'après la question précédente. On en déduit finalement que $i_1(0^+) = E/R$.

.....

4.11 a) La tension u aux bornes du condensateur est continue. De plus, on a $u(0^-) = 0$ car le condensateur est initialement déchargé. On en déduit que $u(0^+) = 0$.

.....

4.11 b) Pour le condensateur, on a à l'instant $t = 0^+$, $i_1(0^+) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$. Il convient alors de trouver l'expression de ce courant.

La loi des nœuds indique que $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$. Or, on a $i(0^+) = i(0^-) = 0$ par continuité du courant circulant dans la bobine, et du fait de l'ouverture de K pour $t < 0$. De plus, on a $i_2(0^+) = 2u(0^+)/R = 0$. On en déduit que $i_1(0^+) = 0$ et donc que $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$.

.....

4.11 c) En régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. La loi des mailles indique alors $E = Ri(+\infty) + \dfrac{R}{2}i(+\infty)$ d'où au final $i(+\infty) = \dfrac{2E}{3R}$. Ce résultat aurait aussi pu être obtenu à l'aide d'un schéma équivalent.

.....

4.11 d) En régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. On observe alors un pont diviseur de tension formé par les deux résistors restants.

On en déduit $u(+\infty) = \dfrac{R/2}{R+R/2}E = \dfrac{1}{3}E$.

.....

4.12 a) On écrit l'équation sous sa forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$. Ainsi, on identifie $\tau = L/R$.

.....

4.12 b) De la même manière, l'équation mise sous forme canonique est $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2}{RC}i = \dfrac{E}{RC}$, d'où $\tau = \dfrac{RC}{2}$.

.....

4.13 a) Le circuit ne peut être simplifié davantage. Il convient alors d'appliquer la loi des mailles $E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ puis de mettre cette équation sous la forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$.

.....

4.13 b) Le circuit ne peut être simplifié davantage. Il convient alors d'appliquer la loi des mailles $E = Ri + u_C$. L'équation constitutive du condensateur indique $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ d'où en combinant avec la loi des mailles

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C.$$

On en déduit sa forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}u_C = \dfrac{1}{RC}E$.

.....

4.13 c) La loi des mailles indique que $E = Ri + u_C$. Cette fois-ci, il faut garder i et remplacer u_C. Cependant, la relation constitutive du condensateur fait apparaître la dérivée temporelle de cette tension.

Il convient alors de dériver l'équation obtenue à l'aide de la loi des mailles et d'écrire $R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$. Finalement, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}i = 0$.

.....

4.13 d) Le circuit comporte deux mailles indépendantes mais ne peut pas être simplifié. Il convient alors de faire particulièrement attention aux indices et variables utilisées pour les différents courants et tensions.

La loi des nœuds indique que $i = i_1 + i_2$ avec $i_2 = u/R$ et $i_1 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On obtient alors en combinant ces résultats l'équation $i = \dfrac{u}{R} + C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

.....

4.13 e) La loi des nœuds ayant déjà été appliquée, il convient d'appliquer la loi des mailles pour la petite maille de gauche ; on en déduit $E = Ri + u$. On combine alors ce résultat avec celui de la question précédente pour obtenir que $E = u + RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$ et au final $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2}{RC}u = \dfrac{E}{RC}$.

.....

4.14 a) Cherchons une solution particulière constante. On trouve $u_\mathrm{p} = E$. La solution générale est donc de la forme $A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$. La condition initiale donne $u_C(0) = 0 = A + E$ soit $A = -E$. Finalement, $u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$.

.....

4.14 b) Ici, l'équation différentielle est homogène (sans second membre). La solution est de la forme $A\mathrm{e}^{-t/\tau}$. La condition initiale donne $i(0) = E/R = A$. Finalement, $i(t) = \dfrac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

.....

4.14 c) Cherchons une solution particulière constante. On trouve $u_\text{p} = \frac{1}{2}E$. La solution générale est donc de la forme $A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{1}{2}E$. La condition initiale donne $u(0) = \frac{1}{2}E = A + \frac{1}{2}E$ soit $A = 0$. Finalement, $u_C(t) = \frac{1}{2}E$.

.....

4.15 d) La courbe 2, associée à l'expression de u_1, possède une asymptote horizontale d'expression $u_1(+\infty) = E_1$. On en déduit $E_1 = 4\,\text{V}$ par lecture graphique.

.....

4.15 e) La courbe 3, associée à l'expression de u_2, possède une valeur initiale $u_2(0^+) = \frac{1}{2}E_2$. On en déduit $E_2 = 4\,\text{V}$ par lecture graphique. On peut vérifier que l'asymptote donne $u_2(+\infty) = E_2 = 4\,\text{V}$.

.....

4.15 f) La courbe 1, associée à l'expression de $i(t)$, a pour ordonnée à l'instant initial $i(0^+) = 3\,\text{mA} = \dfrac{E_1}{R}$ donc on a $R = E_1/i(0^+) \simeq 1{,}3\,\text{k}\Omega$.

.....

4.16 a) On a dans le membre de gauche de l'équation d'ordre 2 : $\left[\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right] = \left[\omega_0^2\right][x]$ donc $[x]T^{-2} = \left[\omega_0^2\right][x]$. Finalement, on a $[\omega_0] = T^{-1}$.

.....

4.16 b) On a dans le membre de gauche de l'équation d'ordre 2 : $\left[\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right] = \left[\dfrac{\omega_0}{Q}\right]\left[\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]$ donc $[x]T^{-2} = T^{-1}\dfrac{[x]}{[Q]T}$. Finalement, on a $[Q] = 1$; donc, Q est sans dimension.

.....

4.17 a) La loi des mailles indique que $E = Ri + u + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. De plus, la relation constitutive du condensateur donne que $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On en déduit que

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = \frac{E}{LC}.$$

.....

4.17 b) La loi des nœuds donne $i = i_1 + i_2$. Cependant, la relation constitutive de la bobine fait intervenir $\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$. On dérive alors la loi des nœuds puis on la combine avec les relations constitutives des deux dipôles de droite pour obtenir $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{u}{L}$.
La loi des mailles (petite maille de gauche) indique ensuite que $E = Ri + u$. On dérive cette relation pour faire apparaître la dérivée temporelle du courant puis on combine avec l'expression de cette dernière. D'où

$$0 = RC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

On en déduit finalement son expression canonique $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = 0$.

.....

4.18 a) Cherchons une solution particulière constante (comme le second membre). On trouve $u_\text{p} = E$. La solution générale est de la forme $A\cos(\omega_0 t + \varphi) + E$. Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} u_C(0) &= A\cos(\varphi) + E = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) &= -A\omega_0\sin(\varphi) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = -E. \end{cases}$$

On en déduit que $u_C(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))$.

.....

4.18 b) La solution est de la forme $A\cos(\omega_0 t+\varphi) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$. Appliquons les conditions initiales :

$$\begin{cases} i(0) & = a = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) & = b\omega_0 = \dfrac{E}{L} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{E}{L\omega_0}. \end{cases}$$

On en déduit que $i(t) = \dfrac{E}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)$.

.....

4.19 a) Le facteur de qualité est inférieur à 1/2 pour la courbe 3. De plus, il est sensiblement égal au nombre d'oscillations observables dans le cas du régime pseudo-périodique. On observe environ dix oscillations pour la courbe 2 et six pour la courbe 1. La courbe 2 possède donc le facteur de qualité le plus grand.

.....

4.19 b) La fonction $u_1(t)$ ne contient pas de grandeurs circulaires ($\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$) et évolue de $u_1(0) = a - b$ vers $u_1(+\infty) = 0$. Cela correspond à la courbe 3.

.....

4.19 c) La tension $u_2(t)$ présente des oscillations amorties et tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Seule la courbe 2 vérifie ces propriétés.

.....

4.19 d) On a $\lim\limits_{t\to+\infty} u_3(t) = E$. Seule la courbe 1 présente une asymptote horizontale d'ordonnée non nulle.

.....

4.19 e) On détermine la pseudo période T en mesurant la durée correspondant à 10 oscillations : $10T \simeq 52\,\mathrm{ms}$ d'où $T \simeq 5{,}2\,\mathrm{ms}$. On en déduit $\Omega = 2\pi/T \simeq 1{,}2\times10^3\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

.....

Fiche n° 5. Étude des filtres

Réponses

5.1 a) $\boxed{\sqrt{a^2+b^2}}$

5.1 b) $\boxed{b/a}$

5.1 c) $\boxed{\text{e}}$

5.1 d) $\boxed{\text{f}}$

5.2 a) $\boxed{R}$

5.2 b) $\boxed{0}$

5.2 c) $\boxed{L\omega}$

5.2 d) $\boxed{\pi/2}$

5.2 e) $\boxed{\dfrac{1}{C\omega}}$

5.2 f) $\boxed{-\pi/2}$

5.3 a) $\boxed{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}$

5.3 b) $\boxed{\dfrac{R\mathrm{j}L\omega}{R+\mathrm{j}L\omega}}$

5.3 c) $\boxed{\dfrac{R\mathrm{j}L\omega}{R+\mathrm{j}L\omega-RLC\omega^2}}$

5.3 d) $\boxed{\dfrac{R\left(1-LC\omega^2\right)}{1-LC\omega^2+\mathrm{j}RC\omega}}$

5.4 $\boxed{\text{a}}$

5.5 a) $\boxed{10\,\text{kHz}}$

5.5 b) $\boxed{2{,}5\,\text{V}}$

5.6 $\boxed{\text{d}}$

5.7 a) $\boxed{\dfrac{1}{2}\cos(a+b)+\dfrac{1}{2}\cos(a-b)}$

5.7 b) $\boxed{\begin{aligned}&S_0\cos(2\pi f_p t)\\&+\frac{mS_0}{2}\Big(\cos(2\pi(f_p+f_0)t)\\&+\cos(2\pi(f_p-f_0)t)\Big)\end{aligned}}$

5.7 c) $\boxed{S_0}$

5.7 d) $\boxed{mS_0/2}$

5.7 e) $\boxed{mS_0/2}$

5.7 f) $\boxed{\text{a}}$

5.8 a) $\boxed{\text{c}}$

5.8 b) $\boxed{\text{a}}$

5.8 c) $\boxed{\text{d}}$

5.8 d) $\boxed{\text{b}}$

5.9 a) $\boxed{\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3\mathrm{j}RC\omega}+\frac{\mathrm{j}RC\omega}{3}}}$

5.9 b) $\boxed{1/3}$

5.9 c) $\boxed{1/3}$

5.9 d) $\boxed{2{,}1\times10^4\,\text{rad/s}}$

5.10 a) $\boxed{\underline{i}_1+\underline{i}_2}$

5.10 b) $\boxed{\underline{u}(2+\mathrm{j}RC\omega)-\underline{u}_s}$

5.10 c) $\boxed{\dfrac{1}{1+3\mathrm{j}RC\omega-(RC\omega)^2}}$

5.10 d) $\boxed{1}$

5.10 e) $\boxed{\dfrac{1}{RC}}$

5.10 f) $\boxed{1/3}$

5.11 a) $\boxed{9{,}5\,\text{dB}}$

5.11 b) $\boxed{20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}$

5.11 c) $\boxed{10\log\left(1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)}$

5.11 d) ..... $\boxed{10\log\left(9+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$

5.11 e) .... $\boxed{20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)-10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)}$

5.11 f) ..... $\boxed{20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)+10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)}$

5.12 a) ..... $\boxed{0}$

5.12 b) ..... $\boxed{\pi/2}$

5.12 c) ..... $\boxed{\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}$

5.12 d) ..... $\boxed{-\arctan\left(\frac{\omega}{3\omega_0}\right)}$

5.12 e) ..... $\boxed{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}$

5.12 f) ..... $\boxed{\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}$

5.13 a) ..... $\boxed{\pi/4}$

5.13 b) ..... $\boxed{0}$

5.13 c) ..... $\boxed{\frac{\pi}{2}}$

5.14 a) ..... $\boxed{1}$

5.14 b) ..... $\boxed{1/\sqrt{2}}$

5.14 c) ..... $\boxed{1/4}$

5.15 a) ..... $\boxed{-28{,}0\,\text{dB}}$

5.15 b) ..... $\boxed{-17{,}1\,\text{dB}}$

5.15 c) ..... $\boxed{-8{,}0\,\text{dB}}$

5.15 d) ..... $\boxed{+20\,\text{dB/décade}}$

5.16 a) ..... $\boxed{15{,}0\,\text{kHz}}$

5.16 b) ..... $\boxed{11{,}7\,\text{kHz}}$

5.16 c) ..... $\boxed{19{,}2\,\text{kHz}}$

Corrigés

5.1 a) En multipliant les deux expressions de $\underline{Z}$ par leur conjugué complexe, on obtient :

$$\underline{Z} \times \underline{Z}^* = (a + \mathrm{j}b)(a - \mathrm{j}b) = Z_0^2(\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi))(\cos(\varphi) - \mathrm{j}\sin(\varphi))$$

Après calcul, cette relation se réduit à $a^2 + b^2 = Z_0^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$. Ainsi, on a $Z_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

.....

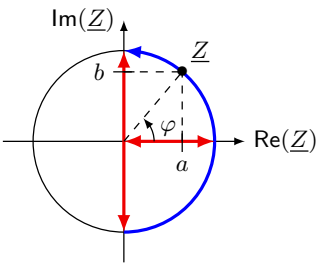
5.1 b) En égalant les parties réelles et imaginaires des deux expressions de $\underline{Z}$, on obtient :

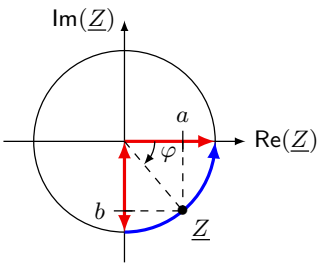
$$a = Z_0\cos(\varphi) \quad \text{et} \quad b = Z_0\sin(\varphi).$$

Ainsi, on a $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{Z_0}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{Z_0}$. Puis, $\tan(\varphi) = \dfrac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \dfrac{b}{Z_0}\dfrac{Z_0}{a}$. Donc, on a $\tan(\varphi) = \dfrac{b}{a}$.

.....

5.1 c) On utilise une représentation géométrique du nombre complexe $\underline{Z}$. L'axe des abscisses et des ordonnées du plan complexe correspondent respectivement à la partie réelle et la partie imaginaire de $\underline{Z}$. L'argument φ est l'angle entre l'axe des abscisses et la droite passant par le centre du cercle et $\underline{Z}$.





On constate que si $a \geqslant 0$ alors φ est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

De la même manière, on constate que si $a > 0$ et $b \leqslant 0$ alors φ est compris entre $-\pi/2$ exclu ($a > 0$) et 0 inclus.

.....

5.2 a) On a $Z_0 = \sqrt{R^2 + 0} = R$.

.....

5.2 b) On a $\tan(\varphi) = \dfrac{0}{R} = 0$. Donc, $\varphi = \arctan\left(\dfrac{0}{R}\right) = 0$.

.....

5.2 c) On a $Z_0 = \sqrt{0 + (L\omega)^2} = L\omega$.

.....

5.2 d) On a $\tan(\varphi) = \dfrac{L\omega}{0} \to +\infty$. Donc, $\varphi = \arctan\left(\dfrac{L\omega}{0}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

.....

5.2 e) On a $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} = -\mathrm{j}\dfrac{1}{C\omega}$. Donc, $Z_0 = \sqrt{0 + \left(-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2} = \dfrac{1}{C\omega}$.

.....

5.2 f) On a $\tan(\varphi) = -\dfrac{1}{C\omega}\dfrac{1}{0} \to -\infty$. Donc, $\varphi = \arctan\left(-\dfrac{1}{C\omega}\dfrac{1}{0}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

.....

5.3 a) On a $\underline{Z}_{\mathrm{AB}} = R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$.

.....

5.3 b) Les deux dipôles sont associés en parallèle, nous devons sommer les admittances :

$$\underline{Y}_{\text{AB}} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L = \frac{1}{R} + \frac{1}{\text{j}L\omega} = \frac{R + \text{j}L\omega}{R\text{j}L\omega}.$$

Nous en déduisons alors l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{\text{AB}} = \dfrac{R\text{j}L\omega}{R + \text{j}L\omega}$.

.....

5.3 c) Les trois dipôles sont associés en parallèle, nous devons sommer leurs admittances :

$$\underline{Y}_{\text{AB}} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{\text{j}L\omega} + \text{j}C\omega = \frac{R + \text{j}L\omega - RLC\omega^2}{R\text{j}L\omega}.$$

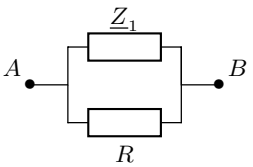
Nous en déduisons alors l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{\text{AB}} = \dfrac{R\text{j}L\omega}{R + \text{j}L\omega - RLC\omega^2}$.

.....

5.3 d) On commence par considérer un circuit équivalent au circuit donné.

Le circuit donné est équivalent au schéma ci-contre, où on a

$$\underline{Z}_1 = \text{j}L\omega + \frac{1}{\text{j}C\omega} = \frac{1 - LC\omega^2}{\text{j}C\omega}.$$



L'admittance du dipôle est donc

$$\underline{Y}_{\text{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{R + \underline{Z}_1}{R \times \underline{Z}_1} = \left(R + \frac{1 - LC\omega^2}{\text{j}C\omega}\right) \frac{1}{R\frac{1-LC\omega^2}{\text{j}C\omega}} = \frac{1 - LC\omega^2 + \text{j}RC\omega}{R(1 - LC\omega^2)}.$$

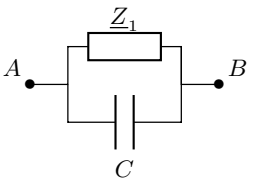
Nous en déduisons alors l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{\text{AB}} = \dfrac{R\big(1 - LC\omega^2\big)}{1 - LC\omega^2 + \text{j}RC\omega}$.

.....

5.4 On commence par considérer un circuit équivalent au circuit donné.

C'est le circuit ci-contre, avec $\underline{Z}_1 = R + \text{j}L\omega$. Ainsi, l'admittance équivalente est :

$$\underline{Y}_{\text{AB}} = \text{j}C\omega + \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{\text{j}C\omega \times \underline{Z}_1 + 1}{\underline{Z}_1} = \frac{1 - LC\omega^2 + \text{j}RC\omega}{R + \text{j}L\omega}.$$



Nous en déduisons alors l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{\text{AB}} = \dfrac{R + \text{j}L\omega}{1 - LC\omega^2 + \text{j}RC\omega}$.

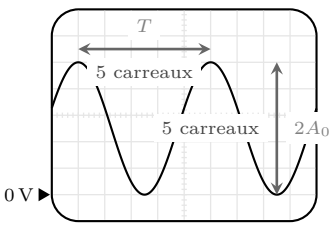
.....

5.5 a)

La période du signal est sur 5 carreaux. La base de temps indique 20 µs/division.

$$T = 5 \times 20 \times 10^{-6}\ \text{s} \quad \text{soit} \quad T = 1 \times 10^{-4}\ \mu\text{s}.$$

La fréquence du signal observé est donc $f_0 = \dfrac{1}{T} = 10\,\text{kHz}$.



base de temps : 20 µs/division
calibre vertical : 1 V/division

.....

5.5 b) Nous avons 5 carreaux pour la double amplitude, soit $2U_0 = 5 \times 1 = 5\,\text{V}$. Donc, on a $U_0 = 2{,}5\,\text{V}$.

.....

5.7 a) On calcule $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$ et on en déduit la formule

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b).$$

.....

5.7 b) On calcule :

$$\begin{aligned} s(t) &= S_0\cos(2\pi f_p t)(1 + m\cos(2\pi f_0 t)) = S_0\cos(2\pi f_p t) + mS_0\cos(2\pi f_p t)\cos(2\pi f_0 t) \\ &= S_0\cos(2\pi f_p t) + \frac{mS_0}{2}\Big(\cos\big(2\pi(f_p+f_0)t\big) + \cos\big(2\pi(f_p-f_0)t\big)\Big). \end{aligned}$$

.....

5.7 c) La composante de fréquence f_p de $s(t)$ est $S_0\cos(2\pi f_p t)$, son amplitude est donc de S_0.

.....

5.7 d) La composante de fréquence $f_p + f_0$ de $s(t)$ est $\dfrac{mS_0}{2}\cos(2\pi(f_p+f_0)t)$, son amplitude est donc de $\dfrac{mS_0}{2}$.

.....

5.7 e) La composante de fréquence $f_p - f_0$ de $s(t)$ est $\dfrac{mS_0}{2}\cos(2\pi(f_p-f_0)t)$, son amplitude est donc de $\dfrac{mS_0}{2}$.

.....

5.8 a) Nous notons la somme de 3 fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 1 kHz, 3 kHz et 5 kHz. Les spectres (a) et (d) ne peuvent pas convenir.

De plus, la valeur moyenne de $s_1(t)$ est nulle. Le spectre (c) est donc à associer à $s_1(t)$.

.....

5.8 b) Nous notons la somme de 3 fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 2 kHz, 4 kHz et 6 kHz. Les spectres (b) et (c) ne peuvent pas convenir.

De plus, la valeur moyenne de $s_2(t)$ est égale à 1 V. Le spectre (a) est donc à associer à $s_2(t)$.

.....

5.8 c) Nous notons la somme de 3 fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 2 kHz, 4 kHz et 6 kHz. Les spectres (b) et (c) ne peuvent pas convenir.

De plus, la valeur moyenne de $s_3(t)$ est nulle. Le spectre (d) est donc à associer à $s_3(t)$.

.....

5.8 d) Nous notons la somme de 3 fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 1 kHz, 3 kHz et 5 kHz. Les spectres (a) et (d) ne peuvent pas convenir.

De plus, la valeur moyenne de $s_4(t)$ est égale à 1 V. Le spectre (b) est donc à associer à $s_4(t)$.

.....

5.9 a) À l'aide d'un pont diviseur de tension, on constate que $\underline{u}_s = \underline{u}_e\dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}\,\frac{1}{R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}} = \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}\,\frac{1+\mathrm{j}RC\omega}{3R + \mathrm{j}R^2C\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} \\ &= \frac{R}{3R + \mathrm{j}\big(R^2C\omega - \frac{1}{C\omega}\big)} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \mathrm{j}\frac{1}{3}\big(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\big)}. \end{aligned}$$

.....

5.9 b) Par identification dans l'expression de $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$ trouvée précédemment avec la forme canonique, nous en déduisons que $H_0 = \dfrac{1}{3}$.

.....

5.9 c) Par identification dans l'expression de $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$ trouvée précédemment avec la forme canonique, nous en déduisons que $Q = \dfrac{1}{3}$.

.....

5.9 d) Par identification de l'expression de $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$ trouvée précédemment avec la forme canonique, nous en déduisons que $x = RC\omega$ donc que $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$. L'application numérique donne

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1\times10^3\,\Omega\times47\times10^{-9}\,\mathrm{F}} = 2{,}1\times10^4\,\mathrm{rad/s}.$$

.....

5.10 a) D'après la loi des noeuds $\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2$.

.....

5.10 b) En multipliant la réponse précédente par la résistance R, on obtient $R\underline{i} = R\underline{i}_1 + R\underline{i}_2$.
Ainsi, d'après les trois égalités, on a

$$\underline{u}_e - \underline{u} = \underline{u} - \underline{u}_s + \mathrm{j}RC\omega\underline{u} \qquad \text{donc} \qquad \underline{u}_e = \underline{u}(2+\mathrm{j}RC\omega) - \underline{u}_s.$$

.....

5.10 c) En utilisant la réponse précédente et en exprimant $\underline{u}$ à partir de la relation donnée, il vient que

$$\underline{u}_e = \underline{u}_s(1+\mathrm{j}RC\omega)(2+\mathrm{j}RC\omega) - \underline{u}_s = \underline{u}_s\big(1+3\mathrm{j}RC\omega - (RC\omega)^2\big).$$

Ainsi, on a $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \dfrac{1}{1+3\mathrm{j}RC\omega-(RC\omega)^2}$.

.....

5.10 d) En comparant les deux égalités

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1+\frac{\mathrm{j}x}{Q}-x^2} \qquad \text{et} \qquad \underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+3\mathrm{j}RC\omega-(RC\omega)^2}$$

on trouve $H_0 = 1$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0} = RC\omega$ donc $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $Q = \dfrac{1}{3}$.

.....

5.11 a) On a $G_{\mathrm{dB}_1} = 20\log(\|3\|) = 20\log(3) = 9{,}5\,\mathrm{dB}$.

.....

5.11 b) On a $G_{\mathrm{dB}_2} = 20\log\left(\left|\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right|\right) = 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$.

.....

5.11 c) On calcule

$$G_{\mathrm{dB}_3} = 20\log\left(\left|1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}\right|\right) = 20\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\right) = 20\log\left(\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= 20\times\frac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) = 10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right).$$

.....

5.11 d) On a

$$G_{\mathrm{dB}_4} = 20\log(|\underline{H}_1 - \underline{H}_2|) = 20\log\left(\left|3 - \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right|\right) = 20\log\left(\sqrt{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = 10\log\left(9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right).$$

.....

5.11 e) On calcule

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{dB}_5} &= 20\log\left(\left|\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}\right|\right) = 20\log\left(\frac{|\underline{H}_2|}{|\underline{H}_3|}\right) = 20\log(|\underline{H}_2|) - 20\log(|\underline{H}_3|) = G_{\mathrm{dB}_2} - G_{\mathrm{dB}_3} \\ &= 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right). \end{aligned}$$

.....

5.11 f) On calcule

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{dB}_6} &= 20\log(|\underline{H}_2 \times \underline{H}_3|) = 20\log(|\underline{H}_2| \times |\underline{H}_3|) = 20\log(|\underline{H}_2|) + 20\log(|\underline{H}_3|) = G_{\mathrm{dB}_2} + G_{\mathrm{dB}_3} \\ &= 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right). \end{aligned}$$

.....

5.12 a) On a $\varphi_1 = \arg(\underline{H}_1) = \arctan\left(\dfrac{\mathsf{Im}(\underline{H}_1)}{\mathsf{Re}(\underline{H}_1)}\right) = \arctan\left(\dfrac{0}{3}\right) = \arctan(0) = 0.$

.....

5.12 b) On a $\varphi_2 = \arg(\underline{H}_2) = \arctan\left(\dfrac{\mathsf{Im}(\underline{H}_2)}{\mathsf{Re}(\underline{H}_2)}\right) = \arctan\left(\dfrac{\frac{\omega}{\omega_0}}{0}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}.$

.....

5.12 c) On a $\varphi_3 = \arg(\underline{H}_3) = \arctan\left(\dfrac{\mathsf{Im}(\underline{H}_3)}{\mathsf{Re}(\underline{H}_3)}\right) = \arctan\left(\dfrac{\frac{\omega}{\omega_1}}{1}\right) = \arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right).$

.....

5.12 d) On a $\varphi_4 = \arg(\underline{H}_1 - \underline{H}_2) = \arg\left(3 - \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) = \arctan\left(\dfrac{-\frac{\omega}{\omega_0}}{3}\right) = \arctan\left(-\dfrac{\omega}{3\omega_0}\right) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{3\omega_0}\right).$

.....

5.12 e) On a $\varphi_5 = \arg\left(\dfrac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}\right) = \arg(\underline{H}_2) - \arg(\underline{H}_3) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right).$

.....

5.12 f) On a $\varphi_6 = \arg(\underline{H}_2 \times \underline{H}_3) = \arg(\underline{H}_2) + \arg(\underline{H}_3) = \dfrac{\pi}{2} + \arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right).$

.....

5.13 a) Notons que $x = \dfrac{\omega}{\omega_0} > 0$. Ainsi, on a

$$\varphi = \arg(\underline{H}(\mathrm{j}\omega)) = \arg\left(\frac{\mathrm{j}x}{1 + \mathrm{j}x}\right) = \arg(\mathrm{j}x) - \arg(1 + \mathrm{j}x) = \arctan\left(\frac{x}{0}\right) - \arctan\left(\frac{x}{1}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Pour $x = 1$, on obtient $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(1) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.

.....

5.13 b) On a vu précédemment que $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$, ainsi pour $\omega \gg \omega_0$, soit $x \to +\infty$, il vient que

$$\varphi = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

.....

5.13 c) On a vu précédemment que $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$, ainsi pour $\omega \ll \omega_0$, soit $x \to 0$, il vient que

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

.....

5.14 a) Pour $x = 1$, $\underline{H}(\mathrm{j}x) = \dfrac{1-\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}}$, donc $G(x) = \left|\dfrac{1-\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}}\right| = \dfrac{|1-\mathrm{j}|}{|1+\mathrm{j}|} = \dfrac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1+1}} = 1.$

.....

5.14 b) Pour $x = 1$, $\underline{H}(\mathrm{j}x) = -\dfrac{\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}}$, donc $G(x) = \left|-\dfrac{\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}}\right| = \dfrac{|\mathrm{j}|}{|1+\mathrm{j}|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

.....

5.14 c) Pour $x = 1$ et $m = 2$, $\underline{H}(\mathrm{j}x) = \dfrac{1}{1+4\mathrm{j}+(\mathrm{j})^2} = \dfrac{1}{4\mathrm{j}}$, donc $G(x) = \left|\dfrac{1}{4\mathrm{j}}\right| = \dfrac{|1|}{|4\mathrm{j}|} = \dfrac{1}{4}.$

.....

5.15 a) On a $G_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(\dfrac{0{,}04}{1}\right) = -28{,}0\,\mathrm{dB}.$

.....

5.15 b) On a $G_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(\dfrac{0{,}14}{1}\right) = -17{,}1\,\mathrm{dB}.$

.....

5.15 c) On a $G_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(\dfrac{0{,}4}{1}\right) = -8{,}0\,\mathrm{dB}.$

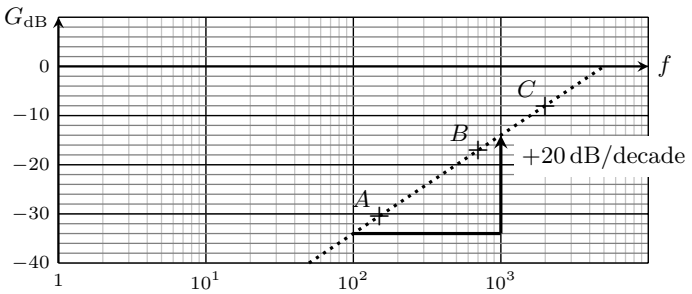
.....

5.15 d) Si on mène l'application numérique, la pente a de la droite est

$$a = \frac{G_{\mathrm{dB}}(\mathrm{C}) - G_{\mathrm{dB}}(\mathrm{A})}{\log(f(\mathrm{C})) - \log(f(\mathrm{A}))} = \frac{-8{,}0\,\mathrm{dB} + 28{,}0\,\mathrm{dB}}{\log(2000) - \log(200)} = 20\,\mathrm{dB}.$$

Donc, le gain du filtre augmente de 20 dB lorsque $\log(f)$ augmente d'une unité, soit lorsque la fréquence f est multipliée par 10, soit lorsque f augmente d'une décade.

La pente de la droite (AC) observée sur le graphe est bien de +20 dB/décade.



.....

5.16 a) Nous observons un maximum pour $x = 1$. Nous en déduisons que $f_{\mathrm{r}} = f_0 = 15{,}0\,\mathrm{kHz}$.

.....

5.16 b) La courbe de gain est maximale pour $x = 1$. Nous pouvons relever $G_{\mathrm{dB\ max}} = -2\,\mathrm{dB}$.

Aux fréquences de coupures, le gain doit vérifier $G_{\mathrm{dB}}(x_{\mathrm{c}}) = G_{\mathrm{dB\ max}} - 3\,\mathrm{dB} = -5\,\mathrm{dB}$.

La première valeur de x_{c} collectée sur le graphique est $x_{\mathrm{c1}} = 0{,}78$, elle correspond à une fréquence de coupure $f_{\mathrm{c1}} = 0{,}78 \times f_0 = 11{,}7\,\mathrm{kHz}$.

.....

5.16 c) La seconde valeur de x_{c} collectée sur le graphique est $x_{\mathrm{c2}} = 1{,}28$, elle correspond à une fréquence de coupure $f_{\mathrm{c2}} = 1{,}28 \times f_0 = 19{,}2\,\mathrm{kHz}$.

.....

Fiche n° 6. Énergie et puissance électriques

Réponses

6.1 a) ..... $\boxed{16{,}5\,\text{kJ}}$

6.1 b) ..... $\boxed{4{,}6\,\text{W}\cdot\text{h}}$

6.2 a) ..... $\boxed{513\,\text{km}}$

6.2 b) ..... $\boxed{\text{Hyundai Ioniq 6}}$

6.2 c) ..... $\boxed{\text{Hyundai Ioniq 6}}$

6.3 a) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

6.3 b) ..... $\boxed{\text{(c)}}$

6.3 c) ..... $\boxed{\text{(c)}}$

6.4 ..... $\boxed{3{,}75\,\text{W}}$

6.5 a) ..... $\boxed{\dfrac{2\pi}{\omega}}$

6.5 b) ..... $\boxed{\dfrac{u_0 i_0}{2}}$

6.5 c) ..... $\boxed{\dfrac{u_0 i_0}{2}\cos(\varphi)}$

6.5 d) ..... $\boxed{u_0 i_0\left(2+\dfrac{1}{2}\sin(\psi)\right)}$

6.6 a) ..... $\boxed{0}$

6.6 b) ..... $\boxed{0}$

6.6 c) ..... $\boxed{3\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\text{W}}$

6.6 d) ..... $\boxed{16\,\text{W}}$

6.7 a) ..... $\boxed{\dfrac{E}{r+R}}$

6.7 b) ..... $\boxed{E^2\dfrac{R}{(r+R)^2}}$

6.8 a) ..... $\boxed{E^2\dfrac{r-R}{(r+R)^3}}$

6.8 b) ..... $\boxed{\text{(b)}}$

6.9 ..... $\boxed{\ln(2)R_0}$

6.10 a) ..... $\boxed{\dfrac{E-e}{R+r}}$

6.10 b) ..... $\boxed{\dfrac{eR+Er}{R+r}}$

6.10 c) ..... $\boxed{E\dfrac{E-e}{R+r}}$

6.10 d) ..... $\boxed{\dfrac{(E-e)^2}{R+r}}$

6.10 e) ..... $\boxed{e\dfrac{E-e}{R+r}}$

6.10 f) ..... $\boxed{\dfrac{e}{E}}$

6.10 g) ..... $\boxed{92\,\%}$

6.11 a) ..... $\boxed{\text{(c)}}$

6.11 b) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

6.12 a) ..... $\boxed{\text{(b)}}$

6.12 b) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

6.13 a) ..... $\boxed{\dfrac{CE^2}{\tau}\exp(-t/\tau)}$

6.13 b) ..... $\boxed{\dfrac{CE^2}{\tau}\exp(-2t/\tau)}$

6.13 c) ..... $\boxed{\dfrac{CE^2}{\tau}\Big(\exp(-t/\tau)-\exp(-2t/\tau)\Big)}$

6.13 d) ..... $\boxed{CE^2}$

6.13 e) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}CE^2}$

6.13 f) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}CE^2}$

6.14 a) ..... $\boxed{EC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}$

6.14 b) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right)}{\mathrm{d}t}}$

6.14 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right)}{\mathrm{d}t}}$

6.14 d) ..... $\boxed{CE^2}$

6.14 e) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}CE^2}$

6.14 f) ..... $\boxed{0}$

6.14 g) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}CE^2}$

6.15 a) ..... $\boxed{R_u I^2}$

6.15 b) ..... $\boxed{\dfrac{E}{\sqrt{(R_G+R_u)^2+(X_G+X_u)^2}}}$

6.15 c) .... $\boxed{-R_u E^2 \dfrac{2(X_G+X_u)}{\Big((R_G+R_u)^2+(X_G+X_u)^2\Big)^2}}$

6.15 d) ..... $\boxed{E^2 \dfrac{(R_G^2-R_u^2)+(X_G+X_u)^2}{\Big((R_G+R_u)^2+(X_G+X_u)^2\Big)^2}}$

6.15 e) ..... $\boxed{\text{c}}$

Corrigés

6.1 a) L'énergie contenue dans la batterie vaut $E = P\Delta t$ où $P = 5\,\mathrm{W}$ et $\Delta t = 55\,\mathrm{min} = 55 \times 60\,\mathrm{s} = 3\,300\,\mathrm{s}$. L'énergie vaut donc $E = 5 \times 3\,300\,\mathrm{J} = 16{,}5\,\mathrm{kJ}$.

.....

6.1 b) L'énergie contenue dans la batterie vaut $E = 16{,}5\,\mathrm{kJ}$. Par ailleurs, $e = 1\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{h}$ est l'énergie consommée à une puissance de 1 W pendant 1 h, soit $e = 1\,\mathrm{W} \times 3\,600\,\mathrm{s} = 3{,}6\,\mathrm{kJ}$.

On a donc $E = \dfrac{16{,}5\,\mathrm{kJ}}{3{,}6\,\mathrm{kJ}} \times 1\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{h} = 4{,}6\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{h}$.

.....

6.2 a) L'énergie contenue dans la batterie vaut $E = 77{,}4\,\mathrm{kW}\cdot\mathrm{h}$.

La consommation moyenne valant $C = 15{,}1\,\mathrm{kWh/100km}$, l'autonomie en kilomètres vaut

$$\frac{E}{C} = \frac{77{,}4\,\mathrm{kW}\cdot\mathrm{h}}{15{,}1\,\mathrm{kWh/100km}} = 513\,\mathrm{km}.$$

.....

6.2 b) En reprenant le calcul de la question précédente, $e = 1\,\mathrm{W/h} = 3{,}6\,\mathrm{kJ}$, donc l'énergie totale stockée dans les batteries des voitures de série vaut en Joule $E = 77{,}4 \times 10^3 \times 3{,}6 \times 10^3\,\mathrm{J} = 279\,\mathrm{MJ}$. C'est donc la voiture de série qui possède la batterie de plus grande capacité.

.....

6.2 c) La puissance en cv du moteur de la voiture électrique de série vaut $\mathcal{P} = 239/0{,}735\,\mathrm{cv} = 325\,\mathrm{cv}$.

.....

6.3 a) La puissance reçue par la résistance s'écrit $\mathcal{P} = \dfrac{u^2}{R}$. Ici, on a donc

$$\mathcal{P} = \frac{9}{10}\sin^2(\omega t) = \frac{9}{20}\big(1-\cos(2\omega t)\big).$$

La puissance a donc une valeur moyenne de $\dfrac{9}{20}$, une valeur maximale de $\dfrac{9}{10}$ et une période $T = 0{,}5\,\mathrm{s}$.

C'est la réponse (a) qui est la bonne.

.....

6.3 b) Commençons par linéariser l'expression de la puissance. On a

$$\mathcal{P}(t) = \frac{u^2}{R} = \frac{1}{10}\big(1+2\cos(\omega t)\big)^2 = \frac{1}{10}\big(1+4\cos^2(\omega t)+4\cos(\omega t)\big)$$
$$= \frac{1}{10}\big(3+2\cos(2\omega t)+4\cos(\omega t)\big).$$

On constate que la puissance est maximale à $t=0$. De plus, la composante fondamentale de ce signal est de période égale à $T_{\text{fondamental}} = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\,\text{s}$. Finalement, comme $u(t)$ s'annule (par exemple en $\omega t = \dfrac{\pi}{3}$), la puissance s'annule aussi.

Il n'y a qu'une courbe qui vérifie ces conditions : c'est la (c) qui est la bonne.

.....

6.3 c) La puissance a pour expression $\mathcal{P} = \dfrac{u^2}{R} = \dfrac{9}{10}\exp\Big(-\dfrac{2t}{\tau}\Big)$. On a donc

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{\tau}\frac{9}{10}\exp\Big(-\frac{2t}{\tau}\Big) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}(t)}{\mathrm{d}t}(t=0) = -\frac{2}{\tau}\frac{9}{10} = -\frac{9}{10}\,\text{W}\cdot\text{s}^{-1}.$$

En exploitant la pente à l'origine, on trouve que c'est la réponse (c) qui est la bonne.

.....

6.4 On lit graphiquement une période de $T = 3\,\text{ms}$ et un décalage temporel $\Delta t = 0{,}5\,\text{ms}$ entre les deux signaux. Le déphasage est donc $\varphi = 2\pi\dfrac{\Delta t}{T} = \dfrac{\pi}{3}$ rad. Donc, $\cos(\varphi) = \dfrac{1}{2}$.

Les amplitudes de la tension et de l'intensité sont respectivement $U_0 = 3\,\text{V}$ et $I_0 = 5\,\text{A}$. La puissance moyenne vaut donc $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \dfrac{1}{2}3\,\text{V}\times 5\,\text{A}\times\dfrac{1}{2} = 3{,}75\,\text{W}$.

.....

6.5 b) On a $\mathcal{P}(t) = u_0 i_0\cos^2(\omega t+\psi) = \dfrac{u_0 i_0}{2}\Big(1+\cos(2\omega t+2\psi)\Big)$.

On intègre :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\times\frac{u_0 i_0}{2}\int_0^T 1+\cos(2\omega t+2\psi)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{T}\times\frac{u_0 i_0}{2}\Big[t+\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t+2\psi)\Big]_0^T = \frac{u_0 i_0}{2}.$$

On peut retenir la propriété $\big\langle\cos^2(\omega t+\psi)\big\rangle = \big\langle\sin^2(\omega t+\psi)\big\rangle = \dfrac{1}{2}$.

.....

6.5 c) On a $\mathcal{P}(t) = u_0 i_0\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi) = \dfrac{u_0 i_0}{2}[\cos(\varphi)+\cos(2\omega t+\varphi)]$.

On vérifie ensuite que

$$\langle\cos(2\omega t+\varphi)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T\cos(2\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\omega T}\Big[\sin(2\omega t+\varphi)\Big]_0^T = 0.$$

Donc, on a $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \dfrac{u_0 i_0}{2}\cos(\varphi)$.

.....

6.5 d) La puissance peut se décomposer en plusieurs termes :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t) &= u_0 i_0 (1+\cos(\omega t))(2+\sin(\omega t+\psi)) \\ &= u_0 i_0 (2+2\cos(\omega t)+\sin(\omega t+\psi)+\cos(\omega t)\sin(\omega t+\psi)) \\ &= u_0 i_0 \Big(2+2\cos(\omega t)+\sin(\omega t+\psi)+\cos(\omega t)\cos\Big(\omega t+\psi-\frac{\pi}{2}\Big)\Big)\end{aligned}$$

On peut alors séparer les calculs de valeurs moyennes :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{moy}} &= u_0 i_0 \Big(2+2\langle\cos(\omega t)\rangle+\langle\sin(\omega t+\psi)\rangle+\Big\langle\cos(\omega t)\cos\Big(\omega t+\psi-\frac{\pi}{2}\Big)\Big\rangle\Big) \\ &= u_0 i_0 \Big(2+\frac{1}{2}\cos\Big(\psi-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) \\ &= u_0 i_0 \Big(2+\frac{1}{2}\sin(\psi)\Big).\end{aligned}$$

6.6 a) On a $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\big(jC\omega|\underline{u}|^2\big) = 0.$

6.6 b) On a $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\big(jL\omega|\underline{i}|^2\big) = 0.$

6.6 c) Commençons par réécrire $\underline{u}$ et $\underline{i}$:

$$\underline{u} = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{j}{\sqrt{2}}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = 2\Big(\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\pi/4)}$$

$$\underline{i} = 3\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\pi/3)}.$$

On en déduit $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\big(6\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\pi/4)}\times\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\pi/3)}\big) = 3\operatorname{Re}\big(\mathrm{e}^{-j(\pi/3+\pi/4)}\big) = 3\cos\Big(\frac{7\pi}{12}\Big)\,\mathrm{W}.$

6.6 d) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{moy}} &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\big(4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\pi/4)}\times(3-5j)\mathrm{e}^{-j\omega t}\big) = 2\sqrt{2}\operatorname{Re}\big((3-5j)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}\big) \\ &= 2\sqrt{2}\Big(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}}\Big) = 16\,\mathrm{W}.\end{aligned}$$

6.7 a) La loi des mailles permet d'écrire $E = u_r + u_R = rI + RI = (r+R)I$. On a donc $I = \dfrac{E}{r+R}$.

6.7 b) La puissance dissipée dans le conducteur ohmique de résistance R vaut $\mathcal{P} = u_R I = RI^2 = E^2\dfrac{R}{(r+R)^2}$.

6.8 a) Il faut dériver la fonction $\mathcal{P}(R)$. On calcule

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}R} = E^2\frac{1\times(r+R)^2 - R\times 2(r+R)}{(r+R)^4} = E^2(r+R)\frac{(r+R)-2R}{(r+R)^4}$$

soit finalement

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}R} = E^2(r+R)\frac{r-R}{(r+R)^4} = E^2\frac{r-R}{(r+R)^3}.$$

6.8 b) Il faut annuler la dérivée pour trouver l'extremum de $\mathcal{P}(R)$. Comme $\mathcal{P}(R)$ est positive et vaut 0 en $R = 0$ et en $R \to \infty$, alors cet extremum est un maximum. On a alors, par annulation du numérateur $R_{\max} = r$.

.....

6.9 Si on a $R = 2R_0$, alors on a $\mathrm{e}^{r/R_0} = 2$ et donc $r/R_0 = \ln(2)$. Finalement, on a $r = \ln(2)R_0$.

.....

6.10 a) On applique la loi des mailles $E - U_R - u_r - e = 0$. On a donc $E - e = (R + r)I$, et donc $I = \dfrac{E - e}{R + r}$.

.....

6.10 b) La batterie est en convention récepteur donc on a

$$U = e + rI = e + r\frac{E - e}{R + r} = \frac{eR + er + rE - re}{R + r} = \frac{eR + Er}{R + r}.$$

.....

6.10 c) La puissance fournie par le chargeur vaut $\mathcal{P} = EI = E\dfrac{E - e}{R + r}$.

.....

6.10 d) La puissance est dissipée par effet Joule dans les deux conducteurs ohmiques et vaut donc

$$\mathcal{P}_J = RI^2 + rI^2 = (R + r)\left(\frac{E - e}{R + r}\right)^2 = \frac{(E - e)^2}{R + r}.$$

.....

6.10 e) La puissance reçue par la batterie vaut $\mathcal{P} = eI = e\dfrac{E - e}{R + r}$ car elle est en convention récepteur.

.....

6.10 f) En suivant la définition de l'énoncé, on trouve

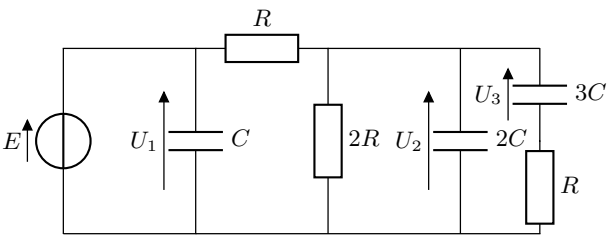
$$\eta = \frac{e\frac{E-e}{R+r}}{E\frac{E-e}{R+r}} = \frac{e}{E}.$$

.....

6.10 g) Numériquement, on calcule $\eta = 12/13 = 92\,\%$.

.....

6.11 a) On fait le schéma



En régime permanent, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts :

$$U_1 = E \quad U_2 = U_3 = \frac{2}{3}E$$

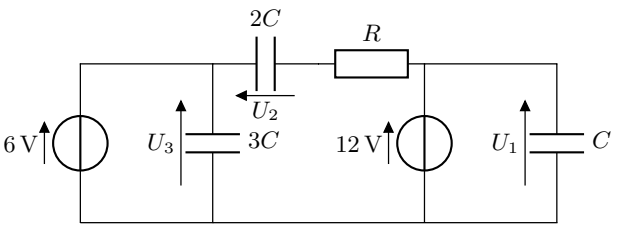
les énergies stockées dans les condensateurs sont alors :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}CE^2 \quad \mathcal{E}_2 = \frac{4}{9}CE^2 \quad \mathcal{E}_3 = \frac{3}{2}C\left(\frac{4}{9}E^2\right) = \frac{2}{3}CE^2$$

on a alors $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_3$. C'est la réponse (c) qui est la bonne.

.....

6.11 b) On fait le schéma



En régime permanent, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts :

$$U_1 = 12\,\text{V} \quad U_2 = -6\,\text{V} \quad U_3 = 6\,\text{V}$$

les énergies stockées dans les condensateurs est alors :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}C(12)^2 = 72C \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}\times 2C(6)^2 = 36C \quad \mathcal{E}_3 = \frac{1}{2}\times 3C(6)^2 = 54C$$

on a alors $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_3 > \mathcal{E}_2$. C'est la réponse (a) qui est la bonne.

.....

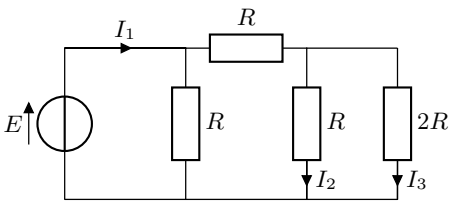
6.12 a) L'énergie stockée dans les différentes bobines est :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}L(4)^2 = 8L \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}\times 2L(3)^2 = 9L \quad \mathcal{E}_3 = \frac{1}{2}\times 3L(1)^2 = \frac{3}{2}L$$

donc $\mathcal{E}_3 < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$. C'est la réponse (b) qui est la bonne.

.....

6.12 b) Les bobines se comportent comme des fils en régime permanent. Le montage se simplifie alors :



En calculant les résistances équivalentes, on peut déterminer les valeurs des courants :

$$I_1 = \frac{8E}{5R}, \qquad I_2 = \frac{2}{3}\Big(\frac{3E}{5R}\Big) = \frac{2E}{5R} \qquad \text{et} \qquad I_3 = \frac{1}{3}\Big(\frac{3E}{5R}\Big) = \frac{E}{5R}.$$

Ainsi les énergies stockées dans les bobines sont :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}L\Big(\frac{8E}{5R}\Big)^2 = \frac{32}{25}\frac{LE^2}{R^2} \qquad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}\times 2L\Big(\frac{2E}{5R}\Big)^2 = \frac{4}{25}\frac{LE^2}{R^2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_3 = \frac{1}{2}\times 3L\Big(\frac{E}{5R}\Big)^2 = \frac{3}{50}\frac{LE^2}{R^2}.$$

On a $\mathcal{E}_3 < \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$: c'est la réponse (a) qui est la bonne.

.....

6.13 a) La puissance instantanée délivrée par la source vaut

$$\mathcal{P}_E(t) = Ei(t) = E\times\frac{CE}{\tau}\exp(-t/\tau) = \frac{CE^2}{\tau}\exp(-t/\tau).$$

.....

6.13 b) La puissance dissipée par effet Joule l'est dans la résistance et vaut donc

$$\mathcal{P}_J(t) = Ri^2(t) = \frac{R(CE)^2}{\tau^2}\exp(-2t/\tau).$$

En simplifiant à l'aide de la relation $\tau = RC$, on trouve $\mathcal{P}_J(t) = \dfrac{CE^2}{\tau}\exp(-2t/\tau)$.

.....

6.13 c) La puissance instantanée reçue par le condensateur vaut

$$\mathcal{P}_C(t) = u_C(t)i(t) = E(1-\exp(-t/\tau)) \times \frac{CE}{\tau}\exp(-t/\tau) = \frac{CE^2}{\tau}\Big(\exp(-t/\tau) - \exp(-2t/\tau)\Big).$$

Remarquons que par conservation de la puissance, cette dernière expression peut s'obtenir en faisant la différence entre les deux précédentes, la puissance reçue par le condensateur étant égale à la puissance fournie par la source de tension dont on a retranché la puissance dissipée dans le conducteur ohmique. C'est un bon moyen de contrôler le résultat.

.....

6.13 d) Il faut intégrer la puissance $\mathcal{P}_E(t)$ fournie par la source sur toute la durée de la charge du condensateur, c'est à dire de $t = 0$ à $t = +\infty$. On a donc

$$\mathcal{E}_E = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathcal{P}_E(t)\ \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{CE^2}{\tau}\exp(-t/\tau)\,\mathrm{d}t = (-\tau)\frac{CE^2}{\tau}\Big[\exp(-t/\tau)\Big]_0^{+\infty} = CE^2.$$

Remarquons que cette expression est homogène à l'énergie contenue dans un condensateur $\dfrac{1}{2}Cu_C^2$.

.....

6.13 e) Il faut intégrer la puissance $\mathcal{P}_J(t)$ sur tout le temps de la charge du condensateur, de $t = 0$ à $t = +\infty$:

$$\mathcal{E}_J = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathcal{P}_J(t)\ \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{CE^2}{\tau}\exp(-2t/\tau)\,\mathrm{d}t = \frac{CE^2}{\tau}\Big(-\frac{\tau}{2}\Big)\Big[\exp(-2t/\tau)\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}CE^2.$$

.....

6.13 f) Il faut intégrer la puissance $\mathcal{P}_C(t)$ sur tout le temps de la charge du condensateur, c'est à dire de $t = 0$ à $t = +\infty$. On a donc

$$\mathcal{E}_C = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathcal{P}_C(t)\ \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{CE^2}{\tau}(\exp(-t/\tau) - \exp(-2t/\tau))\,\mathrm{d}t.$$

On reconnaît les deux intégrales précédentes donc

$$\mathcal{E}_C = (-\tau)\frac{CE^2}{\tau}\Big[\exp(-t/\tau)\Big]_0^{+\infty} - \frac{CE^2}{\tau}\Big(-\frac{\tau}{2}\Big)\Big[\exp(-2t/\tau)\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}CE^2.$$

Alternativement, on aurait pu effectuer le calcul suivant :

$$\mathcal{E}_C = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathcal{P}_C(t)\ \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=+\infty} u_C i\ \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=+\infty} u_C \cdot C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathrm{d}\Big(\frac{1}{2}Cu_C^2\Big)$$

pour trouver

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}C\Big(u_C^2(+\infty) - u_C^2(0)\Big) = \frac{1}{2}CE^2,$$

qui est le même résultat.

Remarquons que par conservation de l'énergie, cette dernière expression peut s'obtenir en faisant la différence entre les deux précédentes, l'énergie reçue par le condensateur étant égale à l'énergie fournie par la source de tension dont on a retranché l'énergie dissipée dans le conducteur ohmique. C'est un bon moyen de contrôler le résultat.

.....

6.14 a) La puissance instantanée délivrée par le source de tension s'écrit $\mathcal{P}_E(t) = Ei(t) = EC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

.....

6.14 b) La puissance instantanée reçue par le condensateur s'écrit

$$\mathcal{P}_C(t) = u_C(t)i(t) = u_C(t)C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right)}{\mathrm{d}t}.$$

.....

6.14 c) La puissance instantanée reçue par la bobine s'écrit $\mathcal{P}_L(t) = u_L(t)i(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i(t) = \dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right)}{\mathrm{d}t}$.

.....

6.14 d) On intègre la puissance $\mathcal{P}_E(t)$ sur tout le temps de la charge du condensateur, de $t = 0$ à $t = +\infty$:

$$\mathcal{E}_E = \int_{t=0}^{t=+\infty} EC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = CE\int_{t=0}^{t=+\infty}\mathrm{d}u_C = CE\big(u_C(t=+\infty) - u_C(t=0)\big) = CE^2.$$

.....

6.14 e) On intègre la puissance $\mathcal{P}_C(t)$ sur tout le temps de la charge du condensateur, de $t = 0$ à $t = +\infty$:

$$\mathcal{E}_C = \int_{t=0}^{t=+\infty}\mathcal{P}_C(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=+\infty}\mathrm{d}\Big(\frac{1}{2}Cu_C^2\Big) = \frac{1}{2}C\big({u_C}^2(+\infty) - {u_C}^2(0)\big) = \frac{1}{2}CE^2.$$

.....

6.14 f) On intègre la puissance $\mathcal{P}_L(t)$ sur tout le temps de la charge du condensateur, de $t = 0$ à $t = +\infty$:

$$\mathcal{E}_L = \int_{t=0}^{t=+\infty}\mathcal{P}_L(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=+\infty} d\Big(\frac{1}{2}Li^2\Big) = \frac{1}{2}L(i^2(+\infty) - i^2(0)) = 0.$$

.....

6.14 g) Il faudrait intégrer la puissance dissipée par effet Joule $\mathcal{P}_J(t) = Ri^2(t)$ sur tout le temps de la charge du condensateur, de $t = 0$ à $t = +\infty$. Mais, on n'a pas accès à l'expression de $i(t)$. On peut alors malgré tout se servir de la conservation de l'énergie :

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_E - \mathcal{E}_C - \mathcal{E}_L = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2 - 0 = \frac{1}{2}CE^2.$$

.....

6.15 a) On a

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\big((R_u + jX_u)I\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\cdot I\sqrt{2}\mathrm{e}^{-j(\omega t+\varphi)}\big) = \mathrm{Re}(R_u + jX_u)I^2 = R_uI^2.$$

.....

6.15 b) La loi des mailles donne :

$$\begin{aligned}\underline{e_G} &= \big(\underline{Z_G} + \underline{Z_u}\big)\underline{i}\\ \text{donc } E\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} &= [R_G + R_u + j(X_G + X_u)]I\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\\ \text{donc } E &= [R_G + R_u + j(X_G + X_u)]I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}.\end{aligned}$$

En prenant le module, on obtient

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2}}.$$

.....

6.15 c) En reportant l'expression de I obtenue dans celle de $\mathcal{P}_m$ on retrouve l'expression donnée dans l'énoncé :

$$\mathcal{P}_m = \frac{R_u E^2}{(R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2}.$$

La fonction dont il faut calculer la dérivée est du type $\mathcal{P}_m(X_u) = \dfrac{1}{f(X_u)}$. La dérivée sera donc du type

$$\frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial X_u} = -\frac{f'(X_u)}{(f(X_u))^2}.$$

Finalement, on calcule :

$$\frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial X_u} = -R_u E^2 \frac{2(X_G + X_u)}{\Big((R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2\Big)^2}.$$

.....

6.15 d) La fonction dont il faut calculer la dérivée est du type $\mathcal{P}_m(R_u) = \dfrac{f(R_u)}{g(R_u)}$, la dérivée sera donc du type

$$\frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial R_u} = \frac{f'(R_u)g(R_u) - f(R_u)g'(R_u)}{(g(R_u))^2}.$$

Ainsi, on calcule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial R_u} &= E^2 \frac{(R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2 - 2R_u(R_G + R_u)}{\Big((R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2\Big)^2} \\
&= E^2 \frac{R_G^2 + R_u^2 + 2R_G R_u + (X_G + X_u)^2 - 2R_u^2 - 2R_u R_G}{\Big((R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2\Big)^2} \\
&= E^2 \frac{(R_G^2 - R_u^2) + (X_G + X_u)^2}{\Big((R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2\Big)^2}.
\end{aligned}$$

.....

6.15 e) On cherche pour quelles valeurs de R_u et X_u les deux dérivées partielles de $\mathcal{P}_m$ sont nulles.

On a $\dfrac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial X_u} = 0$ pour $X_u + X_G = 0$ soit $X_u = -X_G$.

On aura alors $\dfrac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial R_u} = E^2 \dfrac{(R_G^2 - R_u^2)}{\Big((R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2\Big)^2}$. Alors, on a $\dfrac{\partial \mathcal{P}_m}{\partial R_u} = 0$ pour $R_G = R_u$.

Mathématiquement, on pourrait avoir comme solution $R_G = R_u$ ou $R_G = -R_u$. Ainsi, la solution (a) pourrait aussi être considérée comme correcte. Mais, en physique, on a nécessairement $R_G \geqslant 0$ et $R_u \geqslant 0$.

.....

Fiche n° 7. Amplificateurs linéaires intégrés

Réponses

7.1 ..... ⓐ ⓓ

7.2 a) ..... Vrai

7.2 b) ..... Vrai

7.2 c) ..... Faux

7.2 d) ..... Faux

7.3 a) ..... Oui

7.3 b) ..... $V^+ = V^-$

7.3 c) ..... 0 V

7.4 a) ..... 0 V

7.4 b) ..... v_s

7.4 c) ..... 0 V

7.4 d) ..... v_e

7.4 e) ..... v_s

7.5 a) ..... Faux

7.5 b) ..... Vrai

7.5 c) ..... Faux

7.5 d) ..... Vrai

7.5 e) ..... Faux

7.6 a) ..... $i_1 = i_2$

7.6 b) ..... $U_1 = v_e$

7.6 c) ..... $U_2 = -v_s$

7.6 d) ..... $i_1 = \dfrac{v_e}{R_1}$

7.6 e) ..... $i_2 = -\dfrac{v_s}{R_2}$

7.6 f) ..... $G = -\dfrac{R_2}{R_1}$

7.6 g) ..... ⓑ

7.7 ..... ⓒ

7.8 ..... c'est un temps

7.9 a) ..... Non

7.9 b) ..... v_e

7.9 c) ..... v_s

7.9 d) ..... $i_R = i_C$

7.9 e) ..... $\underline{i_C} = -\mathrm{j}C\omega\underline{U_C}$

7.9 f) ..... $-\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$

7.9 g) ..... $RC\dfrac{dv_s}{dt} = -v_e(t)$

7.10 a) ..... $\dfrac{1}{RC\omega}$

7.10 b) ..... $\dfrac{\pi}{2}$

7.10 c) ..... $-\dfrac{E}{RC\omega}\sin(\omega t)$

7.10 d) ..... 1 kHz

7.10 e) 3,1

7.10 f) ..... ⓑ

7.11 a) ..... $RC\dfrac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = -v_e$

7.11 b) ..... $-\dfrac{E}{RC}t + K$

7.11 c) ..... ⓑ

7.12 a) ..... $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$

7.12 b) ..... $\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$

7.12 c) ..... $R_1 = R_2$

7.12 d) ..... $\alpha = 1$

7.13 a) ..... $i_1 = i_2$

7.13 b) ..... $\dfrac{R_1}{R_1+R_2}v_s$

7.13 c) ..... v_e

7.13 d) ..... $1 + \dfrac{R_2}{R_1}$

7.13 e) 16

7.14 ..... ⓓ

7.15 a) ..... $v_s = v_e$

7.15 b) ..... ∞

7.15 c) ..... 0 A

7.15 d) ..... ∞

7.16 a) ..... $\dfrac{v_e}{Z_1}$

7.16 b) ..... Z_1

7.16 c) ..... ∞

7.16 d) 0

7.16 e) ..... $C = 10\,\mathrm{nF}$

Corrigés

7.1 Les circuits pouvant fonctionner en régime linéaire, sont les circuits (a) et (d). Avec une rétroaction sur la seule entrée non inverseuse, les montages (b) et (c) fonctionnent en régime saturé.

.....

7.2 a) L'impédance d'entrée d'un ALI réel est de l'ordre du MΩ (c'est-à-dire de l'ordre de $10^6\,\Omega$). Dans le cas de l'ALI idéal, l'impédance d'entrée est supposée infinie.

.....

7.2 b) Les courants d'entrée d'un ALI sont nuls dans le cadre du modèle de l'ALI idéal, ce qui est le cas ici.

.....

7.2 c) Le courant de sortie est variable et dépend de la charge du circuit à ALI.

.....

7.2 d) En régime linéaire, c'est la différence des potentiels entre les deux entrées qui est nulle : $V_+ - V_- = 0$.

.....

7.3 a) La résistance R_2 établit une rétroaction sur l'entrée inverseuse, l'ALI peut donc bien fonctionner en régime linéaire.

.....

7.3 b) Lorsqu'un ALI fonctionne en régime linéaire, on a $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$. On a donc $V^+ = V^-$.

.....

7.3 c) L'entrée non inverseuse est reliée à la masse donc $V^+ = 0$. D'après le schéma : $V_A = V^-$. Le régime linéaire donne donc $V_A = 0$.

.....

7.4 a) Le potentiel de l'entrée non inverseuse est nul et est égal au potentiel de l'entrée inverseuse en régime linéaire.

.....

7.4 c) Le potentiel de l'entrée non inverseuse est nul et est égal au potentiel de l'entrée inverseuse en régime linéaire.

.....

7.4 d) Le potentiel de l'entrée non inverseuse est v_e. Grâce au régime linéaire, on en déduit que le potentiel de l'entrée inverseuse est également v_e.

.....

7.4 e) L'entrée inverseuse est reliée à la sortie par un fil donc $V^- = v_s$. Le régime linéaire permet d'écrire $V^+ = V^-$, d'où le résultat.

.....

7.5 a) La résistance R_4 est en convention générateur. Les trois autres sont bien en convention récepteur.

.....

7.5 c) Attention à la convention choisie pour les courants sur la figure.

.....

7.5 d) On a $U_1 = v_e - V^-$ et $U_3 = v_e - V^+$. L'ALI fonctionne en régime linéaire donc $V^+ = V^-$.
Ainsi, on a bien $U_1 = U_3$.

.....

7.5 e) On a $U_4 = V^+$, mais $U_2 = V^- - v_s$.

.....

7.6 a) La loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse donne $i_1 = i^- + i_2$. L'ALI étant idéal, on a $i^- = 0$. Finalement, on a donc $i_1 = i_2$.

.....

7.6 b) D'après le schéma, on a $U_1 = v_e - V^-$. Comme l'ALI fonctionne en régime linéaire, on a $V^- = V^+ = 0$. D'où le résultat.

.....

7.6 c) D'après le schéma, on a $U_2 = V^- - v_s$. Comme l'ALI fonctionne en régime linéaire, on a $V^- = V^+ = 0$. D'où le résultat.

.....

7.6 d) La résistance R_1 est représentée en convention récepteur. On a donc $i_1 = \dfrac{U_1}{R_1}$.

.....

7.6 e) La résistance R_2 est représentée en convention récepteur. On a donc $i_2 = \dfrac{U_2}{R_2}$.

.....

7.6 f) D'après la première question, on a $i_1 = i_2$. Donc, on a $\dfrac{v_e}{R_1} = -\dfrac{v_s}{R_2}$. On en déduit le résultat.

.....

7.7 Avec la formule donnée, l'amplification du montage vaut $-\dfrac{1}{6}$: c'est un réel négatif. Les tensions v_e et v_s doivent donc être en opposition de phase, ce qui n'est pas le cas des réponses (a) et (d). Sur la figure (b), l'amplification vaut -1 alors qu'on a bien $-\dfrac{1}{6}(= 0{,}5/3)$ sur la figure (c) : seule cette dernière convient.

.....

7.8 On peut se rappeler que $\tau = RC$ est la constante de temps d'un circuit $R - C$.

.....

7.9 a) En régime constant, un condensateur est équivalent à un circuit ouvert. Il n'y a alors plus de rétroaction sur l'entrée inverseuse et l'ALI ne peut pas fonctionner en régime linéaire.

.....

7.9 b) L'ALI fonctionne en régime linéaire donc $V^- = V^+ = 0$.

.....

7.9 d) L'ALI est idéal donc $i^- = 0$. La loi des nœuds à l'entrée inverseuse donne $i_R = i_C$

.....

7.9 e) Le condensateur est représenté en convention générateur. Par conséquent, la loi d'Ohm donne

$$\underline{U_C} = -\underline{Z} \times \underline{i_C} \quad \text{avec} \quad \underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}.$$

.....

7.9 f) En combinant la loi des nœuds et la loi d'Ohm, on a $\underline{i_R} = \dfrac{\underline{v_e}}{R} = \underline{i_C} = -\mathrm{j}C\omega\underline{v_s}$.

En isolant l'expression $\dfrac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}}$, on trouve le résultat.

.....

7.9 g) À partir de l'expression de $\underline{H}$, on obtient que $\mathrm{j}RC\omega\underline{v_s} = -\underline{v_e}$.

Cette relation devient en grandeurs réelles $RC\dfrac{\mathrm{d}v_s(t)}{\mathrm{d}t} = -v_e(t)$.

.....

7.10 a) Le gain est égal au module de la fonction de transfert.

.....

7.10 b) Le déphasage demandé est égal à l'argument de la fonction de transfert. Cette dernière est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive, car $\underline{H} = -\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega} = \dfrac{j}{RC\omega}$.

.....

7.10 c) On utilise les réponses aux deux questions précédentes : l'amplitude de v_e est multipliée par le gain et le déphasage est intégré dans le cos : $v_s = \dfrac{E}{RC\omega}\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{E}{RC\omega}\sin(\omega t)$.

.....

7.10 d) Avec un calibre de 250 µs/division, on mesure une période d'1 ms. La fréquence de fonctionnement est donc d'1 kHz.

.....

7.10 e) Le module de la fonction de transfert est $\dfrac{1}{RC\omega}$. Avec les valeurs numériques fournies, on trouve $G = 3{,}1$.

.....

7.10 f) Le déphasage de v_s par rapport à v_e et de $+\dfrac{\pi}{2}$ donc la tension de sortie doit être en avance d'un quart de période sur la tension d'entrée. Les réponses (a) (tensions en phase) et (c) (tension de sortie en retard) ne sont pas compatibles. À la fréquence de fonctionnement, le gain est de 3, ce n'est pas le cas sur la réponse (d).

.....

7.11 a) La fonction de transfert fournie se met sous la forme $\mathrm{j}RC\omega\underline{v_s} = -\underline{v_e}$. Comme une multiplication par $\mathrm{j}\omega$ en notation complexe correspond à une dérivation, on en déduit l'équation différentielle.

.....

7.11 c) Une tension constante positive E s'intègre en fonction affine de pente négative $-A \cdot t + b$. Ce n'est pas le cas des réponses (c) et (d).

Pour $t \in \left[0, 500\,\mu\mathrm{s}\right]$, on lit $E = 3\,\mathrm{V}$. Avec les valeurs numériques de R et C, on trouve une pente théorique de $-8{,}0 \times 10^3\,\mathrm{V \cdot s^{-1}}$. Sur la courbe (a), on mesure une pente de $6/500 \times 10^{-6} = -12 \times 10^3\,\mathrm{V \cdot s^{-1}}$ alors qu'on a une pente de $4/500 \times 10^3 = 8{,}0 \times 10^3\,\mathrm{V \cdot s^{-1}}$ sur la courbe (b).

.....

7.12 a) On a $\dfrac{1}{G_2} = \dfrac{R_1}{R_2} + \dfrac{R_2}{R_1} = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.

.....

7.12 b) On a $\dfrac{1}{G_2} = \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1+\alpha^2}{\alpha}$. Donc, $G_2 = \dfrac{1}{\frac{1}{G_2}} = \dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$.

.....

7.12 c) On a $G_1 - G_2 = 1 - \dfrac{R_1}{R_2}$. Donc, $G_1 = G_2 \iff \dfrac{R_1}{R_2} = 1 \iff R_1 = R_2$.

.....

7.12 d) On pose $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$. On calcule $f'(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\alpha^2} = \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}$. Ainsi, on $f'(\alpha) = 0 \iff \alpha = 1$. Comme

$$f(\alpha) \xrightarrow[\alpha \to 0^+]{} +\infty \quad \text{et} \quad f(\alpha) \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} +\infty,$$

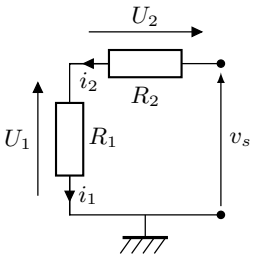
on en déduit que $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ est mininale quand $\alpha = 1$.

.....

7.13 a) L'ALI étant idéal, les courants d'entrée sont nuls. Ainsi, la loi des nœuds à l'entrée inverseuse assure que $i_1 = i_2$.

.....

7.13 b) Les deux résistances étant parcourues par le même courant, elles sont en série. Ainsi, on en déduit que le circuit équivalent est :



La formule du diviseur de tension aux bornes de R_1 donne le résultat demandé.

.....

7.13 c) L'ALI fonctionne en régime linéaire donc on a $V^+ = V^-$.

.....

7.13 d) D'après les questions précédentes, on a $v_e = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} v_s$, d'où le résultat.

.....

7.14 Le gain de l'amplificateur non inverseur vaut ici 6 : c'est un réel positif. Par conséquent, la tension de sortie doit être en phase et de plus grande amplitude que la tension d'entrée. Les réponses (a) (tensions en opposition de phase) et (c) (sortie de plus faible amplitude) sont donc exclues.

Sur la réponse (b), le gain mesuré est de 16 (8/0,5) alors qu'il est de 6 sur la réponse (d) : seule cette dernière convient.

.....

7.15 a) L'ALI fonctionne en régime linéaire donc $V^+ = V^-$.

.....

7.15 b) Les courants d'entrée de l'ALI idéal étant nuls quels que soient les potentiels des deux entrées, l'ALI se comporte comme un circuit ouvert en entrée. L'impédance d'entrée tend donc vers $+\infty$.

.....

7.15 c) Les courants d'entrée sont nuls donc $i_e = 0\,\text{A}$.

.....

7.15 d) L'impédance d'entrée du montage est ici définie par $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{v_e}}{\underline{i_e}}$. L'intensité d'entrée étant nulle, l'impédance d'entrée est infinie.

.....

7.16 a) Avec la convention choisie, on a $i_1 = \dfrac{v_e - V_A}{Z_1}$. L'ALI fonctionnant en régime linéaire, on a $V_A = 0$.

.....

7.16 b) L'impédance d'entrée du circuit est $Z_e = \dfrac{v_e}{i_1}$. D'après la question précédente, $Z_e = Z_1$.

.....

7.16 c) En régime constant, l'impédance du condensateur tend vers $+\infty$.

.....

7.16 d) En régime constant, l'impédance d'une inductance tend vers 0

.....

7.16 e) Avec le condensateur, le module de l'impédance d'entrée est $|Z_e| = \dfrac{1}{C\omega} \simeq 0{,}16 \cdot 10^5\,\Omega \simeq 16\,\text{k}\Omega$. Il est donc légèrement plus grand qu'avec la résistance.

.....

Fiche n° 8. Sources lumineuses et lois de Snell-Descartes

Réponses

8.1 a) ..... $\boxed{\frac{\pi}{180} \times \alpha_{\text{deg}}}$

8.1 b) ..... $\boxed{60 \times \alpha_{\text{deg}}}$

8.2 a) ..... $\boxed{35°39'}$

8.2 b) ..... $\boxed{1{,}715\,\text{rad}}$

8.2 c) ..... $\boxed{60°20'}$

8.3 a) ..... $\boxed{i}$

8.3 b) ..... $\boxed{\frac{\pi}{2} - i}$

8.3 c) ..... $\boxed{\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(i)\right)}$

8.3 d) .. $\boxed{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(i)\right)}$

8.4 a) ..... $\boxed{16{,}3°}$

8.4 b) ..... $\boxed{25{,}5°}$

8.4 c) ..... $\boxed{22{,}0°}$

8.5 a) ..... $\boxed{r - i}$

8.5 b) ..... $\boxed{\pi - 2i}$

8.6 a) ..... $\boxed{(\alpha_1 + \alpha_2) - \pi}$

8.6 b) ..... $\boxed{r + r'}$

8.7 a) ..... $\boxed{\text{Non}}$

8.7 b) ..... $\boxed{60°}$

8.8 a) ..... $\boxed{1{,}25}$

8.8 b) ..... $\boxed{1{,}18}$

8.8 c) ..... $\boxed{\text{Non}}$

8.9 a) ..... $\boxed{\sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta_i)}{n_1^2}}}$

8.9 b) ..... $\boxed{\cos(\theta_r) > \frac{n_2}{n_1}}$

8.9 c) .... $\boxed{\sin(\theta_i) < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$

8.10 a) ..... $\boxed{564\,\text{THz}}$

8.10 b) ..... $\boxed{3{,}74 \times 10^{-19}\,\text{J}}$

8.11 ..... $\boxed{\text{(b) et (d)}}$

8.12 a) .... $\boxed{2{,}26 \times 10^8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$

8.12 b) ..... $\boxed{400\,\text{nm}}$

Corrigés

8.2 a) On a $\alpha = 35° + 0{,}65 \times 60' = 35°39'$.

.....

8.2 b) L'angle β vaut 98° et 15 minutes d'angle, c'est-à-dire $\beta = 98 + 15/60 = 98{,}25°$.

En radians, on a $\beta = 98{,}25° \times \frac{\pi}{180°} = 1{,}715\,\text{rad}$ (on garde 4 chiffres significatifs, comme la donnée de départ).

.....

8.2 c) On a $\gamma = 1{,}053 \times \frac{180°}{\pi} = 60{,}33°$. Or, 0,33° correspondent à $0{,}33 \times 60 = 20'$. Donc $\gamma = 60°20'$.

.....

8.3 a) On a $\alpha = i$. Il s'agit de la loi de Snell-Descartes pour la réflexion.

.....

8.3 b) On a $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = i$, donc $\beta = \frac{\pi}{2} - i$.

.....

8.3 c) Loi de Snell-Descartes pour la réfraction donne : $n_1 \sin(i) = n_2 \sin(\delta)$. Donc $\delta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(i)\right)$.

.....

8.4 a) Loi de Snell Descartes pour la réfraction donne : $n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r)$. On obtient pour r :

$$r = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(i)\right) \text{ et donc } r = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}45} \times \sin(24{,}0)\right) = 16{,}3°.$$

Attention à bien régler la calculatrice en degré ou à convertir l'angle en radians.

.....

8.4 b) Si la calculatrice est réglée en degré, on a : $r = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}45}\sin(0{,}674 \times \frac{180}{\pi})\right) = 25{,}5^\circ$.

.....

8.4 c) On a $i = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin(r)\right)$ donc $i = \arcsin\left(\frac{1{,}45}{1}\sin 15{,}0\right) = 22{,}0^\circ$.

.....

8.5 a) On a $D_t = r - i$. Attention, i et r sont orientés dans le sens trigonométrique, alors que D_t est orienté dans le sens horaire.

.....

8.5 b) On a $D_r - (-i) + i = \pi$ donc $D_r = \pi - 2i$.

.....

8.6 a) On utilise le fait que la somme des angles d'un quadrilatère est égale à 2π dans OIAJ. Donc, on a

$$2\pi = A + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + (2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)) ;$$

ainsi, on a $A = (\alpha_1 + \alpha_2) - \pi$.

.....

8.6 b) On utilise le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à π dans IAJ. Donc, on obtient $\pi = A + (\frac{\pi}{2} - r) + (\frac{\pi}{2} - r')$, et ainsi $A = r + r'$.

.....

8.7 a) On a $\frac{n_1}{n_2}\sin(i) = \frac{1{,}5}{1{,}3}\sin(44^\circ) = 0{,}8 < 1$. Il existe un rayon réfracté, il n'y a donc pas réflexion totale.

.....

8.7 b) Comme n_1 est supérieur à n_2, il existe un tel angle limite, qui est $i_\ell = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}3}{1{,}5}\right) = 60^\circ$.

.....

8.8 a) D'après la loi de Snell-Descartes, on a $n_1\sin(i) = n_2\sin(r)$. Donc,

$$n_2 = n_1\frac{\sin(i)}{\sin(r)} = 1{,}37 \times \frac{\sin(20{,}0^\circ)}{\sin(22{,}0^\circ)} = 1{,}25.$$

.....

8.8 b) On observe une réflexion totale si $\frac{n_1}{n_2} \times \sin(i) > 1$ donc si $n_2 < n_1 \times \sin(i) = 1{,}37 \times \sin(60{,}0^\circ) = 1{,}18$.

.....

8.8 c) L'angle limite au-delà duquel il y a réflexion totale est $i_\ell = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$. Un milieu ne peut pas avoir un indice plus petit que 1 (cela signifierait que la lumière s'y propage plus rapidement que dans le vide, ce qui n'est pas possible). Donc, pour $n_1 = 1{,}37$, le plus petit angle limite de réflexion totale est

$$i_{\ell,min} = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}37}\right) = 46{,}9^\circ > 40{,}0^\circ.$$

Donc : non, il n'existe aucun milieu 2 qui permette d'observer une réflexion totale dans ces conditions.

.....

8.9 a) On a $\cos(\theta_r) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_r)} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta_i)}{n_1^2}}$.

.....

8.9 b) Il s'agit d'un triangle rectangle, donc $i = \frac{\pi}{2} - \theta_r$. Donc la relation équivaut à $\frac{n_1\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_r)}{n_2} > 1$, c'est-à-dire à $\frac{n_1\cos(\theta_r)}{n_2} > 1$ et donc à $\cos(\theta_r) > \frac{n_2}{n_1}$.

.....

8.9 c) On a $\sqrt{1-\dfrac{\sin^2(\theta_i)}{n_1^2}} > \dfrac{n_2}{n_1}$ donc $1-\dfrac{\sin^2(\theta_i)}{n_1^2} > \left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)^2$ dont on déduit

$$\sin^2(\theta_i) < n_1^2\left(1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right) = n_1^2 - n_2^2.$$

Ainsi, on a $\sin(\theta_i) < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

.....

8.10 a) On a $f = \dfrac{c}{\lambda_0} = \dfrac{3{,}00\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{532\,\mathrm{nm}} = 5{,}64\times10^{14}\,\mathrm{Hz} = 564\,\mathrm{THz}$.

.....

8.10 b) On a $E = hf = 6{,}63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}\times5{,}64\times10^{14}\,\mathrm{Hz} = 3{,}74\times10^{-19}\,\mathrm{J}$.

.....

8.11 Au passage d'un dioptre, la fréquence et l'énergie d'un photon sont inchangées. En revanche, la vitesse de propagation de la lumière et la longueur d'onde dépendent de l'indice optique.

.....

8.12 a) On a $v = \dfrac{c}{n} = \dfrac{3{,}00\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{1{,}33} = 2{,}26\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

.....

8.12 b) On a $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{c}{nf} = \dfrac{\lambda_0}{n} = \dfrac{532\,\mathrm{nm}}{1{,}33} = 400\,\mathrm{nm}$.

.....

Fiche n° 9. Lentilles

Réponses

9.1 a) ..... $\boxed{\arctan\left(\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}}\right)}$

9.1 b)... $\boxed{\arctan\left(\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}}\right) \times \dfrac{180}{\pi}}$

9.1 c) ..... $\boxed{0{,}52°}$

9.1 d) ..... $\boxed{0{,}53°}$

9.1 e) ..... $\boxed{\text{b}}$

9.1 f)..... $\boxed{\text{a}}$

9.2 a) ..... $\boxed{\dfrac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}}}$

9.2 b)..... $\boxed{-2}$

9.3 a)..... $\boxed{40\,\mathrm{cm}}$

9.3 b)..... $\boxed{-10\,\mathrm{cm}}$

9.3 c)..... $\boxed{-50\,\mathrm{cm}}$

9.3 d) ..... $\boxed{20\,\mathrm{cm}}$

9.4 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{A_1B_1}}{f'_1}}$

9.4 b) ..... $\boxed{\dfrac{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}{f'_2}}$

9.4 c)..... $\boxed{\dfrac{f'_1}{f'_2}}$

9.4 d)..... $\boxed{4}$

9.5 ..... $\boxed{\text{b}}$

9.6 a)..... $\boxed{\text{Correct}}$

9.6 b)..... $\boxed{\text{Incorrect}}$

9.6 c)..... $\boxed{\text{Incorrect}}$

9.6 d)..... $\boxed{\text{Correct}}$

9.7 a)..... $\boxed{5{,}0\,\mathrm{cm}}$

9.7 b)..... $\boxed{+20\ \delta}$

9.8 ..... $\boxed{\text{b}}$

9.9 a)..... $\boxed{0{,}22\,\mathrm{m}}$

9.9 b)..... $\boxed{\text{a}}$

9.10 a)..... $\boxed{\dfrac{\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OF'}}}{\overline{\mathrm{OA}} + \overline{\mathrm{OF'}}}}$

9.10 b)..... $\boxed{\dfrac{\overline{\mathrm{OA'}} \times f'}{f' - \overline{\mathrm{OA'}}}}$

9.10 c)..... $\boxed{\dfrac{\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OA}} - \overline{\mathrm{OA'}}}}$

9.10 d)..... $\boxed{\text{après}}$

9.11 a)..... $\boxed{\dfrac{-f'^2}{\overline{\mathrm{F'A'}}}}$

9.11 b)..... $\boxed{\overline{\mathrm{FA}} - f'}$

9.11 c) ..... $\boxed{\text{réel}}$

9.12 a)..... $\boxed{\text{b}}$

9.12 b)..... $\boxed{\text{b}}$

9.13 a)..... $\boxed{\overline{\mathrm{OA}} = -5{,}02\,\mathrm{cm}}$

9.13 b)..... $\boxed{10{,}8\,\mathrm{m} \times 7{,}2\,\mathrm{m}}$

9.14 a)..... $\boxed{\text{a}}$

9.14 b)..... $\boxed{\text{b}}$

9.15 a)..... $\boxed{\overline{\mathrm{OA'}} = -15\,\mathrm{cm}}$

9.15 b)..... $\boxed{\text{virtuelle}}$

9.15 c)..... $\boxed{5{,}0\,\mathrm{cm}}$

9.15 d)..... $\boxed{\text{droite}}$

9.16 a) ..... $\boxed{\dfrac{D^2 - d^2}{4D}}$

9.16 b)..... $\boxed{\dfrac{15D}{64}}$

9.16 c)..... $\boxed{0}$

Corrigés

9.1 a) Dans le triangle rectangle OAB, on a $\tan(\alpha) = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}}$. Comme l'angle α est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, on a $\alpha = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}}\right)$ pour un objet lointain.

.....

9.1 b) On effectue une conversion radian-degré du résultat précédent : $\alpha = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}}\right) \times \dfrac{180}{\pi}$.

.....

9.1 c) Dans le triangle rectangle OAB, on a $\mathrm{OA} \gg \mathrm{AB}$. Donc, on a $\alpha \approx \tan(\alpha) = \dfrac{3{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{km}}{384\,400\,\mathrm{km}} \times \dfrac{180}{\pi} = 0{,}52°$.

.....

9.1 d) Dans le triangle rectangle OAB, on a OA $\gg$ AB. Donc, on a

$$\alpha \approx \tan(\alpha) = \frac{1{,}4 \cdot 10^6\,\text{km}}{150\ 600 \cdot 10^3\,\text{km}} \times \frac{180}{\pi} = 0{,}53^\circ.$$

.....

9.1 e) Même si les valeurs ne sont pas strictement égales, elles sont proches d'un point de vue physique, l'écart relatif entre elles valant $\dfrac{\alpha_\text{S} - \alpha_\text{L}}{\alpha_\text{L}} = 1{,}9\,\%$.

Les diamètres angulaires de la Lune et du Soleil pour un observateur situé sur Terre sont proches.

.....

9.1 f) La Lune et le Soleil ont la même taille apparente sur le ciel. Si la Lune, plus proche de la Terre, se place entre la Terre et le Soleil, celle-ci va dissimuler complètement le Soleil : on parle d'éclipse solaire. Les diamètres apparents n'ont rien à voir avec l'alternance des saisons, liée à l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre, ni avec l'effet de marée, lié à l'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil sur les océans et la croûte terrestre.

.....

9.2 a) Par application du théorème de Thalès, on a $\dfrac{\overline{\text{OA}'}}{\overline{\text{OA}}} = \dfrac{\overline{\text{A}'\text{B}'}}{\overline{\text{AB}}}$.

.....

9.2 b) Par lecture graphique, on constate que $\overline{\text{OA}'} = 8$ unités horizontales et $\overline{\text{OA}} = -4$ unités horizontales. D'après la relation déterminée dans la question précédente, on a $\gamma = \dfrac{\overline{\text{A}'\text{B}'}}{\overline{\text{AB}}} = \dfrac{\overline{\text{OA}'}}{\overline{\text{OA}}} = \dfrac{8\ \text{carreaux}}{-4\ \text{carreaux}} = -2$.

.....

9.3 a) Le sens positif est le sens de propagation de la lumière. Le point F_1' est après O_1 donc $\overline{\text{O}_1\text{F}_1'} = 40\,\text{cm}$.

.....

9.3 b) Le point F_2 est en avant de O_2 donc $\overline{\text{O}_2\text{F}_2} = -10\,\text{cm}$.

.....

9.3 c) Le point O_1 est en avant de O_2 donc $\overline{\text{O}_2\text{O}_1} = -50\,\text{cm}$.

.....

9.3 d) Le point A_1 est en avant de F_2' donc $\overline{\text{A}_1\text{F}_2'} = 20\,\text{cm}$.

.....

9.4 a) Dans le triangle rectangle $\text{O}_1\text{A}_1\text{B}_1$, on a $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{A}_1\text{B}_1}{\text{O}_1\text{F}_1'}$. Comme l'objet est très éloigné, l'angle α est petit ; comme il est exprimé en radians, on peut effectuer l'approximation $\alpha \approx \tan(\alpha)$.

.....

9.4 b) Dans le triangle rectangle $\text{O}_2\text{A}_1\text{B}_1$, on a $\tan(\alpha') = \dfrac{\text{A}_1\text{B}_1}{\text{O}_2\text{F}_2'}$. Comme l'objet est très éloigné, l'angle α' est petit ; comme il est exprimé en radians, on peut effectuer l'approximation $\alpha' \approx \tan(\alpha')$.

.....

9.4 c) En utilisant les deux expressions trouvées pour α et α', on trouve

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\text{A}_1\text{B}_1}{f_2'} \times \frac{f_1'}{\text{A}_1\text{B}_1} = \frac{f_1'}{f_2'}.$$

.....

9.4 d) Graphiquement, on lit $f_1' = 16$ carreaux et $f_2' = 4$ carreaux. Donc, on a $G = \dfrac{f_1'}{f_2'} = 4$. Un objet lointain observé à travers cette lunette apparaîtra sous un diamètre 4 fois plus important qu'à l'œil nu.

.....

9.5 Pour se placer dans les conditions de Gauss (stigmatisme approché et aplanétisme), les rayons lumineux issus d'un objet doivent passer près du centre optique et être peu inclinés par rapport à l'axe optique principal.

.....

9.6 a) Ce schéma est correct car un rayon parallèle au rayon incident passant par le centre optique de la lentille sans être dévié couperait le rayon émergent dans le plan focal image de la lentille convergente.

.....

9.6 b) Ce schéma est incorrect car le foyer image F' d'une lentille convergente est situé au delà de la lentille et non en avant (par rapport au sens de propagation de la lumière). Ce schéma serait correct si la lentille était divergente.

.....

9.6 c) Ce schéma est incorrect car un rayon lumineux qui ressort d'une lentille parallèle à l'axe optique principal, a une direction incidente passant par le foyer objet F. Ce qui n'est pas le cas ici puisque le rayon incident passe par le foyer image F'.

.....

9.6 d) Ce schéma est correct car un rayon incident dont la direction passe par le foyer objet F ressort parallèle à l'axe optique de la lentille.

.....

9.7 a) On ajoute un rayon incident issu de B parallèle à l'axe optique principal et émergeant en B'.

On trouve la position du foyer image principal F' à l'intersection entre l'axe optique principal et le rayon tracé.

En mesurant la distance $\overline{OF'}$ sur le schéma et en tenant compte de l'échelle du document (8 carreaux sur le document correspondent à 10 cm en réalité), on trouve : $\overline{OF'} = 5{,}0\,\text{cm}$.

.....

9.7 b) En utilisant la définition de la vergence, on a $V = \dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{0{,}05\,\text{m}} = +20\ \delta$.

.....

9.8 Pour comparer les lentilles, il faut comparer soit leurs distances focales images f', soit leurs distances focales objets $f = -f'$, soit leurs vergences $V = \dfrac{1}{f'}$.

Remarquons que le lentille (d) est exclue d'office, car $f'_d = -8{,}0\,\text{cm} < 0$ donc il s'agit d'une lentille divergente ($f' < 0$) et non convergente ($f' > 0$).

Calculons les vergences des trois lentilles qui sont encore à considérer. On a

- pour le lentille (a) : $V_a = +8{,}0\ \delta$;
- pour la lentille (b) : $V_b = \dfrac{1}{f'_b} = \dfrac{1}{0{,}080\,\text{m}} = +12{,}5\ \delta$;
- et pour la lentille (c) : $V_c = \dfrac{1}{f'} = -\dfrac{1}{f} = -\dfrac{1}{-0{,}100\,\text{m}} = +10{,}0\ \delta$.

On a $V_b > V_c > V_a$; donc, c'est la lentille (b) qui est la plus convergente.

.....

9.9 a) On a $R = 2(n - n_{\text{air}}) \times f' = 2(n - n_{\text{air}})\dfrac{1}{V} = 2 \times (1{,}67 - 1) \times \dfrac{1}{6{,}0\,\text{m}^{-1}} = 0{,}22\,\text{m}$.

.....

9.9 b) La situation (c) est exclue d'office car l'équation n'est pas homogène (n et n_{air} sont sans dimension tandis que R est une longueur).

La situation (b) permet de déduire que $f' = \dfrac{R}{2}$, c'est-à-dire une distance finie à laquelle convergent les rayons.

La situation (a) conduit à $f' \longrightarrow +\infty$: les rayons convergent à l'infini donc ils ne sont pas déviés.

Une autre approche consiste à voir que si les indices de part et d'autre du dioptre sont identiques, il n'y a pas de déviation (loi de Snell-Descartes). Réponse : (a).

.....

9.10 a) On déduit de la relation $\dfrac{1}{\overline{\text{OA}'}} - \dfrac{1}{\overline{\text{OA}}} = \dfrac{1}{\overline{\text{OF}'}}$ que $\overline{\text{OA}'} = \dfrac{\overline{\text{OA}} \times \overline{\text{OF}'}}{\overline{\text{OA}} + \overline{\text{OF}'}}$.

.....

9.10 b) On déduit de la relation $\dfrac{1}{\overline{\text{OA}'}} - \dfrac{1}{\overline{\text{OA}}} = \dfrac{1}{\overline{\text{OF}'}}$ que $\overline{\text{OA}} = \dfrac{\overline{\text{OA}'} \times \overline{\text{OF}'}}{\overline{\text{OF}'} - \overline{\text{OA}'}}$. Ainsi, $\overline{\text{OA}} = \dfrac{\overline{\text{OA}'} \times f'}{f' - \overline{\text{OA}'}}$.

.....

9.10 c) On déduit de la relation $\dfrac{1}{\overline{\text{OA}'}} - \dfrac{1}{\overline{\text{OA}}} = \dfrac{1}{\overline{\text{OF}'}}$ que $f' = \overline{\text{OF}'} = \dfrac{\overline{\text{OA}} \times \overline{\text{OA}'}}{\overline{\text{OA}} - \overline{\text{OA}'}}$.

.....

9.10 d) On a montré que $\overline{\text{OA}'} = \dfrac{\overline{\text{OA}} \times \overline{\text{OF}'}}{\overline{\text{OA}} + \overline{\text{OF}'}}$. Or, on a $\overline{\text{OA}} = -15\,\text{cm}$ et $\overline{\text{OF}'} = 4{,}0\,\text{cm}$.

L'application numérique donne $\overline{\text{OA}'} = \dfrac{-15\,\text{cm} \times 4{,}0\,\text{cm}}{-15\,\text{cm} + 4{,}0\,\text{cm}} = 5{,}5\,\text{cm}$.

Comme $\overline{\text{OA}'} > 0$, l'image $\overline{\text{A}'\text{B}'}$ se situe après la lentille.

.....

9.11 a) On déduit de la relation $\overline{\text{F}'\text{A}'} \times \overline{\text{FA}} = -f'^2$ que $\overline{\text{FA}} = \dfrac{-f'^2}{\overline{\text{F}'\text{A}'}}$.

.....

9.11 b) D'après le relation de Chasles, on a $\overline{\text{OA}} = \overline{\text{OF}} + \overline{\text{FA}} = -f' + \overline{\text{FA}}$.

.....

9.11 c) On a montré d'une part que $\overline{\text{FA}} = \dfrac{-f'^2}{\overline{\text{F}'\text{A}'}}$ et d'autre part que $\overline{\text{OA}} = \overline{\text{OF}} + \overline{\text{FA}}$.

Les applications numériques donnent

$$\overline{\text{FA}} = \frac{-(12{,}0\,\text{cm})^2}{5{,}0\,\text{mm}} = \frac{-(0{,}120\,\text{m})^2}{5{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = -2{,}88\,\text{m} \qquad \text{et} \qquad \overline{\text{OA}} = -0{,}12\,\text{m} + (-2{,}88\,\text{m}) = -3{,}00\,\text{m}.$$

L'objet se trouve à 3 m en avant de la lentille, il s'agit donc d'un objet réel.

.....

9.12 a) Par définition du grandissement, l'image est agrandie car $|\gamma| > 1$.

.....

9.12 b) L'image est renversée car $\gamma < 0$.

.....

9.13 a) On a $\overline{\text{OA}'} = 15\,\text{m}$ et $f' = 5{,}00 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$. D'après la relation de conjugaison de Descartes, on a

$$\frac{1}{\overline{\text{OA}'}} - \frac{1}{\overline{\text{OA}}} = \frac{1}{\overline{\text{OF}'}}.$$

On en déduit que $\overline{\text{OA}} = \dfrac{\overline{\text{OA}'} \times \overline{\text{OF}'}}{\overline{\text{OF}'} - \overline{\text{OA}'}}$. Donc, on a $\overline{\text{OA}} = \dfrac{15{,}0\,\text{m} \times 5{,}00 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}{5{,}02 \cdot 10^{-2}\,\text{m} - 15\,\text{m}} = -5{,}02 \cdot 10^{-2}\,\text{m} = -5{,}02\,\text{cm}$.

.....

9.13 b) Le grandissement γ vaut

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{15\,\text{m}}{-0{,}050\ 2\,\text{m}} = -299.$$

Ainsi, la largeur de l'image sur l'écran vaut $299 \times 36 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 10{,}8\,\text{m}$. De plus, la hauteur de l'image sur l'écran vaut $299 \times 24 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 7{,}18\,\text{m}$.

Finalement, les dimensions de l'image sur l'écran sont : $10{,}8\,\text{m} \times 7{,}2\,\text{m}$.

.....

9.14 a) On sait que $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$. Ici, on a $\overline{OA} \longrightarrow -\infty$ donc $\frac{1}{\overline{OA}} \longrightarrow 0^-$. Finalement, on a $\overline{OA'} \longrightarrow \overline{OF'}$.

.....

9.14 b) On sait que $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$. Ici, on souhaite que $\overline{OA'} \longrightarrow +\infty$; donc on souhaite que $\frac{1}{\overline{OA'}} \longrightarrow 0^+$ et donc que $\overline{OA} \longrightarrow -\overline{OF'} = \overline{OF}$.

.....

9.15 a) On a $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}}$. Or, on a $\overline{OA} = -6{,}0\,\text{cm}$ et $\overline{OF'} = 10{,}0\,\text{cm}$. Donc, on a

$$\overline{OA'} = \frac{-6{,}0\,\text{cm} \times 10\,\text{cm}}{-6{,}0\,\text{cm} + 10\,\text{cm}} = -15\,\text{cm}.$$

.....

9.15 b) L'image se situe en avant de la lentille. On l'observera directement à travers la lentille, en regardant dans la direction de l'objet.

.....

9.15 c) Sa taille se calcule à l'aide de la formule du grandissement : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$. Ici, on a

$$\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \times \overline{AB} = \frac{-15\,\text{cm}}{-6{,}0\,\text{cm}} \times 2{,}0\,\text{cm} = 5{,}0\,\text{cm}.$$

.....

9.15 d) Le grandissement est positif : il s'agit d'une image droite.

.....

9.16 a) On transforme l'expression $\frac{1}{f'} = \frac{1}{\frac{D+d}{2}} - \frac{1}{\frac{-(D-d)}{2}}$ en mettant les fractions sous dénominateur commun et en isolant f'. On a

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\frac{D+d}{2}} - \frac{1}{\frac{-(D-d)}{2}} = \frac{2}{D+d} + \frac{2}{D-d} \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{f'} = \frac{2(D-d)+2(D+d)}{(D+d)(D-d)} = \frac{4D}{D^2-d^2}.$$

Finalement, on trouve $f' = \frac{D^2-d^2}{4D}$.

.....

9.16 b) En remplaçant d par $\frac{D}{4}$, on arrive à $f' = \frac{D^2 - \frac{D^2}{16}}{4D} = \frac{15D}{64}$.

.....

9.16 c) En remplaçant f' par $\frac{D}{4}$, on arrive à $\frac{D}{4} = \frac{4D}{D^2-d^2}$ et donc à $D^2 = D^2 - d^2$. Ainsi, on a $d = 0$.

.....

Fiche n° 10. Cinématique

Réponses

10.1 a) ..... $\boxed{1\,\text{h}\ 6\,\text{min}\ 40\,\text{s}}$

10.1 b) ..... $\boxed{8\,\text{min}\ 20\,\text{s}}$

10.2 a) ..... $\boxed{a_0 \times \tau_1}$

10.2 b) ..... $\boxed{\dfrac{a_0 \times {\tau_1}^2}{2}}$

10.2 c) ..... $\boxed{a_0 \times \tau_1 \times \left(\dfrac{\tau_1}{2} + \tau_2\right)}$

10.3 ..... $\boxed{\text{c}}$

10.4 ..... $\boxed{\text{b}}$

10.5 a) ..... $\boxed{a(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y})}$

10.5 b) ..... $\boxed{a\left(\cos(\theta)\vec{e_x} + \left(\sin(\theta) + \dfrac{b}{a}\right)\vec{e_y}\right)}$

10.5 c) ..... $\boxed{a\left(2\cos(\theta)\vec{e_x} + \left(2\sin(\theta) + \dfrac{b}{a}\right)\vec{e_y}\right)}$

10.5 d) ..... $\boxed{-b\vec{e_y}}$

10.6 a) ..... $\boxed{r(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y})}$

10.6 b) ..... $\boxed{r\vec{e_r}}$

10.6 c) ..... $\boxed{r(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y}) + z\vec{e_z}}$

10.6 d) ..... $\boxed{r\vec{e_r} + z\vec{e_z}}$

10.7 a) ..... $\boxed{|r\sin(\theta)|}$

10.7 b) ..... $\boxed{r\sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e_x} + \sin(\varphi)\vec{e_y})}$

10.7 c) ... $\boxed{r\sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e_x} + \sin(\varphi)\vec{e_y}) + r\cos(\theta)\vec{e_z}}$

10.7 d) ..... $\boxed{r\vec{e_r}}$

10.7 e) ..... $\boxed{\cos(\theta)\ \vec{e_r} - \sin(\theta)\ \vec{e_\theta}}$

10.8 a) ..... $\boxed{49{,}4\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}}$

10.8 b) ..... $\boxed{8{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$

10.9 a) ..... $\boxed{a\omega(-\sin(\omega t)\vec{e_x} + \cos(\omega t)\vec{e_y}) + b\vec{e_z}}$

10.9 b) ..... $\boxed{\sqrt{(a\omega)^2 + b^2}}$

10.9 c) ..... $\boxed{-a\omega^2(\cos(\omega t)\vec{e_x} + \sin(\omega t)\vec{e_y})}$

10.9 d) ..... $\boxed{a\omega^2}$

10.10 a) ..... $\boxed{\cos\theta\vec{e_x} + \sin\theta\vec{e_y}}$

10.10 b) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{e_x} + \cos\theta\vec{e_y})}$

10.10 c) ..... $\boxed{\vec{e_x} = \cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}}$

10.10 d) ..... $\boxed{\vec{e_y} = \sin\theta\vec{e_r} + \cos\theta\vec{e_\theta}}$

10.10 e) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}}$

10.11 a) ..... $\boxed{\dfrac{L}{T}}$

10.11 b) ..... $\boxed{\dfrac{1}{T^2}}$

10.11 c) ..... $\boxed{a\vec{e_r}}$

10.11 d) ..... $\boxed{2abt^2\vec{e_\theta}}$

10.11 e) ..... $\boxed{a\vec{e_r} + 2abt^2\vec{e_\theta}}$

10.12 a) ..... $\boxed{r_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(-\dfrac{1}{\tau}\vec{e_r} + \omega\vec{e_\theta}\right)}$

10.12 b) .... $\boxed{r_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(\left(\dfrac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{e_r} - \left(2\dfrac{\omega}{\tau}\right)\vec{e_\theta}\right)}$

10.12 c) ..... $\boxed{\text{orthoradiale}}$

10.12 d) ..... $\boxed{\text{décéléré}}$

10.12 e) ..... $\boxed{r = r_0\mathrm{e}^{-\theta}}$

10.13 a) ..... $\boxed{-at + v_0}$

10.13 b) ..... $\boxed{at}$

10.13 c) ..... $\boxed{-\dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t}$

10.13 d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}at^2 + L}$

10.13 e) ..... $\boxed{67\,\text{cm}}$

10.14 a) ..... $\boxed{v_{0x}t}$

10.14 b) ..... $\boxed{-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t}$

10.14 c) ..... $\boxed{z = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x}$

10.15 a) ..... $\boxed{1{,}7\,\text{s}}$

10.15 b) ..... $\boxed{2{,}9\,\text{m}}$

Corrigés

10.1 a) La voiture avance à vitesse constante. Pour parcourir 100 km, il lui faudra le temps

$$\tau = \frac{100\,\text{km}}{90\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}} = 1{,}11\,\text{h} = 1\,\text{h}\ 6\,\text{min}\ 40\,\text{s}.$$

.....

10.1 b) Pour parcourir 100 km à $80\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, il lui faudrait le temps $\tau' = \frac{100\,\text{km}}{80\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}} = 1{,}25\,\text{h}$. Le temps de trajet serait donc allongé de $\Delta t = \tau' - \tau = 0{,}14\,\text{h} = 8\,\text{min}\ 20\,\text{s}$.

.....

10.2 a) L'accélération est constante durant le temps τ_1 et la vitesse initiale est nulle. La vitesse à un instant t vaut donc $v(t) = a_0 \times t$, d'où $v_1 = v(\tau_1) = a_0 \times \tau_1$.

.....

10.2 b) Pour $t \in [0, \tau_1]$, la vitesse est décrite par l'équation : $v(t) = a_0 \times t$. La distance parcourue à la date t, s'écrit donc $d(t) = \frac{1}{2}a_0 \times t^2$. Ainsi, on a $d_1 = d(\tau_1) = \frac{a_0 \times {\tau_1}^2}{2}$.

.....

10.2 c) La distante totale parcourue est $d_{\text{tot}} = d_1 + d_2$ avec d_1 évaluée à la question précédente et d_2 la distance parcourue par le véhicule dans la seconde phase du mouvement où il progresse à vitesse constante.

Or, on a $d_2 = v_1 \times \tau_2$. Ainsi, on a $d_{\text{tot}} = a_0 \times \tau_1 \times \left(\frac{\tau_1}{2} + \tau_2\right)$.

.....

10.3 À $t = 0$, l'avion a une vitesse nulle. Sa vitesse au temps t s'écrit alors $v(t) = a \times t$ et la distance qu'il parcourt, vaut $d(t) = \frac{1}{2}a \times t^2$.

D'abord le temps t_d où l'avion atteint la vitesse v_d vaut $t_d = \frac{v_d}{a}$.

Pour faire l'application numérique, il nous faut exprimer la vitesse v_d en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: on a

$$v_d = \frac{180 \times 10^3\,\text{m}}{3\,600\,\text{s}} = 50\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \text{ et donc } t_d = \frac{50\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{2{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 20\,\text{s}.$$

La longueur de la piste correspond à la distance parcourue pendant cette durée : c'est

$$L = \frac{1}{2}a \times {t_d}^2 = \frac{{v_d}^2}{2a} = \frac{(50\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{2 \times 2{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 500\,\text{m}.$$

.....

10.4 La vitesse de la voiture à un instant t s'écrit $v(t) = v_i - a \times t$ avec

$$v_i = 110\,\mathrm{km \cdot h^{-1}} = \frac{110 \times 10^3\,\mathrm{m}}{3\,600\,\mathrm{s}} = 30{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Ainsi, le véhicule s'arrêtera à la date t_a telle que $v_i - a \times t = 0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. On a $t_a = \dfrac{v_i}{a} = \dfrac{30{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}} = 3{,}06\,\mathrm{s}$.

La distance parcourue pendant le freinage vaut $d(t) = v_i \times t - \dfrac{1}{2} a \times t^2$.

La distance d'arrêt d_a correspond à la distance parcourue pendant la durée t_a : c'est $d_a = \dfrac{{v_i}^2}{2a} = 46{,}7\,\mathrm{m}$.

.....

10.5 a) On a $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = a(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y})$.

.....

10.5 b) On a $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = a\left(\cos(\theta)\vec{e_x} + \left(\sin(\theta) + \dfrac{b}{a}\right)\vec{e_y}\right)$.

.....

10.5 c) On a $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = a\left(2\cos(\theta)\vec{e_x} + \left(2\sin(\theta) + \dfrac{b}{a}\right)\vec{e_y}\right)$.

.....

10.5 d) On a $\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} = -b\vec{e_y}$.

.....

10.6 a) On a $\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = r(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y})$.

.....

10.6 b) On a $\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = r\vec{e_r}$.

.....

10.6 c) On a $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y}) + z\vec{e_z}$.

.....

10.6 d) On a $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$.

.....

10.7 a) On a $\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right\| = |r\sin(\theta)|$.

.....

10.7 b) On a $\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = r\sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e_x} + \sin(\varphi)\vec{e_y})$.

.....

10.7 c) On a $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM'}} + \overrightarrow{\mathrm{M'M}} = r\sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e_x} + \sin(\varphi)\vec{e_y}) + r\cos(\theta)\vec{e_z}$.

.....

10.7 d) On a $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r}$.

.....

10.7 e) Calculons les projections de $\vec{e_z}$ sur les trois vecteurs de la base sphérique : on a

$$\begin{cases} \vec{e_z} \cdot \vec{e_r} = \cos(\theta) \\ \vec{e_z} \cdot \vec{e_\theta} = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \\ \vec{e_z} \cdot \vec{e_\varphi} = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on a

$$\vec{e_z} = (\vec{e_z} \cdot \vec{e_r})\,\vec{e_r} + (\vec{e_z} \cdot \vec{e_\theta})\,\vec{e_\theta} + (\vec{e_z} \cdot \vec{e_\varphi})\,\vec{e_\varphi} = \cos(\theta)\,\vec{e_r} - \sin(\theta)\,\vec{e_\theta}.$$

.....

10.8 a) La vitesse de la balle à l'instant t_1, s'écrit $\vec{v}(\mathrm{M},t_1) = v_x(t_1)\vec{e_x} + v_y(t_1)\vec{e_y}$ avec

$$v_x(t_1) \simeq \frac{x(t_1+\Delta t)-x(t_1)}{\Delta t}, \quad v_y(t_1) \simeq \frac{y(t_1+\Delta t)-y(t_1)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta t = 0{,}05\,\mathrm{s}.$$

Nous obtenons le tableau suivant :

t (en s)	0	0,05	0,10	0,15
v_x (en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)	7	7	7	7
v_y (en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)	11,8	11,4	11,0	10,6

À l'instant initial, nous pouvons écrire : $v_0 \simeq \sqrt{\left(7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)^2 + \left(11{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)^2} = 13{,}72\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 49{,}4\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

.....

10.8 b) L'accélération de la balle à l'instant t_1, s'écrit $\vec{a}(\mathrm{M},t_1) = a_x(t_1)\vec{e_x} + a_y(t_1)\vec{e_y}$ avec

$$a_x(t_1) \simeq \frac{v_x(t_1+\Delta t)-v_x(t_1)}{\Delta t}, \quad a_y(t_1) \simeq \frac{v_y(t_1+\Delta t)-v_y(t_1)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta t = 0{,}05\,\mathrm{s}.$$

ce qui donne

$$a_x(0) \simeq \frac{7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} - 7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{0{,}05\,\mathrm{s}} = 0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \quad \text{et} \quad a_y(0) \simeq \frac{11{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} - 11{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{0{,}05\,\mathrm{s}} = -8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

L'accélération initiale vaut donc $a_0 \simeq \sqrt{\left(0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\right)^2 + \left(-8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\right)^2} = 8{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

.....

10.9 a) On a $\vec{v}(\mathrm{M}) = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y} + \dot{z}\,\vec{e_z} = a\omega\big(-\sin(\omega t)\vec{e_x} + \cos(\omega t)\vec{e_y}\big) + b\vec{e_z}$.

.....

10.9 b) On a $\big\|\vec{v}(\mathrm{M})\big\| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = \sqrt{(a\omega)^2\big(\sin(\omega t)^2+\cos(\omega t)^2\big)+b^2} = \sqrt{(a\omega)^2+b^2}$.

.....

10.9 c) On a $\vec{a}(\mathrm{M}) = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \ddot{y}\,\vec{e_y} + \ddot{z}\,\vec{e_z} = -a\omega^2\big(\cos(\omega t)\vec{e_x} + \sin(\omega t)\vec{e_y}\big)$.

.....

10.9 d) On a $\big\|\vec{a}(\mathrm{M})\big\| = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} = a\omega^2$.

.....

10.11 a) On a $a = \dfrac{r}{t}$. Ainsi, a est homogène à une longueur sur un temps.

.....

10.11 b) On a $b = \dfrac{\theta}{t^2}$. Ainsi, b est homogène à un angle sur un temps au carré. Comme un angle est une grandeur sans dimension, on a bien le résultat donné.

.....

10.11 c) La vitesse radiale est $\vec{v}(\mathrm{M})_r = \dot{r}\vec{e_r} = a\vec{e_r}$.

.....

10.11 d) La vitesse orthoradiale est $\vec{v}(\mathrm{M})_\theta = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = 2abt^2\vec{e_\theta}$

.....

10.11 e) On a $\vec{v}(\mathrm{M}) = a\vec{e_r} + 2abt^2\vec{e_\theta}$.

.....

10.12 a) On a $\vec{v}(\mathrm{M}) = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = r_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(-\dfrac{1}{\tau}\vec{e_r} + \omega\vec{e_\theta}\right)$.

.....

10.12 b) On a $\vec{a}(\mathrm{M}) = r_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(\left(\dfrac{1}{\tau^2}-\omega^2\right)\vec{e_r} - \left(2\dfrac{\omega}{\tau}\right)\vec{e_\theta}\right)$.

10.12 c) On a $\omega = 4{,}78\,\text{tour}\cdot\text{min}^{-1} = \dfrac{4{,}78\times 2\pi\ \text{rad}}{60\,\text{s}} = 0{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\dfrac{1}{\tau^2} - \omega^2 = \left(\dfrac{1}{0{,}5^2} - \omega^2\right) = 0\,\text{s}^{-2}$.

Ainsi, on a $\vec{a}(\text{M},t) = -2r_0\text{e}^{-t/\tau}\vec{e_\theta}$. L'accélération est donc orthoradiale.

10.12 d) On a $\vec{a}(\text{M},t)\cdot\vec{e_\theta} = -2r_0\text{e}^{-t/\tau} < 0$. Le mouvement est donc décéléré.

10.12 e) On a $r = r_0 e^{-t/\tau}$ et $t = \dfrac{\theta}{\omega}$. Donc, on a $r = r_0\text{e}^{-\theta/(\omega\times\tau)} = r_0\text{e}^{-\theta}$ car $\omega\tau = 1$.

10.13 a) On a $\vec{a}(A) = \dfrac{\text{d}\vec{v}(A)}{\text{d}t}$. En projetant sur l'axe $(0,\overrightarrow{e_{x'}})$, on obtient : $-a = \dfrac{\text{d}v_A}{\text{d}t}$. Puis, en calculant

$$\int_{v_0}^{v_A(t)} \text{d}v_A = \int_0^t -a\,\text{d}t,$$

on obtient $v_A(t) = -at + v_0$.

10.13 b) On a $\vec{a}(B) = \dfrac{\text{d}\vec{v}(B)}{\text{d}t}$. En projetant sur l'axe $(0,\overrightarrow{e_{x'}})$, on obtient : $a = \dfrac{\text{d}v_B}{\text{d}t}$. Puis, en calculant

$$\int_0^{v_B(t)} \text{d}v_B = \int_0^t a\,\text{d}t,$$

on obtient $v_B(t) = at$.

10.13 c) Sur l'axe $(0,\overrightarrow{e_{x'}})$, on a : $v_A(t) = \dfrac{\text{d}x'_A}{\text{d}t}$. Donc, on a $\displaystyle\int_0^{x'_A(t)} \text{d}x'_A = \int_0^t v_A\,\text{d}t = \int_0^t (-at + v_0)\,\text{d}t$.

Donc, on a $x'_A(t) = -\dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t$.

10.13 d) Sur l'axe $(0,\overrightarrow{e_{x'}})$ nous avons : $v_B(t) = \dfrac{\text{d}x'_B}{\text{d}t}$. Donc, on a $\displaystyle\int_L^{x_B(t)} \text{d}x'_B = \int_0^t v_B\,\text{d}t = \int_0^t at\,\text{d}t$.

Donc, on a $x'_B(t) = \dfrac{1}{2}at^2 + L$.

10.13 e) Nous observerons une collision à la date t_1 si $x'_A(t_1) = x'_B(t_1)$ donc si $-\dfrac{1}{2}at_1^2 + v_0 t_1 = \dfrac{1}{2}at_1^2 + L$.
Donc, t_1 doit être une solution réelle positive de l'équation :

$$t_1^2 - \frac{v_0}{a}t_1 + \frac{L}{a} = 0,$$

ce qui impose une valeur positive pour son discriminant $\Delta = \left(\dfrac{v_0}{a}\right)^2 - 4\dfrac{L}{a} \geqslant 0$. Donc, on doit avoir $L \leqslant \dfrac{v_0^2}{4a}$.
Après application numérique, on trouve que la distance L doit vérifier $L \leqslant 67\,\text{cm}$.

10.14 a) On a $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{g}$. En projetant, nous obtenons

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g. \end{cases}$$

Donc, on a $v_x = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} = v_{0x}$. En intégrant une deuxième fois, vu que M est initialement en O, on obtient : $x(t) = v_{0x}t$.

.....

10.14 b) On a $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{g}$. En projetant, nous obtenons

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g. \end{cases}$$

Donc, en intégrant, on a $\displaystyle\int_{v_{0z}}^{v_z(t)} \mathrm{d}v_z = \int_0^t -g \cdot \mathrm{d}t$ donc $v_z = -gt + v_{0z}$. En intégrant une deuxième fois, vu que M est initialement en O, on obtient :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t.$$

.....

10.14 c) À partir de l'expression de $x(t)$ on peut écrire $t = x/v_{0x}$. On remplace t par cette expression dans z :

$$z = -\frac{1}{2}g(x/v_{0x})^2 + v_{0z}x/v_{0x}.$$

Finalement, on trouve l'équation $z = -\dfrac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \dfrac{v_{0z}}{v_{0x}}x$.

.....

10.15 a) On suppose que le lion et la gazelle se déplacent en ligne droite sur l'axe (Ox). On prend l'origine des temps au moment où la gazelle aperçoit le lion et l'origine de l'axe (Ox) à la position du lion quand la gazelle l'aperçoit.

On intègre deux fois pour avoir la position du lion x_L puis celle de la gazelle x_G en fonction de temps :

$$\begin{cases} x_L(t) = v_0 t + \dfrac{1}{2}a_L t^2 \\ x_G(t) = d_0 + \dfrac{1}{2}a_G t^2. \end{cases}$$

avec $v_0 = 5{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $a_L = 3{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $a_G = 2{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $d_0 = 10\,\mathrm{m}$.

Puis, on égalise ces deux positions pour déterminer le temps t_1 où le lion attrape la gazelle. On obtient une équation du second degré sur t_1 :

$$\frac{a_L - a_G}{2}t_1^2 + v_0 t_1 - d_0 = 0. \qquad (*)$$

On résout cette équation du second degré qui admet deux racines réelles dont l'une est négative. Le temps cherché est la racine positive : c'est $t_1 = \dfrac{-v_0 + \sqrt{\Delta}}{a_L - a_G}$ où $\Delta = v_0^2 + 2d_0(a_L - a_G)$ est le discriminant de l'équation $(*)$.

On trouve finalement $t_1 = 1{,}7\,\mathrm{s}$.

.....

10.15 b) La gazelle aura parcouru la distance $d = \dfrac{1}{2}a_G t_1^2$ avec $a_G = 2{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $t_1 = 1{,}7\,\mathrm{s}$ le temps mis par le lion pour rattraper la gazelle. Finalement, on trouve $d = 2{,}9\,\mathrm{m}$.

.....

Fiche n° 11. Principe fondamental de la dynamique

Réponses

11.1 ..... $\boxed{\dfrac{p + m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$

11.2 a) ..... $\boxed{\sqrt{(mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2}}$

11.2 b) ..... $\boxed{\arctan\left(\dfrac{mR\omega^2 - T}{mg}\right)}$

11.3 a) ..... $\boxed{a_0(t - t_0)}$

11.3 b) ..... $\boxed{0}$

11.3 c) ..... $\boxed{\dfrac{a_0}{k}\left[1 - \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\right]}$

11.4 a) ..... $\boxed{a\cos(\alpha)\vec{e_x} + a\sin(\alpha)\vec{e_y}}$

11.4 b) ..... $\boxed{b\sin(\alpha)\vec{e_x} + b\cos(\alpha)\vec{e_y}}$

11.4 c) ..... $\boxed{c\cos(\alpha)\vec{e_x} - c\sin(\alpha)\vec{e_y}}$

11.4 d) ..... $\boxed{-d\sin(\alpha)\vec{e_x} + d\cos(\alpha)\vec{e_y}}$

11.5 a) ..... $\boxed{-P\sin(\alpha)\vec{e_x} - P\cos(\alpha)\vec{e_y}}$

11.5 b) ..... $\boxed{N\vec{e_y}}$

11.6 a) ..... $\boxed{P\cos(\theta)\vec{e_r} - P\sin(\theta)\vec{e_\theta}}$

11.6 b) ..... $\boxed{-T\vec{e_r}}$

11.6 c) ..... $\boxed{(P\cos(\theta) - T)\vec{e_r} - P\sin(\theta)\vec{e_\theta}}$

11.7 a) ..... $\boxed{P\vec{e_x}}$

11.7 b) ..... $\boxed{-T\cos(\theta)\vec{e_x} - T\sin(\theta)\vec{e_y}}$

11.7 c) ..... $\boxed{(P - T\cos(\theta))\vec{e_x} - T\sin(\theta)\vec{e_y}}$

11.8 a) ..... $\boxed{\left(\dfrac{1}{2}a_0 t^2 + x_0\right)\vec{e_x} - v_0 t\vec{e_y} + z_0\vec{e_z}}$

11.8 b) ..... $\boxed{a_0 t\vec{e_x} - v_0\vec{e_y}}$

11.8 c) ..... $\boxed{a_0\vec{e_x}}$

11.9 a) ..... $\boxed{g\vec{e_z}}$

11.9 b) ..... $\boxed{v_0\vec{e_x} + gt\vec{e_z}}$

11.9 c) ..... $\boxed{(v_0 t + x_0)\vec{e_x} + y_0\vec{e_y} + \dfrac{1}{2}gt^2\vec{e_z}}$

11.10 a) ..... $\boxed{\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y}}$

11.10 b) ..... $\boxed{-\sin(\theta)\vec{e_x} + \cos(\theta)\vec{e_y}}$

11.10 c) ..... $\boxed{-\dot\theta\sin(\theta)\vec{e_x} + \dot\theta\cos(\theta)\vec{e_y}}$

11.10 d) ..... $\boxed{-\dot\theta\cos(\theta)\vec{e_x} - \dot\theta\sin(\theta)\vec{e_y}}$

11.10 e) ..... $\boxed{\dot\theta\vec{e_\theta}}$

11.10 f) ..... $\boxed{-\dot\theta\vec{e_r}}$

11.11 ..... $\boxed{\text{c}}$

11.12 a) ..... $\boxed{\dot r\vec{e_r} + r\dot\theta\vec{e_\theta}}$

11.12 b) ..... $\boxed{\left(\ddot r - r\dot\theta^2\right)\vec{e_r} + \left(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta\right)\vec{e_\theta}}$

11.13 a) ..... $\boxed{2{,}2\,\text{N}}$

11.13 b) ..... $\boxed{0{,}46\,\text{rad}}$

11.14 a) ..... $\boxed{(T' - T)\cos\theta}$

11.14 b) ..... $\boxed{(T' + T)\sin\theta - F}$

11.14 c) ..... $\boxed{1{,}17\,\text{kN}}$

11.15 ..... $\boxed{1{,}6\,\text{N}}$

11.16 ..... $\boxed{864\,\text{N}}$

11.17 a) ..... $\boxed{P\cos\alpha}$

11.17 b) ..... $\boxed{-m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + P\sin\alpha}$

11.18 a) ..... $\boxed{\dfrac{T_1}{2m}}$

11.18 b) ..... $\boxed{g - \dfrac{T_2}{m}}$

11.18 c) ..... $\boxed{\dfrac{g}{3}}$

Corrigés

11.2 a) Pour obtenir F il faut pouvoir éliminer α. L'astuce consiste à utiliser l'identité

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

On a $\begin{cases} F\sin\alpha = mR\omega^2 - T \\ F\cos\alpha = mg \end{cases}$ soit $F^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = F^2 = \big(mR\omega^2 - T\big)^2 + (mg)^2$. Finalement, l'intensité d'une force étant positive, on trouve $F = \sqrt{(mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2}$.

.....

11.2 b) Quand on écrit le système sous la forme $\begin{cases} F\sin\alpha = mR\omega^2 - T \\ F\cos\alpha = mg \end{cases}$, on s'aperçoit qu'il suffit de faire le rapport des deux équations pour éliminer F. On obtient

$$\tan\alpha = \frac{mR\omega^2 - T}{mg} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{mR\omega^2 - T}{mg}\right).$$

.....

11.3 a) La solution générale s'écrit $v(t) = a_0 t + C_1$ où C_1 est une constante d'intégration que l'on détermine à l'aide de la condition $v(t_0) = 0$. Cette condition donne $C_1 = -a_0 t_0$ d'où la solution $v(t) = a_0(t - t_0)$.

.....

11.3 b) La solution générale s'écrit $v(t) = A\mathrm{e}^{-kt}$. La condition initiale $v(t_0) = 0$ implique $A = 0$ puisque $\mathrm{e}^{-kt} > 0$ pour tout t. Ainsi la solution est $v(t) = 0$.

.....

11.3 c) La solution de l'équation homogène est $v(t) = A\mathrm{e}^{-kt}$. Une solution particulière (constante) est $v = \dfrac{a_0}{k}$. Les solutions sont $v(t) = A\mathrm{e}^{-kt} + \dfrac{a_0}{k}$. La condition initiale $v(t_0) = 0$ donne $A = -\dfrac{a_0}{k}\mathrm{e}^{kt_0}$. Il en découle la solution générale : $v(t) = \dfrac{a_0}{k}\big[1 - \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\big]$.

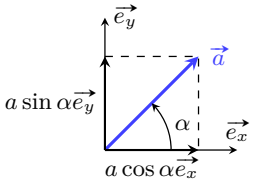
.....

11.4 a)

La composante suivant $\vec{e_x}$ correspond au produit scalaire

$$\vec{a}\cdot\vec{e_x} = a \times 1 \times \cos(\alpha).$$

De même la composante suivant $\vec{e_y}$ est le produit scalaire $\vec{a}\cdot\vec{e_y} = a \times 1 \times \cos(\pi/2 - \alpha) = a\sin(\alpha)$. On peut retrouver ces résultats géométriquement (*cf.* ci-contre).



.....

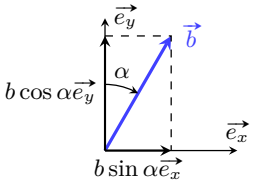
11.4 b)

La composante suivant $\vec{e_x}$ vaut

$$b_x = \vec{b}\cdot\vec{e_x} = b\cos(\pi/2 - \alpha) = b\sin(\alpha).$$

De même, la composante suivant $\vec{e_y}$ vaut

$$b_y = \vec{b}\cdot\vec{e_y} = b\cos(\alpha).$$



.....

11.4 c)

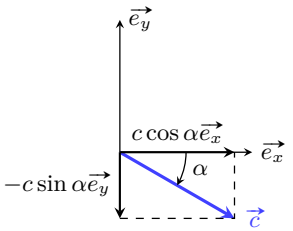
On a

$$c_x = \vec{c} \cdot \vec{e_x} = c\cos(\alpha)$$

et

$$c_y = \vec{c} \cdot \vec{e_y} = c\cos(\pi/2 + \alpha) = -c\sin(\alpha).$$

On retrouve ces projections à l'aide de la construction ci-contre.



.....

11.4 d)

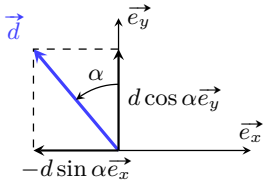
On trouve

$$d_x = \vec{d} \cdot \vec{e_x} = d\cos(\pi/2 + \alpha) = -d\sin(\alpha)$$

et

$$d_y = \vec{d} \cdot \vec{e_y} = d\cos(\alpha).$$

La construction ci-contre confirme ces projections.



.....

11.5 a) La composante suivant $\vec{e_x}$ du poids est $P_x = \vec{P} \cdot \vec{e_x} = P\cos(\alpha + \pi/2) = -P\sin(\alpha)$. De même, sa composante suivant $\vec{e_y}$ s'écrit $P_y = \vec{P} \cdot \vec{e_y} = P\cos(\alpha + \pi) = -P\cos(\alpha)$. Ainsi, le poids s'écrit

$$\vec{P} = -P\sin(\alpha)\vec{e_x} - P\cos(\alpha)\vec{e_y}.$$

.....

11.5 b) Le vecteur $\vec{N}$ est colinéaire au vecteur unitaire $\vec{e_y}$ et de même sens ; on a donc $\vec{N} = N\vec{e_y}$.

.....

11.6 a) La composante suivant $\vec{e_r}$ du poids est $P_r = \vec{P} \cdot \vec{e_r} = P\cos(\theta)$. De même, sa composante suivant $\vec{e_\theta}$ s'écrit $P_\theta = \vec{P} \cdot \vec{e_\theta} = P\cos(\alpha + \pi/2) = -P\sin(\theta)$. Ainsi, le poids s'écrit

$$\vec{P} = P\cos(\theta)\vec{e_r} - P\sin(\theta)\vec{e_\theta}.$$

.....

11.6 b) Le vecteur $\vec{T}$ est colinéaire au vecteur unitaire $\vec{e_r}$ et de sens opposé ; on a donc $\vec{T} = -T\vec{e_r}$.

.....

11.7 a) Le poids $\vec{P}$ est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire $\vec{e_x}$; on a donc $\vec{P} = P\vec{e_x}$.

.....

11.7 b) La composante suivant $\vec{e_x}$ de la tension du fil $\vec{T}$ est $T_x = \vec{T} \cdot \vec{e_x} = T\cos(\pi - \theta) = -T\cos(\theta)$.

De même, sa composante suivant $\vec{e_y}$ vaut $T_y = \vec{T} \cdot \vec{e_y} = T\cos(\pi/2 + \theta) = -T\sin(\theta)$. Finalement, on trouve

$$\vec{T} = -T\cos(\theta)\vec{e_x} - T\sin(\theta)\vec{e_y}.$$

.....

11.8 a) Le vecteur position est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$, d'où

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \left(\frac{1}{2}a_0t^2 + x_0\right)\vec{e_x} - v_0t\vec{e_y} + z_0\vec{e_z}.$$

.....

11.8 b) Dans le système de coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse s'écrit

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z} = a_0t\vec{e_x} - v_0\vec{e_y}.$$

.....

11.8 c) Dans le système de coordonnées cartésiennes, le vecteur accélération s'exprime en fonction des dérivées secondes des coordonnées : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x} + \ddot{y}\vec{e_y} + \ddot{z}\vec{e_z} = a_0\vec{e_x}$.

.....

11.9 a) D'après le PFD, on a $mg\vec{e_z} = m\,\vec{a}$ d'où $\vec{a} = g\vec{e_z}$.

.....

11.9 b) L'accélération s'écrit $\vec{a} = \dot{v}_x\vec{e_x} + \dot{v}_y\vec{e_y} + \dot{v}_z\vec{e_z}$. On en déduit

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{v}_x &=& 0 \\ \dot{v}_y &=& 0 \\ \dot{v}_z &=& g \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_x &=& C_1 \\ v_y &=& C_2 \\ v_z &=& gt + C_3. \end{array}\right.$$

Les conditions initiales imposent $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$ et $C_3 = 0$. Finalement, on trouve $\vec{v} = v_0\vec{e_x} + gt\vec{e_z}$.

.....

11.9 c) Le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}$.

Par identification avec l'expression obtenue précédemment, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} &=& v_0 \\ \dot{y} &=& 0 \\ \dot{z} &=& gt \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& v_0t + C_4 \\ y &=& C_5 \\ z &=& \dfrac{1}{2}gt^2 + C_6. \end{array}\right.$$

Les conditions initiales imposent $C_4 = x_0$, $C_5 = y_0$ et $C_6 = 0$. Finalement, on trouve

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (v_0t + x_0)\vec{e_x} + y_0\vec{e_y} + \frac{1}{2}gt^2\vec{e_z}.$$

.....

11.10 a) On a $\vec{e_r}\cdot\vec{e_x} = \cos(\theta)$ et $\vec{e_r}\cdot\vec{e_y} = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$ d'où $\vec{e_r} = \cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y}$.

.....

11.10 b) On a $\vec{e_\theta}\cdot\vec{e_x} = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta)$ et $\vec{e_\theta}\cdot\vec{e_y} = \cos(\theta)$ d'où $\vec{e_\theta} = -\sin(\theta)\vec{e_x} + \cos(\theta)\vec{e_y}$.

.....

11.10 c) Il suffit de dériver le vecteur $\vec{e_r} = \cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y}$, en utilisant le fait que $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ sont des constantes (vectorielles). On a donc $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\vec{e_x} + \dfrac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t}\vec{e_y}$. Ici, θ dépend du temps, par conséquent on a

$$\frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -\dot{\theta}\sin(\theta).$$

De même, on a $\dfrac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\cos(\theta)$. Finalement, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e_x} + \dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e_y}.$$

.....

11.10 d) En partant de $\vec{e_\theta} = -\sin(\theta)\vec{e_x} + \cos(\theta)\vec{e_y}$, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t}\vec{e_x} + \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\vec{e_y} = -\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e_x} - \dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e_y}.$$

.....

11.11 Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est colinéaire et de même sens que $\vec{e_r}$. Sa norme étant égale r, on a $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r}$.

.....

11.12 a) Il suffit de dériver le vecteur position en utilisant les résultats des exercices précédents : on trouve

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e_r} + r\frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}.$$

.....

11.12 b) Dérivons le vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\vec{e_r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(r\dot{\theta})}{\mathrm{d}t}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e_\theta}.$$

.....

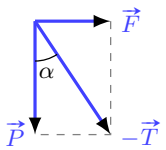
11.13 a) Calculons le carré scalaire :

$$\vec{T}^2 = (-\vec{F} - \vec{P})^2 = F^2 + P^2 + 2\vec{F}\cdot\vec{P} = 5$$

car $\vec{F}\cdot\vec{P} = 0$. Par conséquent, $T = \sqrt{5\,\mathrm{N}^2} \simeq 2{,}2\,\mathrm{N}$.

.....

11.13 b) Une construction géométrique permet de trouver immédiatement l'angle α :



$$\tan\alpha = F/P \quad \text{soit} \quad \alpha = 0{,}46\,\mathrm{rad}.$$

On peut aussi utiliser les produits scalaires. Par exemple,

$$\vec{T}\cdot\vec{F} = T \times F\cos(\pi/2 + \alpha) = -TF\sin\alpha.$$

De plus, compte tenu de l'équilibre des forces, on a

$$\vec{T}\cdot\vec{F} = (-\vec{F} - \vec{P})\cdot\vec{F} = -F^2 - \vec{P}\cdot\vec{F} = -F^2.$$

Il en découle $\sin\alpha = F/T$ soit $\alpha = 0{,}46\,\mathrm{rad}$ (c'est-à-dire $\alpha = 26^\circ$).

.....

11.14 a) On a $\vec{R} = \vec{T} + \vec{T'} + \vec{F}$. La composante horizontale de $\vec{R}$ vaut

$$R_x = \vec{R}\cdot\vec{e_x} = \underbrace{\vec{T}\cdot\vec{e_x}}_{-T\cos\theta} + \underbrace{\vec{T'}\cdot\vec{e_x}}_{T'\cos\theta} + \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{e_x}}_{0} = (T' - T)\cos\theta.$$

.....

11.14 b) La composante verticale de $\vec{R}$ s'écrit

$$R_y = \vec{R}\cdot\vec{e_y} = \underbrace{\vec{T}\cdot\vec{e_y}}_{T\sin\theta} + \underbrace{\vec{T'}\cdot\vec{e_y}}_{T'\sin\theta} + \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{e_y}}_{-F} = (T' + T)\sin\theta - F.$$

.....

11.14 c) Résoudre l'équation vectorielle $\vec{R} = \vec{0}$, c'est résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (T' - T)\cos\theta & = & 0 \\ (T' + T)\sin\theta - F & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{rcl} T' & = & T \\ T & = & \dfrac{F}{2\sin\theta}. \end{array}\right.$$

Sachant que $F = 800\,\mathrm{N}$ et $\theta = 20^\circ$, on obtient $T = 1{,}17\,\mathrm{kN}$.

.....

11.15 Le principe fondamental de la dynamique impose $m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}$. En projetant la relation précédente suivant la verticale descendante, on obtient $mg - F = ma$ ce qui donne $F = m(g-a) = 1{,}6\,\text{N}$.

.....

11.16 L'homme subit son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force de contact dû à l'ascenseur $-\vec{F}$ (principe des actions réciproques). Le principe fondamental de la dynamique donne $m\vec{g} - \vec{F} = m\vec{a}$. En projetant sur la verticale ascendante, on obtient $ma = -mg + F$, soit $F = m(a+g) = 80\,\text{kg} \times 10{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 864\,\text{N}$.

.....

11.17 a) Le principe fondamental de la dynamique donne $\vec{P} + \vec{f_\text{n}} + \vec{f_\text{t}} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \dfrac{\text{d}v}{\text{d}t}\,\vec{e_\text{t}}$ ($\vec{e_\text{t}}$ est le vecteur unitaire orienté suivant le vecteur vitesse ; c'est le vecteur tangent de la base de Frenet). Si l'on projette la relation suivant la normale $\vec{e_\text{n}}$ au support on aboutit à

$$\underbrace{\vec{P}\cdot\vec{e_\text{n}}}_{P\cos(\pi-\alpha)} + \underbrace{\vec{f_\text{n}}\cdot\vec{e_\text{n}}}_{f_\text{n}} + \underbrace{\vec{f_\text{t}}\cdot\vec{e_\text{n}}}_{0} = m\frac{\text{d}v}{\text{d}t}\,\underbrace{\vec{e_\text{t}}\cdot\vec{e_\text{n}}}_{0},$$

ce qui donne $f_\text{n} = -P\cos(\pi-\alpha) = P\cos\alpha$.

.....

11.17 b) En projetant la relation fondamentale de la dynamique suivant la direction tangentielle au support, on obtient

$$\underbrace{\vec{P}\cdot\vec{e_\text{t}}}_{P\cos(\pi/2-\alpha)} + \underbrace{\vec{f_\text{n}}\cdot\vec{e_\text{t}}}_{0} + \underbrace{\vec{f_\text{t}}\cdot\vec{e_\text{t}}}_{-f_\text{t}} = m\frac{\text{d}v}{\text{d}t}\,\underbrace{\vec{e_\text{t}}\cdot\vec{e_\text{t}}}_{1},$$

c'est-à-dire $f_\text{t} = -m\dfrac{\text{d}v}{\text{d}t} + P\sin\alpha$.

.....

11.18 a) Le principe fondamental appliqué au bloc B_1 donne $2m\vec{g} + \vec{R} + \vec{T_1} = 2m\vec{a_1}$. En projetant cette relation suivant le sens du mouvement, on obtient :

$$2m\,\underbrace{\vec{g}\cdot\vec{e_x}}_{0} + \underbrace{\vec{R}\cdot\vec{e_x}}_{0} + \underbrace{\vec{T_1}\cdot\vec{e_x}}_{T_1} = 2m\,\underbrace{\vec{a_1}\cdot\vec{e_x}}_{a_1} \quad \text{soit} \quad a_1 = \frac{T_1}{2m}.$$

.....

11.18 b) Le principe fondamental appliqué au bloc B_2 donne $m\vec{g} + \vec{T_2} = m\vec{a_2}$. En projetant cette relation suivant le sens du mouvement, on obtient :

$$m\,\underbrace{\vec{g}\cdot\vec{e_y}}_{g} + \underbrace{\vec{T_2}\cdot\vec{e_y}}_{-T_2} = m\,\underbrace{\vec{a_2}\cdot\vec{e_y}}_{a_2} \quad \text{soit} \quad a_2 = g - \frac{T_2}{m}.$$

.....

11.18 c) On a les relations :

$$a_1 = \frac{T_1}{2m} \qquad \text{et} \qquad a_2 = g - \frac{T_2}{m}.$$

Multiplions la première relation par $2m$, et la deuxième par m, puis additionnons les. On trouve

$$2ma_1 + ma_2 = T_1 + mg - T_2.$$

Comme $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$, on obtient $3ma_1 = mg$ soit $a_1 = a_2 = g/3$.

.....

Fiche n° 12. Approche énergétique en mécanique

Réponses

12.1 ..... Ⓒ

12.2 a) ..... $mg(\ell - y)$

12.2 b) ..... $mg(x\sin(\alpha) - H)$

12.2 c) ..... $-mgR\cos(\theta)$

12.2 d) ..... $mgr\big(\cos(\psi) - 1\big) + E_0$

12.3 ..... Ⓑ

12.4 a) ..... $\dfrac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 - \dfrac{k{\ell_0}^2}{2}$

12.4 b) .. $\dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2$

12.4 c) ..... $E_0 + k(x - \ell_0)^2$

12.5 a) ..... $-h\ell$

12.5 b) ..... $-hR\alpha$

12.5 c) ..... $-(2a + 2b)h$

12.5 d) ..... $-(a + b + c)h$

12.5 e) ..... Ⓑ

12.6 ..... Ⓒ

12.7 a) ..... $1 - \dfrac{{v_0}^2}{2g\ell}$

12.7 b) ..... $0{,}65\,\text{rad} = 37°$

12.8 a) ..... $5{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

12.8 b) ..... $0{,}11\,\text{m}$

12.8 c) ..... $2{,}0\,\text{m}$

12.9 a) ..... $\ddot{z} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{z} + \dfrac{k}{m}z = g + \dfrac{k\ell_0}{m}$

12.9 b) ..... $\zeta + \dfrac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \dfrac{k}{m}\zeta = 0$

12.10 a) ..... Ⓑ

12.10 b) ..... Ⓓ

12.10 c) ..... Ⓐ

12.10 d) ..... Ⓒ

12.11 a) 0

12.11 b) 0

12.11 c) 0

12.11 d) ..... a

12.12 a) ..... Ⓐ

12.12 b) ..... Ⓐ

12.12 c) ..... Ⓐ

12.12 d) ..... Ⓑ

12.12 e) ..... Ⓑ

12.12 f) ..... Ⓑ

12.13 a) ..... Ⓐ, Ⓒ et Ⓓ

12.13 b) ..... Ⓑ

12.13 c) ..... Ⓐ, Ⓒ et Ⓓ

12.13 d) ..... Ⓐ et Ⓒ

12.14 ..... $33{,}6\,\text{m/s}$

Corrigés

12.2 a) L'axe est ici orienté vers le bas, on a donc $E_{pp}(y) = -mgy + K_1$. On veut $E_{pp}(\ell) = 0$, d'où $K_1 = mg\ell$. Finalement, on a $E_{pp}(y) = mg(\ell - y)$.

.....

12.2 b) On peut raisonner de deux manières :

- La coordonnée verticale (axe de $\vec{g}$) z est liée à x par $z = x\sin(\alpha)$. On a donc $E_{pp} = mgx\sin(\alpha) + K_2$. L'énergie potentielle étant nulle en $z = H$, on a $E_{pp}(x) = mg(x\sin(\alpha) - H)$.
- Dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$, on a $\vec{g} = -g\sin(\alpha)\vec{e_x} - g\cos\alpha\vec{e_y}$.
  On en déduit le travail élémentaire pour un déplacement selon x :

$$\delta W = -mg\sin(\alpha)\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}(mgx\sin(\alpha) + K_2) = -\,\mathrm{d}E_{pp}.$$

  On en déduit que $E_{pp}(x) = mgx\sin(\alpha) + K_2$.

  L'énergie potentielle devant être nulle en S, qui correspond à $x = \dfrac{H}{\sin(\alpha)}$, on a $K_2 = -mgH$, d'où le résultat.

.....

12.2 c) Dans la base polaire, l'accélération de la pesanteur s'écrit $\vec{g} = g\cos(\theta)\vec{e_r} - g\sin(\theta)\vec{e_\theta}$. Donc, le travail élémentaire pour un déplacement sur le cercle (selon $\vec{e_\theta}$) est

$$\delta W = m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -mg\sin(\theta)R\,\mathrm{d}\theta = -\,\mathrm{d}(-mgR\cos(\theta) + K_3) = -\,\mathrm{d}E_{pp}.$$

On a donc $E_{pp}(\theta) = -mgR\cos(\theta) + K_3$, et comme on veut $E_{pp}(\pi/2) = 0$, on a $K_3 = 0$. Ainsi, on a

$$E_{pp}(\theta) = -mgR\cos(\theta).$$

.....

12.2 d) Fixons un axe $(\mathrm{O}z)$ vertical ascendant avec O au centre du cercle. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit alors $E_{pp} = mgz + K_4$. Or, on a $z = r\cos(\psi)$ d'où $E_{pp} = mgr\cos(\psi) + K_4$.
La convention choisie ($E_{pp}(\psi = 0) = E_0$) entraîne que

$$mgr\cos(0) + K_4 = E_0 \quad \text{d'où} \quad K_4 = E_0 - mgr.$$

Finalement, on trouve

$$E_{pp} = mgr\big(\cos(\psi) - 1\big) + E_0.$$

.....

12.4 a) L'axe est orienté vers le bas, la longueur du ressort s'identifie donc directement à la coordonnée y.

La force de rappel s'écrit $\vec{F} = -k(y-\ell_0)\vec{e_y}$. On en déduit donc (en calculant le travail élémentaire ou par intégration directe) que

$$E_{pe}(y) = \frac{1}{2}k(y-\ell_0)^2 + \mathrm{C^{te}}.$$

Or, on veut $E_{pe}(y = 0) = 0$, d'où $\mathrm{C^{te}} = -\dfrac{1}{2}k{\ell_0}^2$. Ainsi, on a

$$E_{pe}(y) = \frac{1}{2}k(y-\ell_0)^2 - \frac{1}{2}k{\ell_0}^2.$$

.....

12.4 b) On calcule d'abord la longueur ℓ du ressort en fonction de la coordonnée x. Un peu de trigonométrie donne $\cos(\beta) = \dfrac{x}{\ell}$ d'où $\ell = \dfrac{x}{\cos(\beta)}$. Par rapport à la coordonnée ℓ (mesurée le long de l'axe (OA)), l'énergie potentielle vaut donc :

$$E_{pe}(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \mathrm{C^{te}}.$$

On a donc

$$E_{pe}(x) = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 + \mathrm{C^{te}}.$$

On détermine alors la constante afin d'avoir $E_{pe}(\mathrm{A}) = 0$. Lorsque le point M est en A, la longueur du ressort vaut $\ell(\mathrm{A}) = \dfrac{L}{\sin(\beta)}$. On résout donc :

$$E_{pe}(\ell(\mathrm{A})) = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2 + \mathrm{C^{te}} = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad \mathrm{C^{te}} = -\frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2.$$

Finalement, on trouve

$$E_{pe}(x) = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2.$$

.....

12.4 c) La masse centrale est soumise aux forces de rappel des deux ressorts :

- La longueur du ressort de gauche vaut x. La force exercée par celui-ci sur la masse s'exprime donc comme $\overrightarrow{F_g} = -k(x - \ell_0)\overrightarrow{e_x}$, d'où une énergie potentielle (à une constante près) $E_{p,g} = \dfrac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$.
- La longueur du ressort de droite vaut $2\ell_0 - x$. La force exercée par celui-ci sur la masse s'exprime donc comme $\overrightarrow{F_d} = k(2\ell_0 - x - \ell_0)\overrightarrow{e_x} = k(\ell_0 - x)\overrightarrow{e_x}$ (attention au signe devant k qui doit être cohérent), d'où une énergie potentielle (à une constante près) $E_{p,d} = \dfrac{1}{2}k(\ell_0 - x)^2$.

En additionnant les deux contributions, et en demandant que $E_{pe}(\ell_0) = E_0$, on obtient alors $E_{pe}(x) = E_0 + k(x - \ell_0)^2$.

.....

12.5 a) Déterminons le travail élémentaire : on a

$$\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\frac{h}{||\vec{v}||}\vec{v} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}.$$

Or, par construction, les vecteurs vitesse et déplacement élémentaire sont colinéaires, d'où :

$$\delta W = -h\,\mathrm{dOM}.$$

Par intégration, on a donc

$$W = \int_{\mathrm{AB}} -h\,\mathrm{dOM} = -h\int_{\mathrm{AB}} \mathrm{dOM} = -h\ell.$$

Les autres cas se calculent semblablement.

.....

12.5 e) Si la force était conservative, son travail ne dépendrait que des points de départ et d'arrivée, et serait donc nul sur un chemin fermé (points de départ et d'arrivée confondus). Ce n'est pas le cas pour les chemin c) et d), la force n'est donc pas conservative.

.....

12.6 On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le point de départ et le point d'arrêt. L'entraînement précédent permet d'affirmer que le travail de la force de frottement vaut $-hd$. On a donc :

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -hd \qquad \text{donc} \qquad d = \frac{m{v_0}^2}{2h}.$$

.....

12.7 a) La masse n'est soumise qu'au poids, force conservative, et à la tension du fil qui ne travaille pas car elle reste orthogonale au mouvement. L'énergie mécanique se conserve donc entre le point de départ et le point de rebroussement.

- Au départ, $E_m = E_c = \frac{1}{2}m{v_0}^2$ (on pose $z = 0$ pour la position initiale de la masse, et on prend $E_p(0) = 0$)
- Au moment du rebroussement, $E_m = E_p = mgz(\theta_0) = mg\ell(1 - \cos(\theta_0))$, car on a alors $z(\theta) = \ell - \ell\cos(\theta)$.

Ainsi, on a

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mg\ell(1 - \cos(\theta_0)) \qquad \text{donc} \qquad \cos(\theta_0) = 1 - \frac{{v_0}^2}{2g\ell}.$$

.....

12.8 a) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique entre le début et la fin de la chute libre on a :

$$E_m(t_{\text{fin chute}}) - E_m(t_{\text{début chute}}) = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mg(H - \ell_0).$$

Les forces étant conservatives, l'énergie mécanique est conservée et on a donc

$$v_0 = \sqrt{2g(H - \ell_0)} = \sqrt{2 \times 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \times (2{,}0\,\text{m} - 0{,}30\,\text{m})} = 5{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

.....

12.8 b) La masse n'est soumise qu'à des forces conservatives : son poids, ainsi que la force de rappel du ressort. On peut donc appliquer la conservation de l'énergie mécanique entre la position d'arrivée sur le ressort $z = \ell_0$, et la position d'altitude minimale $z = z_m$ (pour laquelle la vitesse s'annule). On a donc

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + mg\ell_0 = mgz_m + \frac{1}{2}k(z_m - \ell_0)^2.$$

Ainsi, après calcul, on trouve $\frac{1}{2}kz_m^2 + (mg - k\ell_0)z_m + \frac{1}{2}k{\ell_0}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mg\ell_0 = 0$.

On ne demande qu'une réponse numérique, on peut donc passer aux valeurs numériques pour simplifier la résolution :

$$500z_m^2 - 290{,}2z_m + 25{,}4 = 0.$$

Cette équation possède deux solutions, $z_1 \approx 0{,}47\,\text{m}$ et $z_2 \approx 0{,}11\,\text{m}$. La première solution correspond à une position supérieure en altitude à la position initiale, et n'est donc pas celle qui nous intéresse. On retient donc $z_m = 0{,}11\,\text{m}$.

.....

12.8 c) La masse n'étant soumise qu'à des forces conservatives, elle revient en $x = \ell_0$ avec la même vitesse qu'elle avait en arrivant, à savoir v_0. Elle atteint donc une altitude maximale quand sa vitesse s'annule en $z = H$.

.....

12.9 a) On choisit un axe vertical descendant de manière à pouvoir identifier z à la distance OM, qui est la longueur du ressort.

Afin de déterminer l'équation différentielle, on souhaite appliquer le théorème de la puissance cinétique. Or,

- la puissance du poids vaut $m\vec{g}\cdot\vec{v} = mg\dot{z}$ (axe descendant) ;
- la puissance de la force de rappel vaut $-k(z - \ell_0)\vec{e_z}\cdot\vec{v} = -k(z - \ell_0)\dot{z}$;
- la puissance de la force de frottements fluides vaut $-\alpha\vec{v}\cdot\vec{v} = -\alpha\dot{z}^2$.

Le théorème de la puissance cinétique donne alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\right) = m\dot{z}\ddot{z} = mg\dot{z} - k(z - \ell_0)\dot{z} - \alpha\dot{z}^2.$$

D'où finalement : $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}$.

.....

12.9 b) On détermine la position d'équilibre en projetant la première loi de Newton sur l'axe vertical descendant :

$$mg - k(z_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \quad \text{donc} \quad z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}.$$

On obtient $z_{\text{eq}} > \ell_0$, ce qui est physiquement cohérent.

On pose donc $\zeta = z - z_{\text{eq}}$. En réinjectant dans l'équation différentielle obtenue précédemment, on obtient :

$$\ddot{\zeta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\left(\zeta + \ell_0 + \frac{mg}{k}\right) = g + \frac{k\ell_0}{m} \qquad \text{donc} \qquad \ddot{\zeta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\zeta = 0.$$

On peut également obtenir cette équation en écrivant la force de rappel par rapport à la variable ζ et en en déduisant l'énergie potentielle associée.

.....

12.10 a) Au voisinage de $x = 0^+$, la fonction énergie potentielle est équivalente à β/x^2. Ici, la fonction représentée par le graphe tend vers $-\infty$ en 0, on a nécessairement $\beta < 0$.

Pour $x \to +\infty$, la fonction énergie potentielle est équivalente à α/x. Ici, la fonction représentée par le graphe tend vers 0^+ en $+\infty$, on a nécessairement $\alpha > 0$.

Ce potentiel est physiquement impossible car $E_p(x \to 0^+) \longrightarrow -\infty$: l'énergie potentielle n'est pas bornée inférieurement, on pourrait donc théoriquement utiliser ce potentiel pour extraire une quantité infinie d'énergie.

.....

12.11 a) La position d'équilibre stable correspond à l'état qui minimise l'énergie potentielle.

- Déterminons le minimum de l'énergie potentielle $E_p(\theta) = mg\ell(1 - \cos(\theta))$ en cherchant la valeur θ_{eq} telle que

  $$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}(\theta_{\text{eq}}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_{\text{eq}}) > 0.$$

  La première égalité donne $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}(\theta_{\text{eq}}) = mg\ell\sin(\theta_{\text{eq}}) = 0$ et donc $\theta_{\text{eq}} \equiv 0\ [\pi]$.

  Finalement, en tenant compte de $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_{\text{eq}}) > 0$, on trouve $\theta_{\text{eq}} \equiv 0\ [2\pi]$.

- On aurait pu remarquer que les minima de $mg\ell(1-\cos(\theta))$ correspondent aux maxima de $\cos(\theta)$, qui sont bien les $\theta_{\text{eq}} \equiv 0\ [2\pi]$.

.....

12.11 b) On dérive l'énergie potentielle, en écrivant :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = \kappa z + \lambda z^3.$$

L'équation $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = 0$ a alors trois solutions : $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{-\dfrac{\kappa}{\lambda}}$ et $z_3 = -\sqrt{-\dfrac{\kappa}{\lambda}}$.

Il s'agit des positions d'équilibre de ce potentiel.

On dérive une seconde fois afin d'étudier la stabilité. On a $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}z^2} = \kappa + 3\lambda z^2$.

Finalement, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}z^2}(z = z_1) = \kappa > 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}z^2}(z = z_2) = \kappa + 3\lambda\left(-\frac{\kappa}{\lambda}\right) = -2\kappa < 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}z^2}(z = z_3) = \kappa + 3\lambda\left(-\frac{\kappa}{\lambda}\right) = -2\kappa < 0.$$

Seule $z_1 = 0$ est une position d'équilibre stable.

.....

12.11 c) On calcule la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 2U_0\beta x\mathrm{e}^{\beta x^2}$$

qui montre que $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$ s'annule pour $x = 0$, qui est donc une position d'équilibre.

Pour étudier sa stabilité, on dérive une seconde fois :

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} = 2U_0\beta(1 + 2\beta x^2)\mathrm{e}^{\beta x^2}$$

qui en $x = 0$ vaut $2U_0\beta > 0$. Cette position d'équilibre est donc bien stable.

.....

12.11 d) On calcule la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\phi} = 2E_0\sin(\phi - a)\cos(\phi - a).$$

Ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\phi}$ s'annule pour $\phi = a$ et $\phi = a + \dfrac{\pi}{2}$, qui sont les positions d'équilibre dans l'intervalle $[0, \pi[$.

Afin d'étudier leur stabilité, on dérive une seconde fois :

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\phi^2} = 2E_0(\cos^2(\phi - a) - \sin^2(\phi - a)).$$

- On calcule ensuite $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\phi^2}(\phi = a) = 2E_0$. Ce dernier terme étant positif, la position d'équilibre $\phi = a$ est donc stable.
- Pour l'autre position d'équilibre, on a $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\phi^2}(\phi = a + \pi/2) = -2E_0$. Cette dérivée seconde étant négative, la position d'équilibre $\phi = a + \pi/2$ est instable.

.....

12.13 d) Le mouvement entre x_2 et x_3 correspond à un état lié : c'est un mouvement dans un puits de potentiel. Comme le mouvement est à un degré de liberté, il est également périodique. Cependant, les positions extrêmes étant éloignées de la position moyenne (d'équilibre x_3^*), ce mouvement n'est pas harmonique.

.....

12.14 On a vu précédemment que les trajectoires correspondant à l'énergie mécanique E_3 sont des états de diffusion, le point matériel peut donc bien s'échapper à l'infini.

Le mouvement du point étant conservatif, on applique la conservation de l'énergie mécanique entre le départ et « l'arrivée » à l'infini : on a

$$E_3 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \qquad \text{donc} \qquad v_\infty = \sqrt{\frac{2E_3}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1\,300\,\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}}{2{,}3\,\mathrm{kg}}} = 33{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

.....

Fiche n° 13. Moment cinétique

Réponses

13.1 a) $\boxed{-\|\vec{P}\|\,\cos\theta}$

13.1 b) $\boxed{\|\vec{N}\|\,\cos(\gamma+\beta)}$

13.1 c) $\boxed{\|\vec{R}\|\,\sin(\theta+\alpha)}$

13.1 d) $\boxed{-\|\vec{T}\|\,\cos(\gamma)}$

13.1 e) $\boxed{\|\vec{N}\|\,\cos(\beta)}$

13.1 f) $\boxed{\|\vec{N}\|\,\sin(\beta)}$

13.2 a) $\boxed{\vec{P}=-\|\vec{P}\|\,\vec{e_y}}$

13.2 b) $\boxed{\|\vec{P}\|(-\sin(\theta)\,\vec{e_r}-\cos(\theta)\,\vec{e_\theta})}$

13.2 c) $\boxed{-\|\vec{T}\|\vec{e_y}}$

13.2 d) $\boxed{\vec{T}=\|\vec{T}\|(-\cos(\gamma)\,\vec{e_r}+\sin(\gamma)\,\vec{e_\theta})}$

13.2 e) $\boxed{\|\vec{R}\|(\cos(\theta+\alpha)\,\vec{e_x}+\sin(\theta+\alpha)\,\vec{e_y})}$

13.2 f) $\boxed{\|\vec{R}\|(\cos(\alpha)\,\vec{e_r}+\sin(\alpha)\,\vec{e_\theta})}$

13.2 g) $\boxed{\|\vec{N}\|(-\sin(\beta+\gamma)\,\vec{e_x}+\cos(\gamma+\beta)\,\vec{e_y})}$

13.2 h) $\boxed{\|\vec{N}\|(\cos(\beta)\,\vec{e_r}+\sin(\beta)\,\vec{e_\theta})}$

13.3 a) $\boxed{\|\vec{P}\|\,\|\vec{R}\|\cos(\theta+\alpha)\,\vec{e_z}}$

13.3 b) $\boxed{-\|\vec{T}\|\sin(\gamma)\,\vec{e_z}}$

13.3 c) $\boxed{\|\vec{N}\|\cos(\gamma+\beta)\,\vec{e_z}}$

13.4 a) $\boxed{\begin{pmatrix}-7\\14\\-7\end{pmatrix}}$

13.4 b) $\boxed{\begin{pmatrix}7\\-14\\7\end{pmatrix}}$

13.4 c) $\boxed{-7}$

13.4 d) $\boxed{-7}$

13.4 e) $\boxed{\begin{pmatrix}-6\\-33\\24\end{pmatrix}}$

13.4 f) $\boxed{\begin{pmatrix}-6\\-33\\24\end{pmatrix}}$

13.5 la Terre

13.6 $\boxed{m\,r\,v\sin(\alpha)\,\vec{e_z}}$

13.7 $\boxed{\frac{1}{3}\,M\,L^2}$

13.8 $\boxed{\frac{1}{12}\,M\,L^2}$

13.9 $\boxed{\frac{2}{5}\,M\,R^2}$

13.10 a) $\boxed{-\ell F\sin\alpha\cos\alpha}$

13.10 b) $\boxed{0}$

13.11 a) $\boxed{\frac{mgL}{2}\,\cos\alpha\,\vec{e_z}}$

13.11 b) $\boxed{-mg\Big(\ell-\frac{L}{2}\cos\alpha\Big)\,\vec{e_z}}$

13.11 c) $\boxed{-mg\Big(\ell-\frac{L}{2}\cos\alpha\Big)\,\vec{e_z}}$

13.12 a) $\boxed{\frac{a}{2}\,\vec{e_X}+a\,\vec{e_Y}}$

13.12 b) $\boxed{\frac{a}{2}\,\vec{e_X}+\frac{a}{3}\,\vec{e_Y}}$

13.12 c) $\boxed{P(-\sin\alpha\,\vec{e_X}-\cos\alpha\,\vec{e_Y})}$

13.12 d) $\boxed{F(-\cos\alpha\,\vec{e_X}+\sin\alpha\,\vec{e_Y})}$

13.12 e) $\boxed{aF\Big(\frac{\sin\alpha}{2}+\cos\alpha\Big)\,\vec{e_z}}$

13.12 f) $\boxed{aP\Big(-\frac{\cos\alpha}{2}+\frac{\sin\alpha}{3}\Big)\,\vec{e_z}}$

13.12 g) $\boxed{\frac{3P-6F}{3F+2P}}$

Corrigés

13.1 a) On calcule $\vec{P} \cdot \vec{e_\theta} = \|\vec{P}\| \times \|\vec{e_\theta}\| \times \cos(\pi + \theta) = -\|\vec{P}\| \cos\theta$.

.....

13.1 c) On calcule $\vec{R} \cdot \vec{e_y} = \|\vec{R}\| \times \|\vec{e_y}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + \alpha)\right) = \|\vec{R}\| \sin(\theta + \alpha)$.

.....

13.1 d) On calcule $\vec{T} \cdot \vec{e_r} = \|\vec{T}\| \times \|\vec{e_r}\| \times \cos(\pi + \gamma) = -\|\vec{T}\| \cos(\gamma)$.

.....

13.1 f) On calcule $\vec{N} \cdot \vec{e_\theta} = \|\vec{N}\| \times \|\vec{e_\theta}\| \times \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \|\vec{N}\| \sin(\beta)$.

.....

13.3 a) On calcule $\vec{P} \wedge \vec{R} = -\|\vec{P}\| \, \vec{e_y} \wedge \|\vec{R}\|(\cos(\theta + \alpha) \, \vec{e_x} + \sin(\theta + \alpha) \, \vec{e_y}) = -\|\vec{P}\| \, \|\vec{R}\| \cos(\theta + \alpha) \, \vec{e_y} \wedge \vec{e_x} + \vec{0}$.

.....

13.3 b) On calcule $\vec{T} \wedge \vec{e_r} = \|\vec{T}\|(-\cos(\gamma) \, \vec{e_r} + \sin(\gamma) \, \vec{e_\theta}) \wedge \vec{e_r} = \|\vec{T}\| \sin(\gamma) \, \vec{e_\theta} \wedge \vec{e_r} = -\|\vec{T}\| \sin(\gamma) \, \vec{e_z}$.

.....

13.3 c) On calcule $\vec{e_x} \wedge \vec{N} = \vec{e_x} \wedge \|\vec{N}\|(-\sin(\beta + \gamma) \, \vec{e_x} + \cos(\gamma + \beta) \, \vec{e_y}) = \|\vec{N}\| \cos(\gamma + \beta) \, \vec{e_x} \wedge \vec{e_y}$.

.....

13.4 a) On calcule $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \times 4 - 3 \times 5\\3 \times 6 - 1 \times 4\\1 \times 5 - 2 \times 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\14\\-7\end{pmatrix}$.

.....

13.4 b) On calcule $\left[\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \wedge \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 \times 3 - 7 \times 2\\7 \times 1 - 7 \times 3\\7 \times 2 - 7 \times 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-14\\7\end{pmatrix}$.

On aurait aussi pu voir que, comme on a $\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}$, cela revient à $\vec{B} \wedge \vec{A} = -\vec{A} \wedge \vec{B}$.

.....

13.4 c) On a déjà calculé $\vec{A} \wedge \vec{B}$ et il suffit de prendre la première coordonnée pour avoir le produit scalaire sur $\vec{e_x}$, qui vaut alors -7.

.....

13.4 d) On calcule d'abord $\vec{B} \wedge \vec{e_x} = \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 \times 0 - 4 \times 0\\4 \times 1 - 6 \times 0\\6 \times 0 - 5 \times 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\-5\end{pmatrix}$ d'où

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{e_x}) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\-5\end{pmatrix} = 1 \times 0 + 2 \times 4 + 3 \times (-5) = 8 - 15 = -7.$$

On retrouve le même résultat que précédemment, ce qui correspond à la propriété du produit mixte : si $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors on a les permutations circulaires $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$.

.....

13.4 e) On calcule d'abord $\vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 \times (-1) - 4 \times 1\\4 \times 0 - 6 \times (-1)\\6 \times 1 - 5 \times 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\6\\6\end{pmatrix}$. On calcule ensuite

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-9\\6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \times 6 - 3 \times 6\\3 \times (-9) - 1 \times 6\\1 \times 6 - 2 \times (-9)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-33\\24\end{pmatrix}.$$

.....

13.4 f) On calcule séparément $\vec{A}\cdot\vec{C} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 1\times 0+2\times 1+3\times(-1) = -1$ et

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix} = 1\times 6+2\times 5+3\times 4 = 28.$$

On a alors

$$(\vec{A}\cdot\vec{C})\,\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{C} = (-1)\times\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}-28\times\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-33\\24\end{pmatrix}.$$

On retrouve le même résultat que précédemment, ce qui correspond à la propriété du double produit vectoriel : si $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors on a $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$.

.....

13.5 Commençons par tout remettre dans les bonnes unités pour pouvoir calculer le produit $m\times r\times v$ qui correspond au moment cinétique, puisque le rayon vecteur est bien perpendiculaire à la vitesse pour une orbite circulaire.

	Masse en kg	Distance en m	Vitesse en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$	Moment cinétique en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Mercure	3×10^{23}	6×10^{10}	5×10^{4}	$3\times 6\times 5\times 10^{37} = 9\times 10^{38}$
Vénus	5×10^{24}	$1{,}1\times 10^{11}$	$3{,}5\times 10^{4}$	$5\times 1{,}1\times 10^{39}\times\dfrac{7}{2}\approx 2\times 10^{40}$
Terre	6×10^{24}	$1{,}5\times 10^{11}$	3×10^{4}	$6\times\dfrac{3}{2}\times 3\times 10^{39} = 2{,}7\times 10^{40}$
Mars	6×10^{23}	$2{,}3\times 10^{11}$	$2{,}4\times 10^{4}$	$\leqslant 6\times 10^{38}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{5}{2}\approx 3{,}7\times 10^{39}$

C'est bien la Terre qui gagne finalement le concours du plus grand moment cinétique.

.....

13.6 Le vecteur vitesse s'écrit dans la base $(\vec{e_r},\vec{e_\theta})$ comme $\vec{v} = v(\cos\alpha\,\vec{e_r}+\sin\alpha\,\vec{e_\theta})$. Le produit vectoriel avec $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ s'écrit alors

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge m\,\vec{v} = r\,\vec{e_r}\wedge m\,v(\cos\alpha\,\vec{e_r}+\sin\alpha\,\vec{e_\theta}) = m\,r\,v\sin\alpha\,\vec{e_r}\wedge\vec{e_\theta}.$$

.....

13.7 On calcule

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \rho\int_0^L x^2\,\mathrm{d}x\times\int_0^e \mathrm{d}y\times\int_0^h \mathrm{d}z\\ &= \frac{M}{Lhe}\int_0^L x^2\,\mathrm{d}x\times e\times h\\ &= \frac{M}{L}\int_0^L x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3}ML^2 \end{aligned}$$

.....

13.8 On calcule $I_\Delta = \displaystyle\int_{-L/2}^{L/2}\frac{M}{L}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L}\times 2\,\frac{L^3/8}{3} = \frac{1}{12}ML^2$.

.....

13.9 On calcule les trois intégrales indépendamment. On a bien sûr $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi$ et $\displaystyle\int_0^R r^4 \,\mathrm{d}r = \frac{R^5}{5}$. Reste l'intégrale sur θ qui peux se résoudre avec un changement de variable en $u = \cos\theta$ (qui donne $\mathrm{d}u = -\sin\theta \,\mathrm{d}\theta$) :

$$\int_0^\pi \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_1^{-1} -(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Finalement, on obtient $I_\Delta = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \dfrac{R^5}{5} \times \dfrac{4}{3} \times 2\pi = \dfrac{2}{5} M R^2$.

.....

13.10 a) D'une part, on commence par déterminer l'expression du vecteur $\vec{F}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$. On a ici en notant F la norme du vecteur : $\vec{F} = F(\cos\alpha\,\vec{e_x} - \sin\alpha\,\vec{e_y})$.
D'autre part, en notant M le point d'action de $\vec{F}$, on a que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \ell\sin\alpha\,\vec{e_y}$. On peut alors calculer

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_\mathrm{O}}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} = \ell\sin\alpha\,\vec{e_y} \wedge F(\cos\alpha\,\vec{e_x} - \sin\alpha\,\vec{e_y}) = \ell F \sin\alpha\cos\alpha\,(-\vec{e_z}).$$

.....

13.11 a) Dans cette configuration, le bras de levier vaut $\dfrac{L}{2}\cos\alpha$ et le point fait tourner dans le sens trigonométrique autour de A, de sorte que $\overrightarrow{\mathcal{M}_\mathrm{A}}(\vec{P}) = \dfrac{mgL}{2}\cos\alpha\,\vec{e_z}$.

.....

13.11 b) Cette fois-ci, le poids fait tourner dans le sens horaire autour de O avec un bras de levier complémentaire du précédent de $\ell - \dfrac{L}{2}\cos\alpha$, d'où le résultat.

.....

13.11 c) Même chose que précédemment, I et O étant à la verticale l'un de l'autre.

.....

13.12 a) On décompose $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}} = \dfrac{a}{2}\,\vec{e_X} + a\,\vec{e_Y}$.

.....

13.12 b) On décompose $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{IG}} = \dfrac{a}{2}\,\vec{e_X} + \dfrac{a}{3}\,\vec{e_Y}$.

.....

13.12 c) On a $\vec{P} = (\vec{P}\cdot\vec{e_X})\,\vec{e_X} + (\vec{P}\cdot\vec{e_Y})\,\vec{e_Y} = P\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\vec{e_X} + \cos(\pi+\alpha)\,\vec{e_Y}\right] = P(-\sin\alpha\,\vec{e_X} - \cos\alpha\,\vec{e_Y})$.

.....

13.12 d) On a $\vec{F} = (\vec{F}\cdot\vec{e_X})\,\vec{e_X} + (\vec{F}\cdot\vec{e_Y})\,\vec{e_Y} = F\left[\cos(\pi+\alpha)\,\vec{e_X} + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\vec{e_Y}\right] = F(-\cos\alpha\,\vec{e_X} + \sin\alpha\,\vec{e_Y})$.

.....

13.12 g) Pour qu'il y ait équilibre, la somme des deux moments doit s'annuler. Les deux étant suivant $\vec{e_z}$, on doit avoir

$$aF\left(\frac{\sin\alpha}{2} + \cos\alpha\right) + aP\left(-\frac{\cos\alpha}{2} + \frac{\sin\alpha}{3}\right) = 0.$$

En divisant par $a\cos\alpha$, il vient

$$\frac{F\tan\alpha}{2} + F - \frac{P}{2} + \frac{P\tan\alpha}{3} = 0.$$

On obtient donc

$$\tan\alpha = \frac{\frac{P}{2} - F}{\frac{F}{2} + \frac{P}{3}} = \frac{3P - 6F}{3F + 2P}.$$

.....

Fiche n° 14. Champ électrique

Réponses

14.1 a) $\boxed{\sqrt{a^2+y^2}}$

14.1 b) $\boxed{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}}$

14.1 c) $\boxed{\dfrac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}}$

14.1 d) $\boxed{\dfrac{\|\vec{F}\|}{\sqrt{a^2+y^2}}(-a\vec{e_x}+y\vec{e_y})}$

14.2 $\boxed{\text{c}}$

14.3 a) $\boxed{\vec{e_y}}$

14.3 b) $\boxed{-\vec{e_x}}$

14.3 c) $\boxed{\vec{e_x}}$

14.3 d) $\boxed{-\vec{e_y}}$

14.4 a) $\boxed{\text{b}}$

14.4 b) $\boxed{qV_0}$

14.4 c) $\boxed{\sqrt{\dfrac{2qV_0}{m}}}$

14.4 d) $\boxed{\sqrt{\dfrac{qV_0}{2m}}}$

14.4 e) $\boxed{\dfrac{v(a)}{2}}$

14.5 a) $\boxed{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$

14.5 b) $\boxed{x^2+y^2}$

14.5 c) $\boxed{\sqrt{r^2-2ax+a^2}}$

14.5 d) $\boxed{r\cos(\theta)}$

14.5 e) $\boxed{\sqrt{r^2-2ar\cos(\theta)+a^2}}$

14.5 f) $\boxed{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{r^2-2ar\cos(\theta)+a^2}}}$

14.5 g) $\boxed{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$

14.5 h) $\boxed{\sqrt{r^2+2ax+a^2}}$

14.5 i) $\boxed{\sqrt{r^2+2ar\cos(\theta)+a^2}}$

14.5 j) $\boxed{-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{r^2+2ar\cos(\theta)+a^2}}}$

14.5 k) $\boxed{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\Big(\dfrac{1}{\sqrt{r^2-2ar\cos(\theta)+a^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{r^2+2ar\cos(\theta)+a^2}}\Big)}$

14.6 a) $\boxed{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}\left(1-\dfrac{2a}{r}\right)}$

14.6 b) $\boxed{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qa\cos(\theta)}{r^2}}$

14.6 c) $\boxed{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qa}{r^2}\left(1-\dfrac{1}{2}\theta^2\right)}$

14.6 d) $\boxed{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qa}{r^2}}$

14.6 e) $\boxed{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}\ln\left(1+\dfrac{r^2}{a^2}\right)}$

14.7 a) $\boxed{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}(\sin(2\theta)\vec{e_r}-2\cos(2\theta)\vec{e_\theta})}$

14.7 b) $\boxed{-\dfrac{8}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{a^2}\vec{e_\theta}}$

14.7 c) $\boxed{2{,}7\cdot10^5\ \text{V.m}^{-1}}$

14.8 a) $\boxed{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qa}{r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r}+\sin(\theta)\vec{e_\theta})}$

14.8 b) $\boxed{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{a^2}\vec{e_\theta}}$

14.8 c) $\boxed{3{,}4\cdot10^4\ \text{V.m}^{-1}}$

14.9 a) $\boxed{\dfrac{1}{2}E_0 d}$

14.9 b) ..... $\boxed{\frac{1}{3}E_0 d}$

14.9 c) ..... $\boxed{\frac{2}{3\pi}E_0 d}$

14.9 d) ..... $\boxed{E_0 d e^{-1}}$

14.10 a) ..... $\boxed{\frac{8}{3}\pi R^3 \rho_0}$

14.10 b) ..... $\boxed{\frac{8}{5}\pi R^3 \rho_0}$

14.10 c) ..... $\boxed{\frac{16}{5}R^3 \rho_0}$

14.11 a) ..... $\boxed{3\pi R^2 h}$

14.11 b) ..... $\boxed{\frac{4}{5}\pi R^2 h}$

14.11 c) ..... $\boxed{\frac{8}{15}R^2 h}$

Corrigés

14.1 a) Dans le triangle rectangle OAB, on a $\mathrm{BA} = \sqrt{a^2 + y^2}$.

.....

14.1 b) Dans le triangle rectangle OAB, on a $\cos(\alpha) = \dfrac{a}{\mathrm{BA}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}$.

.....

14.1 c) Dans le triangle rectangle OAB, on a $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{\mathrm{BA}} = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$.

.....

14.1 d) La composante suivant $\vec{e_x}$ correspond au produit scalaire

$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{e_x} = \|\vec{F}\| \cos(\alpha + \pi) = -\|\vec{F}\| \cos(\alpha).$$

De même, la composante suivant $\vec{e_y}$ correspond à

$$F_y = \vec{F} \cdot \vec{e_y} = \|\vec{F}\| \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \|\vec{F}\| \sin \alpha.$$

Ainsi, on a

$$F_x = -\|\vec{F}\| \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad F_y = \|\vec{F}\| \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}.$$

Finalement, on a

$$\vec{F} = F_x \vec{e_x} + F_y \vec{e_y} = \frac{\|\vec{F}\|}{\sqrt{a^2 + y^2}}(-a\vec{e_x} + y\vec{e_y}).$$

.....

14.2 Une force attractive a une valeur négative, la charge qui attire le plus est donc la charge avec la force négative la plus importante en valeur absolue, soit la réponse (c). En effet, on a

(a) $F/C = \dfrac{2{,}00\,\mathrm{C}}{(4{,}00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2} = 1{,}25 \cdot 10^5\,\mathrm{C.m^{-2}}$

(b) $F/C = \dfrac{-5{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{C}}{(0{,}4\,\mathrm{m})^2} = -3{,}1 \cdot 10^4\,\mathrm{C.m^{-2}}$

(c) $F/C = \dfrac{-3{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}}{(200 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m})^2} = -7{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{C.m^{-2}}$

(d) $F/C = \dfrac{100\,\mathrm{C}}{(20 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2} = 2{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{C.m^{-2}}$

.....

14.3 a) On a $q_0 q_1 = q^2$ et $q_0 q_2 = q^2$ donc $\vec{F}_{1/0} = -F_x\vec{e_x} + F_y\vec{e_y}$ et $\vec{F}_{2/0} = F_x\vec{e_x} + F_y\vec{e_y}$. Ainsi, la somme des deux forces est $\vec{F} = 2F_y\vec{e_y}$.

.....

14.3 b) On a $q_0q_1 = q^2$ et $q_0q_2 = -q^2$ donc $\vec{F}_{1/0} = -F_x\vec{e_x} + F_y\vec{e_y}$ et $\vec{F}_{2/0} = -F_x\vec{e_x} - F_y\vec{e_y}$. Ainsi, la somme des deux forces est $\vec{F} = -2F_x\vec{e_x}$.

.....

14.3 c) On a $q_0q_1 = -q^2$ et $q_0q_2 = q^2$ donc $\vec{F}_{1/0} = F_x\vec{e_x} - F_y\vec{e_y}$ et $\vec{F}_{2/0} = F_x\vec{e_x} + F_y\vec{e_y}$. Ainsi, la somme des deux forces est $\vec{F} = 2F_x\vec{e_x}$.

.....

14.3 d) On a $q_0q_1 = -2q^2$ et $q_0q_2 = -2q^2$ donc $\vec{F}_{1/0} = F_x\vec{e_x} - F_y\vec{e_y}$ et $\vec{F}_{2/0} = -F_x\vec{e_x} - F_y\vec{e_y}$. Ainsi, la somme des deux forces est $\vec{F} = -2F_y\vec{e_y}$.

.....

14.4 a) Comme V_0 est homogène à un potentiel électrique, l'argument entre parenthèses doit être sans dimension, ce qui est le cas dans l'expression

$$V(x) = V_0\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right).$$

.....

14.4 b) En $x = 0$ la vitesse est nulle donc $\mathrm{C^{te}} = \frac{1}{2}mv^2(0) + qV(0) = qV\left(1 - \left(\frac{0}{a}\right)^2\right) = qV_0$.

.....

14.4 c) On a

$$qV_0 = \frac{1}{2}mv^2(a) + qV(a) = \frac{1}{2}mv^2(a) + qV\left(1 - \left(\frac{a}{a}\right)^2\right) = \frac{1}{2}mv^2(a).$$

Donc on a $v(a) = \sqrt{\dfrac{2qV_0}{m}}$.

.....

14.4 d) On a

$$qV_0 = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{a}{2}\right) + qV_0\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{a}{2}\right) + qV_0\left(1 - \left(\frac{a}{2a}\right)^2\right) = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{3}{4}qV_0$$

Donc, on a

$$\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{4}qV_0 \qquad \text{et donc} \qquad v\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{qV_0}{2m}}.$$

.....

14.4 e) On a

$$v\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{qV_0}{2m}} = \sqrt{\frac{2qV_0}{4m}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2qV_0}{m}} = \frac{v(a)}{2}.$$

.....

14.5 a) Dans le triangle xBM, on a $\mathrm{BM} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$.

.....

14.5 b) Dans le triangle xOM, on a $r^2 = x^2 + y^2$.

.....

14.5 c) En utilisant l'expression de r^2 en fonction de x, y, on a

$$\mathrm{BM} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2ax + a^2} = \sqrt{r^2 - 2ax + a^2}.$$

.....

14.5 d) Dans le triangle xOM, on a $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$ et donc $x = r\cos(\theta)$.

.....

14.5 e) En utilisant l'expression de x en fonction de r, θ, on peut écrire

$$\mathrm{BM} = \sqrt{r^2 - 2ax + a^2} = \sqrt{r^2 - 2ar\cos(\theta) + a^2}.$$

.....

14.5 f) En utilisant les expressions de $V_1(\mathrm{M})$ et de BM en fonction de r, a, θ, on a

$$V_1(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\mathrm{BM}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos(\theta) + a^2}}.$$

.....

14.5 g) Dans le triangle $x\mathrm{CM}$, on a $\mathrm{CM} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$.

.....

14.5 h) En utilisant l'expression de r^2 en fonction de x, y, on a

$$\mathrm{CM} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2ax + a^2} = \sqrt{r^2 + 2ax + a^2}.$$

.....

14.5 i) En utilisant l'expression de x en fonction de r, θ, on a $\mathrm{CM} = \sqrt{r^2 + 2ax + a^2} = \sqrt{r^2 + 2ar\cos(\theta) + a^2}$.

.....

14.5 j) En utilisant les expressions de $V_2(\mathrm{M})$ et CM en fonction de r, a, θ, on a

$$V_2(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{\mathrm{CM}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2 + 2ar\cos(\theta) + a^2}}.$$

.....

14.5 k) En utilisant les expressions de $V_1(\mathrm{M})$ et $V_2(\mathrm{M})$, on trouve

$$V(\mathrm{M}) = V_1(\mathrm{M}) + V_2(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos(\theta) + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2ar\cos(\theta) + a^2}}\right).$$

.....

14.6 a) À l'ordre 1, on a $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$. Ainsi, on a $V\left(\frac{a}{r}\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\left(1 - \frac{4a}{2r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\left(1 - \frac{2a}{r}\right)$.

.....

14.6 b) À l'ordre 1, on a $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$. Ainsi, on a

$$V\left(\frac{a}{r}\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos(\theta) - \left(1 - \frac{a}{2r}\cos(\theta)\right)\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa\cos(\theta)}{r^2}.$$

.....

14.6 c) À l'ordre 2, on a $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$. Ainsi, on a $V(\theta) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{r^2}\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)$.

.....

14.6 d) À l'ordre 1, on a $\ln(1+x) \approx x$. Ainsi, on a $V\left(\frac{a}{r}\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\frac{a}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{r^2}$.

.....

14.6 e) À l'ordre 1, on a $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$. Ainsi, on a

$$V\left(\frac{a}{r}\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\ln\left(\frac{1 + \frac{2a^2}{r^2} + 1}{1 + \frac{2a^2}{r^2} - 1}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\ln\left(\frac{2 + \frac{2a^2}{r^2}}{\frac{2a^2}{r^2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\ln\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right).$$

.....

14.7 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\mathrm{M}) &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\sin(2\theta)}{r}\right)\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\sin(2\theta)}{r}\right)\vec{e_\theta}\\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(\sin(2\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\sin(2\theta)}{\partial\theta}\vec{e_\theta}\right)\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}(\sin(2\theta)\vec{e_r} - 2\cos(2\theta)\vec{e_\theta}).\end{aligned}$$

.....

14.7 b) Pour $\mathrm{M}\left(r=\frac{a}{2},\theta=\pi\right)$ le champ est $\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}(\sin(2\pi)\vec{e_r} - 2\cos(2\pi)\vec{e_\theta}) = -\frac{8}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}\vec{e_\theta}$.

.....

14.7 c) On a

$$\|\vec{E}(\mathrm{M})\| = \frac{8}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2} = \frac{8}{4\pi\times 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C.V^{-1}.m^{-1}}}\frac{6{,}0\cdot 10^{-11}\,\mathrm{C}}{(4{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2} = 2{,}7\cdot 10^5\,\mathrm{V.m^{-1}}.$$

.....

14.8 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\mathrm{M}) &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa\cos(\theta)}{r^2}\right)\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa\cos(\theta)}{r^2}\right)\vec{e_\theta}\\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qa\left(\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\cos(\theta)}{\partial\theta}\vec{e_\theta}\right)\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} + \sin(\theta)\vec{e_\theta}).\end{aligned}$$

.....

14.8 b) Pour $\mathrm{M}\left(r=a,\theta=\frac{\pi}{2}\right)$ le champ est

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{a^3}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{e_r} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{e_\theta}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}\vec{e_\theta}.$$

.....

14.8 c) On a

$$\|\vec{E}(\mathrm{M})\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2} = \frac{1}{4\pi\times 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C.V^{-1}.m^{-1}}}\frac{6{,}0\cdot 10^{-11}\,\mathrm{C}}{(4{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2} = 3{,}4\cdot 10^4\,\mathrm{V.m^{-1}}.$$

.....

14.9 a) On a $V(0) = \displaystyle\int_0^d E_0\left(1-\frac{x}{d}\right)\mathrm{d}x = E_0\left[-\frac{d}{2}\left(1-\frac{x}{d}\right)^2\right]_0^d = \frac{1}{2}E_0 d.$

.....

14.9 b) On a $V(0) = \displaystyle\int_0^d E_0\left(1-\frac{x}{d}\right)^2\mathrm{d}x = E_0\left[-\frac{d}{3}\left(1-\frac{x}{d}\right)^3\right]_0^d = \frac{1}{3}E_0 d.$

.....

14.9 c) On a $V(0) = \displaystyle\int_0^d E_0\sin\left(\frac{3\pi}{2}\frac{x}{d}\right)\mathrm{d}x = E_0\left[-\frac{2d}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\frac{x}{d}\right)\right]_0^d = \frac{2}{3\pi}E_0 d.$

.....

14.9 d) On a $V(0) = \displaystyle\int_0^d E_0\left(1-\mathrm{e}^{-x/d}\right)\mathrm{d}x = E_0\Big[x\Big]_0^d - E_0\Big[-d\mathrm{e}^{-x/d}\Big]_0^d = E_0 d\mathrm{e}^{-1}.$

.....

14.10 a) On calcule

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} 2\rho_0 r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{R} r^2\,\mathrm{d}r = 2\rho_0\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}\times\Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\pi}\times\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^{R} \\ &= 2\rho_0(2\pi-0)(-\cos\pi+\cos 0)\left(\frac{R^3}{3}-\frac{0}{3}\right) = 2\rho_0\times 2\pi\times 2\times\frac{R^3}{3} = \frac{8}{3}\pi R^3\rho_0. \end{aligned}$$

14.10 b) On calcule

$$\begin{aligned} Q &= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{R}\Big(\frac{r}{R}\Big)^2\rho_0 r^2\,\mathrm{d}r = 2\rho_0\times 2\pi\times 2\times\int_0^{R}\frac{r^4}{R^2}\,\mathrm{d}r \\ &= 8\rho_0\pi\left[\frac{1}{5}\frac{r^5}{R^2}\right]_0^{R} = 8\pi\left(\frac{1}{5}\frac{R^5}{R^2}-\frac{1}{5}\frac{0}{R^2}\right)\rho_0 = \frac{8}{5}\pi R^3\rho_0. \end{aligned}$$

14.10 c) On calcule

$$\begin{aligned} Q &= 2\int_0^{2\pi}\sin\Big(\frac{\varphi}{2}\Big)\rho_0\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{R}\Big(\frac{r}{R}\Big)^2 r^2\,\mathrm{d}r = 2\rho_0\times\Big[-2\cos\frac{\varphi}{2}\Big]_0^{2\pi}\times 2\times\frac{1}{5}R^3 \\ &= \frac{4}{5}R^3(-2\cos\pi+2\cos 0)\rho_0 = \frac{4}{5}R^3(2+2)\rho_0 = \frac{16}{5}R^3\rho_0. \end{aligned}$$

14.11 a) On calcule

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{h}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} 3r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = 3\int_0^{h}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R} r\,\mathrm{d}r = 3\Big[z\Big]_0^{h}\times\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}\times\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^{R} \\ &= 3(h-0)(2\pi-0)\left(\frac{R^2}{2}-0\right) = 3\pi R^2 h. \end{aligned}$$

14.11 b) On calcule

$$\begin{aligned} Q &= 2\int_0^{h}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R}\Big(\frac{r}{R}\Big)^3 r\,\mathrm{d}r = 2\times h\times 2\pi\int_0^{R}\frac{r^4}{R^3}\,\mathrm{d}r \\ &= 4\pi h\left[\frac{1}{5}\frac{r^5}{R^3}\right]_0^{R} = 4\pi h\left(\frac{1}{5}\frac{R^5}{R^3}-\frac{1}{5}\frac{0}{R^3}\right) = \frac{4}{5}\pi R^2 h. \end{aligned}$$

14.11 c) On calcule

$$\begin{aligned} Q &= 2\int_0^{h}\Big(\frac{z}{h}\Big)^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{R}\Big(\frac{r}{R}\Big)^3 r\,\mathrm{d}r = 2\times\frac{1}{5}R^2\left[\frac{1}{3}\frac{z^3}{h^2}\right]_0^{h}\Big[-2\cos\frac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2}{5}R^2\left(\frac{1}{3}\frac{h^3}{h^2}-\frac{1}{3}\frac{0}{h^2}\right)(-2\cos\pi+2\cos 0) = \frac{2}{5}R^2\times\frac{1}{3}h\times 4 = \frac{8}{15}R^2 h. \end{aligned}$$

Fiche n° 15. Particule dans un champ électromagnétique

Réponses

15.1 a) ..... $\boxed{6{,}3 \times 10^{18}\,\text{eV}}$

15.1 b) ..... $\boxed{1{,}55\,\text{eV}}$

15.1 c) ..... $\boxed{5{,}0 \times 10^{-19}\,\text{J}}$

15.1 d) ..... violet

15.2 ..... tau

15.3 a) ..... (b)

15.3 b) ..... (a)

15.4 a) ..... $\boxed{-Ex + C}$

15.4 b) ..... $\boxed{\frac{\alpha}{r} + C}$

15.4 c) ..... $\boxed{-\beta \ln(r) + C}$

15.4 d) ..... $\boxed{-\gamma xy + C}$

15.5 a) ..... $\boxed{qE\overrightarrow{e_y}}$

15.5 b) ..... $\boxed{|qE|\overrightarrow{e_x}}$

15.5 c) . $\boxed{qE\big(\cos(\beta)\overrightarrow{e_y} - \sin(\beta)\overrightarrow{e_x}\big)}$

15.6 a) ..... $\boxed{|q|vB\overrightarrow{e_y}}$

15.6 b) ..... $\boxed{qvB\cos(\alpha)\overrightarrow{e_z}}$

15.6 c) . $\boxed{-qvB\big(\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x} + \sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}\big)}$

15.7 a) ..... $\boxed{0}$

15.7 b) ..... $\boxed{qEv}$

15.7 c) ..... $\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}qEv}$

15.7 d) ..... $\boxed{-\frac{qEv}{2}}$

15.8 a) ..... $\boxed{\sqrt{3}\frac{mv_0}{qE}}$

15.8 b) ..... $\boxed{\sqrt{3}\frac{mv_0}{qE}}$

15.8 c) ..... $\boxed{\frac{\pi}{3}}$

15.9 a) ..... $\boxed{1{,}5\,\text{MV}}$

15.9 b) ..... (b) et (c)

15.9 c) ..... (a)

15.9 d) ..... $\boxed{nqU}$

15.9 e) ..... $\boxed{5}$

15.10 a) ..... $\boxed{\frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}}$

15.10 b) ..... $\boxed{R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}}$

15.10 c) ..... $\boxed{qRB\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}}$

15.10 d) ..... $\boxed{R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}}$

15.10 e) ..... $\boxed{\frac{mv_0}{|q|B}}$

15.10 f) ..... $\boxed{2\pi\frac{m}{|q|B}}$

15.11 a) ..... $\boxed{q(E - v_0 B)\overrightarrow{e_y}}$

15.11 b) ..... $\boxed{v_0 = \frac{E}{B}}$

Corrigés

15.1 a) On a $1\,\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}$, $1\,\text{J} = 1/1{,}6 \times 10^{-19}\text{eV} = 6{,}3 \times 10^{18}\,\text{eV}$.

15.1 b) On a $2{,}48 \times 10^{-19}\,\text{J} = 2{,}48 \times 10^{-19}\,\text{J} \times 6{,}3 \times 10^{18}\,\text{eV/J} = 1{,}55\,\text{eV}$.

15.1 c) On a $3{,}1\,\text{eV} = 3{,}1\,\text{eV} \times 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J/eV} = 5{,}0 \times 10^{-19}\,\text{J}$.

15.1 d) On peut comparer les énergies en eV : $E_{\text{violet}} = 3{,}1\,\text{eV} > 1{,}55\,\text{eV} = E_{\text{rouge}}$.

15.2 On a $1\,\text{erg} = 1\,\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 10^{-3} \times \left(10^{-2}\right)^2 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 1 \times 10^{-7}\,\text{J}$.

Avec $c = 3{,}00 \times 10^8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, la masse de kaon peut s'écrire en kg :

$$m_{\text{kaon}} = \frac{7{,}90 \times 10^{-11}\,\text{J}}{\left(3{,}00 \times 10^8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}\right)^2} = 8{,}78 \times 10^{-28}\,\text{kg}.$$

Comme $1\,\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}$, on a

$$m_{\text{tau}} = \frac{1\,777 \times 10^6 \times 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}}{\left(3{,}00 \times 10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\right)^2} = 3{,}16 \times 10^{-27}\,\text{kg}.$$

C'est donc la particule tau la plus massique.

.....

15.3 a) Le champ est d'autant plus intense en norme que les équipotentielles sont proches : pour un même déplacement $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ la variation du potentiel électrique est plus importante.

.....

15.3 b) Le champ électrique est orienté dans le sens des potentiels décroissants et orthogonal aux équipotentielles. Le champ est donc orienté vers le haut à droite.

.....

15.4 a) En effet, on commence par trouver $\mathrm{d}V(\mathrm{M}) = -E\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(-Ex + C)$.

.....

15.4 b) En effet, on commence par trouver $\mathrm{d}V(\mathrm{M}) = -\alpha\dfrac{\mathrm{d}r}{r^2} = \mathrm{d}\left(\dfrac{\alpha}{r} + C\right)$.

.....

15.4 c) En effet, on commence par trouver $\mathrm{d}V(\mathrm{M}) = -\beta\dfrac{\mathrm{d}r}{r} = \mathrm{d}(-\beta\ln(r) + C)$.

.....

15.4 d) En effet, on commence par trouver $\mathrm{d}V(\mathrm{M}) = -\gamma(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(-\gamma xy + C)$.

.....

15.5 a) La force est indépendante de la vitesse. On trouve $\overrightarrow{F}_{L,\text{électrique}} = q\overrightarrow{E} = qE\overrightarrow{e_y}$.

.....

15.5 b) On trouve $\overrightarrow{F}_{L,\text{électrique}} = q\overrightarrow{E} = |qE|\overrightarrow{e_x}$.

.....

15.5 c) On trouve $\overrightarrow{F}_{L,\text{électrique}} = q\overrightarrow{E} = qE(\cos\beta\overrightarrow{e_y} - \sin\beta\overrightarrow{e_x})$ avec β l'angle orienté ($\beta < 0$).

.....

15.6 b) On trouve $qvB\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\overrightarrow{e_z} = qvB\cos(\alpha)\overrightarrow{e_z}$.

.....

15.7 a) La puissance est $\mathcal{P} = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v} = q\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{v} = qEv_x$ avec v_x la composante de la vitesse suivant $\overrightarrow{e_x}$ ($v_x = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e_x}$). On a donc $\mathcal{P}_{\text{A}} = 0$.

.....

15.7 b) De même, on calcule $\mathcal{P}_{\text{B}} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)qEv = qEv$.

.....

15.7 c) De même, on calcule $\mathcal{P}_{\text{C}} = 3\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)qEv = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}qEv$.

.....

15.7 d) De même, on calcule $\mathcal{P}_{\text{D}} = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)qEv = -\dfrac{qEv}{2}$.

.....

15.8 a) Comme t_0 est l'instant où la norme de la vitesse est double, on a $4v_0^2 = v_0^2 + \left(\dfrac{qE}{m}t_0\right)^2$, donc $t_0 = \sqrt{3}\dfrac{mv_0}{qE}$.

.....

15.8 b) L'énergie cinétique quadruple lorsque la vitesse double. On a donc $t_0 = t_1$.

.....

15.8 c) À l'instant $t = t_0 = t_1$, la vitesse peut s'écrire :

$$\vec{v} = v_0\vec{e_x} + \sqrt{3}v_0\vec{e_y} = 2v_0\left(\frac{1}{2}\vec{e_x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_y}\right) = 2v_0\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_x} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_y}\right).$$

15.9 a) On a $U_{\max} = E_{\max}d = 3 \times 10^7\,\mathrm{V\cdot m^{-1}} \times 5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} = 1{,}5\,\mathrm{MV}$.

15.9 b) L'énergie en sortie est $\mathcal{E}_c(\mathrm{S}) = qU_{\max} = 1{,}5\,\mathrm{MeV} = 2{,}4 \times 10^{-13}\,\mathrm{J}$.

15.9 c) La récurrence de la suite est de la forme $\mathcal{E}_{c,n} = \mathcal{E}_{c,n-1} + qU$. C'est une suite arithmétique.

15.9 e) Déjà, on a : $nqU \geqslant \frac{1}{2}m\left(\frac{c}{10}\right)^2 \iff n \geqslant \frac{mc^2}{200qU}$. Comme $\left\lceil \frac{mc^2}{200qU} \right\rceil = 5$, on en déduit qu'il faut au moins 5 condensateurs.

15.10 a) Les forces s'appliquant à la particule sont le poids et la force de Lorentz, mais on néglige le poids. Par ailleurs, il n'y a pas de champ électrique, donc $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ d'où $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$.

15.10 b) Le mouvement est circulaire. Donc, en coordonnées polaires, on a $\overrightarrow{\mathrm{CM}} = R\vec{e_r}$. Donc, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$.

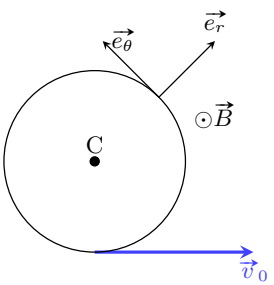
15.10 c) On peut maintenant calculer le produit vectoriel $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qR\dot{\theta}\vec{e_\theta} \wedge B\vec{e_z} = qRB\dot{\theta}\vec{e_r}$.

15.10 d) On déduit de la vitesse $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{e_r}$.

15.10 e) On résout la question et on représente la situation.

En utilisant le principe fondamental de la dynamique et en projetant sur les axes $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$

$$\begin{cases} -R\dot{\theta}^2 = \frac{q}{m}RB\dot{\theta} \\ R\ddot{\theta} = 0. \end{cases}$$



En utilisant le fait que $R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R}$ et $R\dot{\theta} = v_0$, on obtient d'après la première ligne $-\frac{v_0^2}{R} = \frac{q}{m}Bv_0$. Ainsi, on trouve $R = -\frac{mv_0}{qB}$. Comme $q < 0$, on a $|q| = -q$ et on a donc $R = \frac{mv_0}{|q|B}$.

15.10 f) Le périmètre du cercle parcouru vaut $L = 2\pi R$ et donc $T = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi\frac{mv_0}{|q|B}\frac{1}{v_0} = 2\pi\frac{m}{|q|B}$.

15.11 a) L'expression générale de la force de Lorentz est $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, soit ici

$$\vec{F}_L = q(E\vec{e_y} + v_0\vec{e_x} \wedge B\vec{e_z}) = q(E - v_0B)\vec{e_y}.$$

15.11 b) Pour que le mouvement soit rectiligne uniforme, il faut que le vecteur accélération soit nul. D'après le principe fondamental de la dynamique, il faut donc que la force exercée soit nulle, soit $q(E - v_0B)\vec{e_y} = \vec{0} \Rightarrow v_0 = \frac{E}{B}$.

Fiche nº 16. Champ magnétique

Réponses

16.1 ..... oui

16.1 ..... oui

16.2 ..... (d)

16.3 a) ..... $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d \tan(\alpha)}$

16.3 b) ..... 20,8 µT

16.4 ..... (c)

16.5 ..... $\dfrac{\pi}{2} B_0 R^2$

16.6 a) ..... $\dfrac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\dfrac{D + a/2}{D - a/2}\right)$

16.6 b) ..... $\phi \approx \dfrac{\mu I a^2}{2\pi D}$

16.6 c) ..... nul

16.7 a) ..... $B_0(1 + \cos(\alpha))\vec{e_x} + B_0 \sin(\alpha)\vec{e_y}$

16.7 b) ..... $B_0\sqrt{2(1 + \cos(\alpha))}$

16.7 c) ..... 34,6 mT

16.8 a) ..... $\dfrac{a}{\cos(\theta)}$

16.8 b) ..... $-\sin(\theta)\vec{e_x} + \cos(\theta)\vec{e_y}$

16.8 c) ..... $-\sin(\theta)\vec{e_x} - \cos(\theta)\vec{e_y}$

16.8 d) ..... $-2B_0 \sin(\theta)\vec{e_x}$

16.8 e) ..... $-\dfrac{y}{a^2 + y^2}$

16.8 f) ..... en $y = \pm a$

16.9 a) ..... (a)

16.9 b) ..... (b)

16.10 a) ..... (c)

16.10 b) ..... (b)

16.10 c) ..... (b)

16.11 a) ..... (c)

16.11 b) ..... (c)

16.12 a) ..... $\dfrac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$

16.12 b) ..... $\dfrac{R^3}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}$

16.12 c) ..... $\dfrac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\, R}$

16.12 d) ..... $R\sqrt{2^{5/3} - 1}$

16.13 a) ..... (a)

16.13 b) ..... (c)

16.14 a) ... $\dfrac{\mu_0 n I}{2}\left(\dfrac{z + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{\ell}{2}\right)^2}} - \dfrac{z - \frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{\ell}{2}\right)^2}}\right)$

16.14 b) ..... $\dfrac{\mu_0 n I \ell}{\sqrt{4R^2 + \ell^2}}$

16.14 c) ..... $\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{4R^2 + \ell^2}}{\sqrt{R^2 + \ell^2}}$

16.14 d) ..... $\mu_0 n I$

16.15 a) ..... $B_0 \dfrac{\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{e}{\delta}\right)}$.

16.15 b) ..... $\dfrac{B(0)}{B_0} \approx 1$

16.15 c) ..... $\boxed{\dfrac{B(0)}{B_0} \approx 9 \times 10^{-5}}$

16.16 a) ..... $\boxed{r^2 + \dfrac{\omega_0 r}{Q} + \omega_0^2 = 0}$

16.16 b) ..... $\boxed{\left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2)}$

16.16 c) ..... $\boxed{\Delta < 0}$

16.16 d) ..... $\boxed{B_0}$

16.16 e) .. $\boxed{B_0 + \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\lambda \cos\left(\dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\right) + \mu \sin\left(\dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\right)\right)}$

16.16 f) .. $\boxed{B_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\left(\cos\left(\dfrac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\right) + \dfrac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin\left(\dfrac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\right)\right)\right.}$

16.17 ..... $\boxed{(1, -1, 1)}$

Corrigés

16.2 La force cherchée s'écrit $\vec{F} = -ev_0B_0(\vec{e_x} \wedge \vec{e_y} + \vec{e_x} \wedge \vec{e_z}) = ev_0B_0(\vec{e_y} - \vec{e_z})$.

.....

16.3 a) À l'équilibre, la boussole s'oriente dans la direction du champ résultant $\vec{B}(\mathrm{O}) = \overrightarrow{B_H} + \overrightarrow{B_{\text{fil}}}(\mathrm{O})$. On a alors $\tan(\alpha) = \dfrac{B_{\text{fil}}}{B_H}$, d'où $B_H = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi d \tan(\alpha)}$.

.....

16.3 b) On calcule

$$B_H = \frac{4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}} \times 1{,}2\,\mathrm{A}}{2\pi \times 2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \times \tan(30°)} = \frac{10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}} \times 1{,}2\,\mathrm{A}}{1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \times 1{,}2 \times 10^{-5}\,\mathrm{T} = 20{,}8 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}.$$

.....

16.4 Au lieu d'exprimer le flux de $\vec{B}$ à travers la demi-sphère, il est plus simple de le calculer sur le disque qui s'appuie, comme la demi-sphère, sur la même circonférence de rayon R (on utilise ici le fait que $\vec{B}$ est un champ vectoriel à flux conservatif). Sur le disque, on a $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e_x}$. Ainsi $\phi = B \times S_{\text{disque}} = B\pi R^2$.

.....

16.5 On calcule

$$\phi = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{B}\cdot\vec{e_x}\,\mathrm{d}r \times r\,\mathrm{d}\theta = B_0 \times \left[\pi R^2 - \frac{2\pi R^4}{4r^2}\right] = \frac{\pi}{2}R^2B_0.$$

.....

16.6 a) On calcule

$$\phi = \iint_{\text{cadre}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}\cdot\mathrm{d}S\vec{e_\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^a \mathrm{d}z \times \int_{D-a/2}^{D+a/2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(\frac{D+a/2}{D-a/2}\right).$$

.....

16.6 b) On réécrit $\phi = \dfrac{\mu_0 I a}{2\pi}\left(\ln\left(1+\dfrac{a}{2D}\right) - \ln\left(1-\dfrac{a}{2D}\right)\right)$. Un développement limité de $\ln(1 \pm \varepsilon)$ à l'ordre 1 en ε avec $|\varepsilon| \ll 1$ donne alors : $\ln(1 \pm \varepsilon) \approx \pm\varepsilon$. D'où $\phi \approx \dfrac{\mu I a^2}{2\pi D}$.

.....

16.6 c) Si le cadre est situé dans un plan perpendiculaire à $(\mathrm{O}z)$, on a $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{e_z}$ et $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$: le flux est nul.

.....

16.7 a) Le champ résultant en O s'écrit : $\vec{B}(\mathrm{O}) = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2}$ soit $\vec{B}(\mathrm{O}) = B_0(1+\cos(\alpha))\vec{e_x} + B_0\sin(\alpha)\vec{e_y}$.

.....

16.7 b) On a $B(\mathrm{O}) = B_0\sqrt{(1+\cos(\alpha))^2+\sin^2(\alpha)}$. Donc, $B(\mathrm{O}) = B_0\sqrt{2(1+\cos(\alpha))}$.

.....

16.7 c) On a $B(\mathrm{O}) = 20\sqrt{3}\,\mathrm{mT}$ et donc $B(\mathrm{O}) = 34{,}6\,\mathrm{mT}$.

.....

16.8 a) On a $\cos(\theta) = \dfrac{a}{d}$ d'où le résultat.

.....

16.8 b) L'angle orienté θ, entre l'horizontale $(\mathrm{O}x)$ et la demi-droite $[\mathrm{O_1D})$ se retrouve entre la verticale $(\mathrm{O}y)$ et la perpendiculaire à $[\mathrm{O_1D})$, c'est-à-dire la direction du vecteur $\vec{e_1}$. On a donc $\vec{e_1} = -\sin(\theta)\vec{e_x} + \cos(\theta)\vec{e_y}$.

.....

16.8 c) Si on note β l'angle que fait $\vec{e_2}$ avec la verticale descendante $(-\mathrm{O}y)$, on a $\beta + \dfrac{\pi}{2} - \theta = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\beta = \theta$. On a donc $\vec{e_2} = -\sin(\theta)\vec{e_x} - \cos(\theta)\vec{e_y}$.

.....

16.8 d) Le champ résultant en D s'écrit $\overrightarrow{B_{\mathrm{tot}}} = B_0(\vec{e_1} + \vec{e_2})$. En utilisant les résultats précédents, on trouve $\overrightarrow{B_{\mathrm{tot}}} = -2B_0\sin(\theta)\vec{e_x}$.

.....

16.8 e) On a $\sin(\theta) = \dfrac{y}{d}$. De plus, dans le triangle rectangle $(\mathrm{O\,O_1\,D})$, on a $d^2 = a^2 + y^2$.

Ainsi, $\overrightarrow{B_{\mathrm{tot}}} = -\dfrac{\mu_0 I}{\pi}\dfrac{y}{a^2+y^2}, \vec{e_x}$. Par conséquent, on a $f(y) = -\dfrac{y}{a^2+y^2}$.

.....

16.8 f) On calcule $f'(y) = \dfrac{-(a^2+y^2)+y\times 2y}{(a^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-a^2}{(a^2+y^2)^2}$. La fonction f' s'annule pour $|y| \to \infty$, qui renvoie $\lim\limits_{|y|\to\infty} f(y) = 0$ et pour $|y| = a$ qui donne $\big|f(\pm a)\big| = \dfrac{1}{2a}$: c'est le maximum recherché.

.....

16.9 a) Le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ est un plan de symétrie qui laisse M invariant ainsi que la distribution des courants car si $N \gg 1$, chaque fil aura son symétrique, le courant circulant dans le même sens dans les deux fils symétriques.

.....

16.9 b) Le vecteur $\vec{B}$ vecteur axial est perpendiculaire à tout plan de symétrie de ses sources, donc $\vec{B}(\mathrm{M})$ est dirigé selon $\vec{e_\theta}$.

.....

16.10 a) Dans une symétrie par rapport au plan $(x\mathrm{O}y)$, les fils restent inchangés mais les courants sont inversés : c'est donc un plan d'antisymétrie.

Dans une symétrie par rapport au plan $(y\mathrm{O}z)$, on permute les fils de gauche et de droite, les courants circulant dans le sens inverse de la situation initiale : il s'agit ici encore, d'un plan d'antisymétrie.

Seul, le plan $(x\mathrm{O}z)$ laisse les fils inchangés ainsi que les sens des courants : c'est donc bien un plan de symétrie pour la distribution des courants.

.....

16.10 b) Pour le point A sur l'axe $(\mathrm{O}x)$, le plan $(x\mathrm{O}y)$ est un plan de symétrie pour la distribution des courants et laisse A invariant. Le vecteur champ magnétique, vecteur axial, est perpendiculaire à tout plan de symétrie, donc on a $\vec{B}(\mathrm{A}) \perp (x\mathrm{O}z)$. Donc, $\vec{B}(\mathrm{A})$ est parallèle à $(\mathrm{O}y)$.

.....

16.10 c) Pour le point D sur l'axe $(\mathrm{O}y)$, les plans $(x\mathrm{O}y)$ et $(y\mathrm{O}z)$ sont des plans d'antisymétrie pour la distribution des courants et laissent D invariant. Le vecteur champ magnétique, vecteur axial, est contenu dans tout plan d'antisymétrie, donc $\overrightarrow{B_{\mathrm{tot}}} \in (x\mathrm{O}y) \cap (y\mathrm{O}z)$, soit $\overrightarrow{B_{\mathrm{tot}}}$ est parallèle à $(\mathrm{O}y)$.

.....

16.11 a) Tout plan qui contient le point M et l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie pour la distribution des courants et laisse M invariant. Le vecteur $\vec{B}$(M), vecteur axial est contenu dans tous ces plans d'antisymétrie. Par conséquent, $\vec{B}$(M) est colinéaire à (Oz).

.....

16.11 b) Le plan $(\mathrm{M}, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants et laisse le point N invariant. Le vecteur champ magnétique, vecteur axial, est contenu dans tout plan d'antisymétrie, donc on a $\vec{B}(\mathrm{N}) \in (\mathrm{M}, \vec{e_r}, \vec{e_z})$.

.....

16.12 b) On a $B_0 f(z) = B_0 \sin^3(\alpha)$, ce qui donne $f(z) = \dfrac{R^3}{\left(\sqrt{R^2+z^2}\right)^3}$.

.....

16.12 c) Remplaçons z par R dans l'expression de B_{axe}. On trouve $B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2R} f(R) = \dfrac{\mu_0 I}{2R} \dfrac{R^3}{\left(\sqrt{2R^2}\right)^3} = \dfrac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\,R}$.

.....

16.12 d) On cherche z tel que $B_{\text{axe}}(z) = \dfrac{1}{2} B_1$, c'est-à-dire tel que :

$$\frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{\left(\sqrt{R^2+z^2}\right)^3} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\,R} \qquad \text{donc, après simplifications, tel que} \qquad \frac{R^3}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Élevons à la puissance 2/3 chaque terme de l'égalité. On obtient

$$\frac{R^2}{R^2+z^2} = \frac{1}{\left(4\sqrt{2}\right)^{2/3}} = \frac{1}{(2^{5/2})^{2/3}} = \frac{1}{(2)^{5/3}} \qquad \text{d'où} \qquad (2)^{5/3} R^2 = R^2 + z^2.$$

Finalement, on trouve $z = R\sqrt{2^{5/3}-1}$.

.....

16.13 a) Tout plan qui contient l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie pour la distribution des courants à condition de considérer que le symétrique de chaque spire par rapport à un plan qui contient se superpose à la spire de départ, ce qui n'est possible qu'en négligeant l'hélicité de l'enroulement.

.....

16.13 b) En négligeant l'hélicité de l'enroulement des spires, tout plan qui contient (Oz) est un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants et laisse le point M invariant. Le vecteur champ magnétique, vecteur axial, est contenu dans tout plan d'antisymétrie, donc $\vec{B}$(M) est dirigé selon $\vec{e_z}$.

.....

16.14 a) On a $B(z) = \dfrac{\mu_0 n I}{2} \left(\dfrac{z+\frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2+\left(z+\frac{\ell}{2}\right)^2}} - \dfrac{z-\frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2+\left(z-\frac{\ell}{2}\right)^2}} \right)$.

.....

16.14 b) Au point O, on a $\alpha_{\max} = \pi - \alpha_{\min}$. Or $\cos(\pi - \alpha_{\min}) = -\cos(\alpha_{\min})$ qui donne en O :

$$\cos(\alpha_{\min}) = \frac{\ell/2}{\sqrt{R^2+\ell^2/4}}.$$

Ainsi, on a $B(\mathrm{O}) = \mu_0 n I \cos(\alpha_{\min}) = \mu_0 n I \dfrac{\ell}{\sqrt{4R^2+\ell^2}}$.

.....

16.14 c) Remarquons déjà que la fonction $B(z)$ est une fonction paire de z. On aura donc $B\left(-\frac{\ell}{2}\right) = B\left(+\frac{\ell}{2}\right)$.

En $z = \frac{\ell}{2}$, on a $\alpha_{\max} = \frac{\pi}{2}$, donc $\cos(\alpha_{\max}) = 0$ et $\cos(\alpha_{\min}) = \frac{\ell}{\sqrt{R^2+\ell^2}}$. Ainsi, on a $\frac{B\left(\pm\frac{\ell}{2}\right)}{B(\mathrm{O})} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4R^2+\ell^2}}{\sqrt{R^2+\ell^2}}$.

.....

16.14 d) On a $B(\mathrm{O}) = \mu_0 nI\frac{\ell}{\sqrt{4R^2+\ell^2}} = \frac{\mu_0 nI}{\sqrt{1+\frac{4R^2}{\ell^2}}}$. Si $\frac{\ell}{R} \to +\infty$, alors $\frac{4R^2}{\ell^2} \longrightarrow 0$ et $B(\mathrm{O}) \longrightarrow \mu_0 nI$.

.....

16.15 a) La solution de l'équation différentielle s'écrit $B(z) = C\exp\left(\frac{z}{\delta}\right) + D\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$. La fonction $B(z)$ étant paire, on a $C = D$. D'où $B(z) = 2C\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)$.

La condition aux limites en $z = e$ permet d'exprimer la constante C par continuité de B (forcément continu car défini en volume) : on trouve $C = \frac{B_0}{2\cosh\left(\frac{e}{\delta}\right)}$. Ainsi, on a $B(z) = B_0\frac{\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{e}{\delta}\right)}$.

.....

16.15 b) Pour $e = \delta/10$, on a $\frac{B(0)}{B_0} = \frac{1}{\cosh(1/10)} \approx 1$.

.....

16.15 c) Pour $e = 10\delta$, on a $\frac{B(0)}{B_0} = \frac{1}{\cosh(10)} \approx 9\times 10^{-5}$.

.....

16.16 b) On calcule $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 = {\omega_0}^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right) = {\omega_0}^2\frac{1-4Q^2}{Q^2} = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2(1-4Q^2)$.

.....

16.16 c) En effet, on a $Q > 1/2$.

.....

16.16 d) La fonction constante B_0 est solution de $(*)$.

.....

16.16 e) Les racines de l'équation caractéristique sont $-\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre associée à $(*)$ est

$$\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\lambda\cos\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\right) + \mu\sin\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\right)\right).$$

Donc, la solution générale de l'équation $(*)$ est $B_0 + \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\lambda\cos\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\right) + \mu\sin\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\cdot t\right)\right)$.

.....

16.16 f) La condition initiale $B(0) = 0$ donne $\lambda = -B_0$. La condition initiale $B'(0) = 0$ donne $\mu = \frac{-B_0}{\sqrt{4Q^2-1}}$.

.....

16.17 On a $[\mu_B] = \left[e^\alpha \cdot m_e^\beta \cdot h^\gamma\right] = Q^\alpha \cdot M^\beta \cdot [h]^\gamma$

La constante de Planck h est homogène au produit d'une énergie par un temps (la fréquence est homogène à l'inverse d'un temps). De plus, une énergie est homogène au produit d'une masse par une vitesse au carré. Nous obtenons donc : $[h] = \frac{M\cdot L^2}{T}$. Ainsi, on a $[\mu_B] = \frac{Q^\alpha \cdot M^{\beta+\gamma}\cdot L^{2\gamma}}{T^\gamma}$.

Le magnéton de Bohr s'exprime en $\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$. Il est donc homogène à $[\mu_B] = [I]\cdot[S] = \frac{Q\cdot L^2}{T}$.

Finalement, en comparant les équations obtenues, on obtient $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\gamma = 1$.

.....

Fiche n° 17. Induction

Réponses

17.1 a) ..... $\boxed{\times 2}$

17.1 b) ..... $\boxed{\times 2}$

17.1 c) ..... $\boxed{\times 1/2}$

17.1 d) ..... $\boxed{\times 2}$

17.2 a) ..... $\boxed{\text{(a) et (b)}}$

17.2 b) ..... $\boxed{\text{Oui}}$

17.2 c) ..... $\boxed{\text{Non}}$

17.3 a) ..... $\boxed{0}$

17.3 b) ..... $\boxed{0}$

17.3 c) ..... $\boxed{0}$

17.3 d) ..... $\boxed{-Bac}$

17.3 e) ..... $\boxed{Bac}$

17.4 a) ..... $\boxed{-Ba^2}$

17.4 b) ..... $\boxed{0}$

17.4 c) ..... $\boxed{\frac{Ba^2}{4}}$

17.4 d) ..... $\boxed{\frac{Ba^2}{4}}$

17.4 e) ..... $\boxed{\frac{Ba^2}{4}}$

17.4 f) ..... $\boxed{\frac{Ba^2}{4}}$

17.5 a) ..... $\boxed{-Bab}$

17.5 b) ..... $\boxed{0}$

17.5 c) ..... $\boxed{0}$

17.5 d) ..... $\boxed{0}$

17.5 e) ..... $\boxed{Ba^2}$

17.5 f) ..... $\boxed{Ba(b-a)}$

17.6 ..... $\boxed{\text{(b)}}$

17.7 a) ..... $\boxed{i > 0}$

17.7 b) ..... $\boxed{i < 0}$

17.7 c) ..... $\boxed{i > 0}$

17.7 d) ..... $\boxed{i < 0}$

17.7 e) ..... $\boxed{i < 0}$

17.7 f) ..... $\boxed{i < 0}$

17.8 a) ..... $\boxed{\text{le flux diminue}}$

17.8 b) ..... $\boxed{\text{le flux ne varie pas}}$

17.8 c) ..... $\boxed{\text{le flux diminue}}$

17.8 d) ..... $\boxed{i > 0}$

17.8 e) ..... $\boxed{i = 0}$

17.8 f) ..... $\boxed{i > 0}$

17.9 a) ..... $\boxed{B_0 S_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)}$

17.9 b) ..... $\boxed{B_0 S_0 \frac{t}{\tau^2} e^{-t/\tau}}$

17.9 c) ..... $\boxed{-8 B_0 S_0 \omega \cos(\omega t) \sin^3(\omega t)}$

17.9 d) ..... $\boxed{-B_0 S_0 \omega [2\cos(4\omega t) + \cos(2\omega t)]}$

17.10 a) ..... $\boxed{-IBd\vec{e_x}}$

17.10 b) ..... $\boxed{-\frac{IBd}{m}t + v_0}$

17.10 c) ..... $\boxed{\frac{mv_0^2}{2IBd}}$

17.11 a) ..... $\boxed{-IaB\vec{e_y}}$

17.11 b) ..... $\boxed{IaB\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_x} + \frac{1}{2}\vec{e_y}\right)}$

17.11 c) ..... $\boxed{IaB\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_x} + \frac{1}{2}\vec{e_y}\right)}$

17.11 d) ..... $\boxed{\vec{0}}$

17.12 a) ..... $\boxed{IaB\vec{e_z}}$

17.12 b) ..... $\boxed{\vec{0}}$

17.12 c) ..... $\boxed{-IaB\vec{e_z}}$

17.12 d) ..... $\boxed{\vec{0}}$

17.12 e) ..... $\boxed{\vec{0}}$

17.12 f) ..... $\boxed{-Ia^2B\vec{e_x}}$

17.12 g) ..... $\boxed{Ia^2\vec{e_z}}$

17.12 h) ..... $\boxed{-Ia^2B\vec{e_x}}$

17.13 a) ..... $\boxed{iab\vec{e_\theta}}$

17.13 b) ..... $\boxed{iabB\cos\theta}$

17.13 c) ..... $\boxed{-\frac{a}{2}mg\sin\theta}$

17.13 d) ..... $\boxed{\arctan\left(\frac{2ibB}{mg}\right)}$

Corrigés

17.1 a) Le flux du champ magnétique à travers une spire est $\varphi_1 = BS = \pi R^2 B$. Le flux total à travers la bobine est donc

$$\varphi_{\text{tot}} = N\varphi_1 = \frac{\mu_0 \pi R^2 N^2}{\ell} i.$$

On retrouve l'expression de l'inductance L de la bobine en fonction de ses caractéristiques géométriques :

$$\varphi_{\text{tot}} = Li \iff L = \frac{\mu_0 \pi R^2 N^2}{\ell}.$$

Si on double le courant, on double donc le flux.

.....

17.1 b) En doublant la longueur du solénoïde, en gardant les spires jointives et le fil de même épaisseur, on double alors la longueur ℓ et le nombre de spires N : on double alors le flux.

.....

17.1 c) Le fil est deux fois plus épais mais de même longueur : on a toujours N spires mais réparties sur une longueur 2ℓ au lieu de ℓ. Le flux propre est donc divisé par deux.

.....

17.1 d) Si on double le rayon des spires en gardant la longueur de fil identique, le nombre de spires dans la bobine diminue. En effet, en notant ℓ_{fil} la longueur du fil, on trouve : $\ell_{\text{fil}} = 2\pi NR = 2\pi N'(2R) \iff N' = N/2$ en notant N' le nouveau nombre de spires. La longueur de la bobine est également divisée par 2.

Le flux total devient alors :

$$\varphi'_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 \pi (2R)^2 (N/2)^2}{(\ell/2)} i = 2\frac{\mu_0 \pi R^2 N^2}{\ell} i = 2\varphi_{\text{tot}}.$$

Le flux total est donc multiplié par deux.

.....

17.2 a) D'après la règle de la main droite, le pouce étant dans le sens du courant, en enroulant la main on trouve que le champ magnétique sort de la feuille au niveau des circuits. De plus, en enroulant la main droite dans le sens de l'orientation de chaque circuit on peut déterminer le sens du vecteur surface par le sens du pouce, ainsi les spires A et B ont un vecteur surface vers la feuille et les spires C et D ont un vecteur surface qui sort de la feuille. Comme le flux est donné par $\phi(\vec{B}) = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$, celui-ci sera négatif si le vecteur surface et le vecteur champ magnétique présentent des sens opposés.

.....

17.2 b) On rappelle que le flux du champ magnétique à travers une surface orientée S vaut $\phi\left(\vec{B}\right) = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

Sans tenir compte de l'orientation des surfaces, le flux sera d'autant plus important dans le circuit que celui est proche du fil car le champ magnétique produit par un fil infini est une fonction décroissante de la distance au fil. On a donc $|\phi_\mathrm{A}| > |\phi_\mathrm{B}|$.

.....

17.2 c) D'après la même justification que la question précédente, on a $|\phi_\mathrm{D}| > |\phi_\mathrm{C}|$.

.....

17.3 a) On oriente toutes les surfaces vers l'extérieur du volume. Ainsi, pour la surface $\mathrm{AA'B'B}$ le vecteur normal s'écrit $\vec{S}_{\mathrm{AA'B'B}} = -ab\vec{e_x}$. On rappelle que le flux du champ magnétique à travers une surface est : $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

Le flux à travers la surface ABC est nul car la surface est orthogonale au champ magnétique.

.....

17.3 b) Le flux à travers la surface $\mathrm{A'C'B'}$ est nul car la surface est orthogonale au champ magnétique.

.....

17.3 c) Le flux à travers la surface $\mathrm{AA'B'B}$ est nul car la surface est orthogonale au champ magnétique.

.....

17.3 d) Le flux au travers de $\mathrm{ACC'A'}$ vaut $-Bac$.

.....

17.3 e) Le flux au travers de $\mathrm{BB'C'C}$ vaut Bac car le champ magnétique est à flux conservatif : la somme des flux sortant d'une surface fermée est nulle.

.....

17.4 a) Le flux sortant de la surface ABCD vaut $-Ba^2$ car le champ est uniforme sur cette surface.

.....

17.4 b) Comme le champ magnétique est à flux conservatif, le flux total sortant est nul.

.....

17.4 c) Comme le champ magnétique est à flux conservatif, le flux total sortant est nul. De plus, par symétrie, les flux sur les surfaces ADE, DCE, CBE et BAE sont identiques. Ainsi, ces flux valent $\dfrac{Ba^2}{4}$.

.....

17.4 d) Comme le champ magnétique est à flux conservatif, le flux total sortant est nul. De plus, par symétrie, les flux sur les surfaces ADE, DCE, CBE et BAE sont identiques. Ainsi, ces flux valent $\dfrac{Ba^2}{4}$.

.....

17.4 e) Comme le champ magnétique est à flux conservatif, le flux total sortant est nul. De plus, par symétrie, les flux sur les surfaces ADE, DCE, CBE et BAE sont identiques. Ainsi, ces flux valent $\dfrac{Ba^2}{4}$.

.....

17.4 f) Comme le champ magnétique est à flux conservatif, le flux total sortant est nul. De plus, par symétrie, les flux sur les surfaces ADE, DCE, CBE et BAE sont identiques. Ainsi, ces flux valent $\dfrac{Ba^2}{4}$.

.....

17.5 a) Le champ $\vec{B}$ étant orthogonal à la surface ABCD, son flux y vaut $-Bab$.

.....

17.5 b) Le flux du champ magnétique est nul sur la surface BAA′B′ car $\vec{B}$ est inclus dans ce plan.

.....

17.5 c) Le flux du champ magnétique est nul sur la surface CC′D′D car $\vec{B}$ est inclus dans ce plan.

.....

17.5 d) Le flux du champ magnétique est nul sur la surface ADD′A′ car $\vec{B}$ est inclus dans ce plan.

.....

17.5 e) Le champ $\vec{B}$ étant orthogonal à la surface A′D′C′B′, son flux y vaut Ba^2.

.....

17.5 f) En exploitant la conservation du flux magnétique, on en déduit donc que le flux sortant de la surface CBB′C′ vaut $Bab - Ba^2 = Ba(b-a)$.

.....

17.6 Avec un courant positif, le champ magnétique produit par la boucle externe est sortant de la feuille. Comme le courant augmente, le flux également. Le champ magnétique induit par les effets inductifs est opposé aux causes qui lui ont donné naissance : il sera rentrant dans la feuille. Le courant est donc dans le sens horaire.

.....

17.7 a) Rappelons que pour un aimant droit, le champ sort par le Nord : les lignes de champ sont orientées du Nord vers le Sud.

La première étape consiste à déterminer le sens de variation du champ magnétique vu par la spire au cours du déplacement. On déduit alors de la loi de Lenz le sens du champ magnétique induit $\vec{B}_{ind}$, qui tend à atténuer les variations de $\vec{B}$. On détermine ensuite par la règle de la main droite le sens réel du courant dans la spire. Enfin, par comparaison entre le sens réel du courant et le sens $i > 0$ indiqué sur la figure on en déduit le signe de i.

Le champ magnétique créé par l'aimant droit est orienté vers la gauche au niveau la spire. Il augmente dans la spire avec le déplacement de l'aimant. Le champ induit va s'opposer à cette augmentation : il sera orienté vers la droite. Le courant $i_a > 0$.

.....

17.7 b) La physique est identique à la situation précédente, seule change la convention sur le sens positif du courant : on déduit immédiatement $i_b < 0$.

.....

17.7 c) Le champ magnétique est orienté vers la droite au niveau de la spire. Il diminue avec le déplacement de l'aimant. Le champ induit va s'opposer à cette variation : il sera orienté vers la droite également. Le courant $i_c > 0$.

.....

17.7 d) Les variations de champ vues par la spire sont les mêmes qu'à la question a), le sens réel du courant induit est donc le même. Comme le sens choisi positif du courant est opposé, alors $i_d < 0$.

.....

17.7 e) Les variations de champ vues par la spire sont les mêmes qu'à la question c), le sens réel du courant induit est donc le même. Comme le sens choisi positif du courant est opposé, alors $i_e < 0$.

.....

17.7 f) Le déplacement de la spire renforce l'effet du déplacement de l'aimant. Cette fois, le champ vu par la spire diminue au cours du mouvement, le champ induit a donc tendance à le renforcer. On a donc $i_f < 0$.

.....

17.8 a) La spire est initialement orthogonale aux lignes de champ et la surface est orientée dans le sens des lignes de champ : le flux est maximal. Dans la configuration finale, le flux du champ magnétique dans la spire est nul. Le flux diminue donc.

.....

17.8 b) La spire est initialement orthogonale aux lignes de champ et la surface est orientée dans le sens opposé au champ magnétique : le flux est minimal.

La configuration finale est identique à la configuration initiale : le flux est le même.

.....

17.8 c) La spire est initialement orthogonale aux lignes de champ et la surface est orientée dans le sens des lignes de champ : le flux est maximal.

La configuration finale est similaire à la configuration initiale mais le flux est moins grand car le nombre de lignes de champ interceptées est inférieur. Le flux diminue donc.

.....

17.8 d) Le courant circulant dans la spire va produire un champ magnétique tel qu'il s'oppose à la diminution du flux : le courant sera donc positif. On a $i_{(A)} > 0$.

.....

17.8 e) Il n'y a pas de variation de flux, donc pas d'induction : on a $i_{(B)} = 0$.

.....

17.8 f) Le courant circulant dans la spire va produire un champ magnétique afin de compenser la diminution du flux : le courant sera donc positif. On a $i_{(C)} > 0$.

.....

17.9 c) On peut réécrire le flux sous la forme suivante : $\Phi_3 = 2B_0S_0\sin^4(\omega t)$; d'où $e_3 = -8B_0S_0\omega\cos(\omega t)\sin^3(\omega t)$.

.....

17.9 d) De même, on commence par linéariser l'expression. On a $\Phi_4 = \dfrac{B_0S_0}{2}[\sin(4\omega t) + \sin(2\omega t)]$. Puis, on dérive et on trouve : $e_4 = -B_0S_0\omega[2\cos(4\omega t) + \cos(2\omega t)]$.

.....

17.10 a) La force de Laplace se calcule par $\vec{F} = \displaystyle\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} I\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}$, soit $\vec{F} = \displaystyle\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} -I\,\mathrm{d}z\vec{e_z} \wedge -B\vec{e_y} = -IBd\vec{e_x}$.

.....

17.10 b) La force de Laplace est constante. Par application du principe fondamental de la dynamique en projection sur $\vec{e_x}$, on a :

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -IBd.$$

En intégrant (avec la condition initiale), on trouve $v(t) = -\dfrac{IBd}{m}t + v_0$.

.....

17.10 c) Par application du théorème de l'énergie cinétique entre le point $x = 0$ et le point d'arrêt $x = D$, on a :

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x=0}^{x=D} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{x=0}^{x=D} -IBd\vec{e_x}\cdot\mathrm{d}x\vec{e_x} = -IBdD.$$

On en déduit : $D = \dfrac{mv_0^2}{2IBd}$.

.....

17.11 a) Il s'agit de calculer le produit vectoriel sur chaque segment, le vecteur $\mathrm{d}\vec{\ell}$ étant le long du segment. Chaque force de Laplace s'exerce au milieu de chaque segment et la règle de la main droite indique qu'elle est orthogonale au segment dirigé vers l'extérieur du triangle. Le triangle est équilatéral et comporte donc trois angles de 60 ° ce qui amène aux projections sur $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$. D'où les résultats.

.....

17.11 d) Le champ magnétique étant uniforme, la résultante des forces de Laplace sur le circuit fermé est nulle :

$$\vec{F}_{L,\text{tot}} = \oint_{\mathcal{C}} \left(I\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}\right) = I\left(\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{\ell}\right) \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

.....

17.12 h) Dans ce cas, les forces de Laplace sont nulles sur les segments BC et DA ($\mathrm{d}\vec{\ell}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires). Les seules forces sont alors :

$$\vec{F}_{\text{AB}} = IaB\vec{e_z} \quad \vec{F}_{\text{CD}} = -IaB\vec{e_z}.$$

Le couple est alors $\vec{\Gamma} = -Ia^2B\vec{e_x}$.

.....

17.13 a) Dans la base cylindrique telle que $\vec{e_z} = \vec{e_\Delta}$, le moment magnétique est porté par $\vec{e_\theta}$ et sa norme est $m = iS = iab$.

.....

17.13 b) Par définition le couple magnétique se calcule par $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$. Le calcul du produit vectoriel amène à $\vec{\Gamma} = iabB\cos\theta\vec{e_z}$. Comme $\vec{e_z} = \vec{e_\Delta}$, la projection sur l'axe Δ donne donc $\Gamma_\Delta = iabB\cos\theta$.

.....

17.13 c) Dans la base cylindrique, le poids s'exprime $\vec{P} = mg(\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta})$. On considère qu'il s'applique au barycentre des masses du cadre, soit en son plein centre que l'on notera G. Son moment par rapport à l'axe Δ se calcule par $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \left(\overrightarrow{\text{OG}} \wedge \vec{P}\right) \cdot \vec{e_\Delta}$ avec O un point sur l'axe Δ. D'où, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \left(a/2\vec{e_r} \wedge \vec{P}\right) \cdot \vec{e_\Delta} = -\dfrac{a}{2}mg\sin\theta$.

.....

17.13 d) À l'équilibre la somme des moments des forces par rapport à l'axe Δ est nulle. Ainsi, on a

$$\Gamma_\Delta + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0.$$

D'où $iabB\cos\theta_{\text{eq}} - \dfrac{a}{2}mg\sin\theta_{\text{eq}} = 0$, ce qui amène à isoler $\tan\theta_{\text{eq}} = \dfrac{2ibB}{mg}$, soit finalement $\theta_{\text{eq}} = \arctan\left(\dfrac{2ibB}{mg}\right)$.

.....

Fiche n° 18. Gaz parfaits

Réponses

18.1 a) ..... $\boxed{62\,\text{L}}$

18.1 b) ..... $\boxed{25\,\text{L}}$

18.1 c) ..... $\boxed{6{,}8\times10^{2}\,\text{L}}$

18.2 a) ..... $\boxed{58\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}}$

18.2 b) ..... $\boxed{1{,}8\times10^{2}\,\text{bar}}$

18.2 c) ..... $\boxed{5{,}5\,\text{m}^3}$

18.3 a) ..... $\boxed{24{,}8\,\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}}$

18.3 b) ..... $\boxed{13{,}4\,\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}}$

18.4 ..... $\boxed{64\,^\circ\text{C}}$

18.5 a) ..... $\boxed{1{,}00\,\text{bar}}$

18.5 b) ..... $\boxed{1{,}24\,\text{bar}}$

18.6 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

18.6 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

18.7 a) ..... $\boxed{\dfrac{MP}{RT}}$

18.7 b) ..... $\boxed{\text{non}}$

18.8 a) ..... $\boxed{4\rho_1}$

18.8 b) ..... $\boxed{3{,}7\rho_1}$

18.9 a) ..... $\boxed{\dfrac{n_2}{n_1}=\dfrac{P_2}{P_1}}$

18.9 b) ..... $\boxed{\dfrac{2P_1}{P_1+P_2}V}$

18.10 ..... $\boxed{\dfrac{M_\text{A}}{M_\text{air}}}$

18.11 a) ..... $\boxed{\dfrac{4}{3}\pi r^3}$

18.11 b) ... $\boxed{\dfrac{4\pi P_0 r^3+16\pi\gamma r^2}{3RT_0}}$

18.12 a) ..... $\boxed{18{,}2\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}}$

18.12 b) ..... $\boxed{4{,}79\,\%}$

18.13 a) ..... $\boxed{30{,}6\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}}$

18.13 b) ..... $\boxed{65{,}6\,\%}$

18.14 ..... $\boxed{5{,}5\,\text{kg}}$

18.15 a) ..... $\boxed{400\,\text{hPa}}$

18.15 b) ..... $\boxed{400\,\text{hPa}}$

Corrigés

18.1 a) On a $PV=nRT$ avec $n=\dfrac{m}{M}$. Ainsi, on a $V=\dfrac{m}{M}\times\dfrac{RT}{P}$. Notez que l'on peut laisser les masses en g si l'on exprime la masse molaire en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Ainsi, on a $V=\dfrac{100\,\text{g}}{40\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}}\times\dfrac{8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}\times298{,}15\,\text{K}}{1\times10^5\,\text{Pa}}=62\times10^{-3}\,\text{m}^3=62\,\text{L}.$

.....

18.1 b) On a $V=\dfrac{32\,\text{g}}{2\times16\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}}\times\dfrac{8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}\times298{,}15\,\text{K}}{1\times10^5\,\text{Pa}}=24{,}8\times10^{-3}\,\text{m}^3=25\,\text{L}.$

.....

18.1 c) On a $V=\dfrac{1\,200\,\text{g}}{(12+2\times16)\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}}\times\dfrac{8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}\times298{,}15\,\text{K}}{1\times10^5\,\text{Pa}}=0{,}676\,\text{m}^3=6{,}8\times10^2\,\text{L}.$

.....

18.2 a) On a $M_{\text{C}_4\text{H}_{10}}=4\times M_\text{C}+10\times M_\text{H}=4\times12\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}+10\times1\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}=58\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

.....

18.2 b) Si tout le butane était à l'état gazeux dans la bouteille et en admettant qu'il se comporte comme un gaz parfait, la pression qui y règnerait serait de

$$P=\frac{nRT}{V}=\frac{m}{M}\times\frac{RT}{V}=\frac{13\times10^3\,\text{g}}{58\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}}\times\frac{8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}\times293{,}15\,\text{K}}{30{,}6\times10^{-3}\,\text{m}^3}=179\times10^5\,\text{Pa}=1{,}8\times10^2\,\text{bar}$$

et la bouteille exploserait... Heureusement qu'une grande partie est à l'état liquide !

.....

18.2 c) En considérant le butane comme gaz parfait, on a

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{m}{M}\frac{RT}{P} = \frac{13\times10^3\,\mathrm{g}}{58\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}} \times \frac{8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}\times 293{,}15\,\mathrm{K}}{1\times10^5\,\mathrm{Pa}} = 5{,}5\,\mathrm{m^3}.$$

.....

18.3 a) Le volume molaire est le volume occupé par une mole de gaz : c'est $V_\mathrm{m} = \dfrac{V}{n} = \dfrac{RT}{P}$.
En exprimant la pression en pascals et la température en kelvins on obtient

$$V_\mathrm{m} = \frac{8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}\times 298{,}15\,\mathrm{K}}{1{,}00\times10^5\,\mathrm{Pa}} = 24{,}8\times10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot mol^{-1}} = 24{,}8\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}.$$

.....

18.3 b) On applique la même formule. On trouve

$$V_\mathrm{m} = \frac{8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}\times (273{,}15+50)\mathrm{K}}{2{,}00\times10^5\,\mathrm{Pa}} = 13{,}4\times10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot mol^{-1}} = 13{,}4\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}.$$

Remarquez que le volume molaire ne dépend pas de la nature du gaz mais seulement des conditions de pression et de température.

.....

18.4 D'après la loi des gaz parfaits : $P_1V = nRT_1$ et $P_2V = nRT_2$ ce qui donne à volume constant :

$$T_2 = T_1\frac{P_2}{P_1} = (273,15+20)\mathrm{K}\times\frac{2{,}3\,\mathrm{bar}}{2{,}0\,\mathrm{bar}} = 337\,\mathrm{K} = 64\,^\circ\mathrm{C}.$$

.....

18.5 a) À température constante, le produit PV reste constant d'où

$$P_1V_1 = P_2V_2 \quad \text{avec} \quad V_2 = 1{,}2V_1 \quad \text{d'où} \quad P_2 = \frac{P_1}{1{,}2} = 1{,}0\,\mathrm{bar}.$$

.....

18.5 b) À volume constant le quotient P/T reste constant d'où

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad \text{d'où} \quad P_2 = P_1\frac{T_2}{T_1} = 1{,}2\times\frac{303,15}{293,15} = 1{,}24\,\mathrm{bar}.$$

.....

18.6 a) La loi des gaz parfaits permet d'exprimer P en fonction de T : $P = \dfrac{nR}{V}T = \mathrm{C^{te}}\times T$, car nR/V est constant. On prévoit donc une relation linéaire dont la courbe représentative est une droite passant par l'origine.

.....

18.6 b) En vertu de la loi du gaz parfait, on a $P = \dfrac{nRT}{V} = \dfrac{\mathrm{C^{te}}}{V}$, car nRT est fixé. On prévoit donc une relation inverse dont la courbe représentative est une hyperbole.

.....

18.7 a) Par définition, la masse volumique vaut

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{\frac{nRT}{P}} = \frac{MP}{RT}.$$

.....

18.7 b) Assimilons la vapeur d'eau à un gaz parfait : on a alors

$$\rho = \frac{18 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot mol^{-1}} \times 1{,}013 \times 10^{5}\,\mathrm{Pa}}{8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \times 373{,}15\,\mathrm{K}} = 0{,}588\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

Ce résultat est en désaccord avec la mesure.

Au voisinage d'un changement d'état (comme ici, où l'eau est à l'état de vapeur saturante), le modèle du gaz parfait n'est pas valide.

.....

18.8 a) La masse volumique d'un gaz parfait s'écrit $\rho = \dfrac{MP}{RT}$. On a donc ici

$$\rho_1 = \frac{MP_1}{RT_1} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{MP_2}{RT_1}.$$

Ce qui donne $\rho_2 = \rho_1 \dfrac{P_2}{P_1} = 4\rho_1$.

.....

18.8 b) Le même raisonnement mène à $\rho_2 = \rho_1 \dfrac{T_1 P_2}{T_2 P_1} = 3{,}7\rho_1$.

On fera attention au fait que, dans un rapport de températures, celles-ci sont à exprimer en kelvins.

.....

18.9 a) D'après la loi du gaz parfait, on a $n_1 = \dfrac{P_1 V}{RT}$ et $n_2 = \dfrac{P_2 V}{RT}$ d'où la relation $\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{P_2}{P_1}$.

.....

18.9 b) Appliquons la loi du gaz parfait dans chaque compartiment : on a

$$P' V_1 = n_1 RT \quad \text{et} \quad P' V_2 = n_2 RT,$$

dont on déduit $V_2/V_1 = n_2/n_1$.

Par ailleurs, la conservation du volume total donne

$$2V = V_1 + V_2 = V_1\Big(1 + \frac{n_2}{n_1}\Big).$$

Ainsi, il découle

$$V_1 = \frac{2V}{1 + n_2/n_1} = \frac{2V}{1 + P_2/P_1} = \frac{2P_1}{P_1 + P_2} V.$$

.....

18.10 Exprimons la masse volumique en fonction de la masse molaire pour un gaz parfait :

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{mRT}{MP} \quad \text{donc} \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}.$$

Ainsi, sous la même pression et la même température, on a

$$d = \frac{\rho_{\mathrm{A}}}{\rho_{\mathrm{air}}} = \frac{PM_{\mathrm{A}}}{PM_{\mathrm{air}}} = \frac{M_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{air}}}.$$

.....

18.11 a) Le volume de la bulle vaut $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

.....

18.11 b) La pression de l'air intérieure vaut $P = P_0 + \dfrac{4\gamma}{r}$. La loi des gaz parfaits donne alors :

$$PV = \Big(P_0 + \frac{4\gamma}{r}\Big) \times \frac{4}{3}\pi r^3 = nRT_0 \quad \text{d'où} \quad n = \frac{4\pi P_0 r^3 + 16\pi\gamma r^2}{3RT_0}.$$

.....

18.12 a) La masse molaire du mélange est la moyenne pondérée des masses molaires : $M = \sum_i x_i M_i$.

Ce qui donne ici

$$M = \big(0{,}813 \times 16 + 0{,}029 \times 30 + 0{,}004 \times 44 + 0{,}002 \times 58 + 0{,}143 \times 28\big)\ \text{g.mol}^{-1} = 18{,}2\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

.....

18.12 b) Faisons un bilan avec une mole de mélange :

- le mélange a une masse totale $m = 18{,}2\,\text{g}$;
- ce mélange contient 0,029 mol d'éthane soit $m_{C_2H_6} = 0{,}029 \times 30 = 0{,}87\,\text{g}$.

On en déduit le titre massique vaut

$$w_{C_2H_6} = m_{C_2H_6}/m = 4{,}79\,\%.$$

.....

18.13 a) Le mélange étant considéré parfait, on peut appliquer la loi du gaz parfait :

$$PV = nRT \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT}.$$

On en déduit la masse molaire

$$M = \frac{\rho RT}{P} = \frac{1\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 8{,}314\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 373{,}15\,\text{K}}{1{,}013 \times 10^5\,\text{Pa}} = 30{,}6 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

.....

18.13 b) La masse molaire du mélange est la moyenne pondérée des masses molaires. Si l'on note x la fraction molaire en dioxygène et y celle en diazote, on a $M = xM_{O_2} + yM_{N_2}$ avec $x + y = 1$. On en déduit

$$x = \frac{M - M_{N_2}}{M_{O_2} - M_{N_2}} = \frac{30{,}626\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1} - 28\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}}{32\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1} - 28\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 65{,}6\,\%.$$

.....

18.14 Calculons la pression partielle en vapeur d'eau : elle vaut $P_{H_2O} = 60\,\%p_{sat} = 1{,}90 \times 10^3\,\text{Pa}$.

Dans un volume de $400\,\text{m}^3$ cela correspond à une quantité de matière

$$n_{H_20} = \frac{P_{H_2O}V}{RT} = \frac{1{,}90 \times 10^3\,\text{Pa} \times 400\,\text{m}^3}{8{,}314\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 298{,}15\,\text{K}} = 307\,\text{mol}.$$

Ce qui représente une masse $m = n_{H_2O} \times M_{H_2O} = 18 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1} \times 307\,\text{mol} = 5{,}5\,\text{kg}$.

.....

18.15 a) La loi de Dalton impose $P = P_A + P_B$ d'où $P_B = 400\,\text{hPa}$.

.....

18.15 b) La pression partielle d'une espèce dépend de sa quantité de matière, sa température et du volume total. En effet,

$$P = \frac{\left(\sum_i n_i\right) \times RT}{V} = \sum_i P_i \quad \text{avec} \quad P_i = \frac{n_i RT}{V}.$$

Puisque ces quantités n'ont pas changé pour l'espèce B, sa pression partielle est restée la même.

.....

Fiche n° 19. Premier Principe

Réponses

19.1 a) ..... $\boxed{300\,\mathrm{J}}$

19.1 b) ..... $\boxed{-0{,}5\,\mathrm{J}}$

19.1 c) ..... $\boxed{150\,\mathrm{J}}$

19.2 a) ..... $\boxed{0\,\mathrm{J}}$

19.2 b) ..... $\boxed{-100\,\mathrm{J}}$

19.3 ..... $\boxed{B}$

19.4 a) ..... $\boxed{-P_0(V_{\text{final}} - V_{\text{initial}})}$

19.4 b) ..... $\boxed{\dfrac{-(P_2 + P_1)(V_{\text{final}} - V_{\text{initial}})}{2}}$

19.5 a) ..... $\boxed{-nRT_0 \ln\left(\dfrac{V_f}{V_i}\right)}$

19.5 b) ..... $\boxed{\dfrac{P_f V_f - P_i V_i}{k-1}}$

19.6 a) ..... $\boxed{76\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}}$

19.6 b) ..... $\boxed{18\times10^{-3}\,\mathrm{kcal\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}}$

19.7 a) ..... $\boxed{mc(T_f - T_i)}$

19.7 b) ..... $\boxed{4{,}2\,\mathrm{kJ}}$

19.8 a) ..... $\boxed{\dfrac{nR}{\gamma - 1}}$

19.8 b) ..... $\boxed{6{,}2\times10^{2}\,\mathrm{J}}$

19.8 c) ..... $\boxed{\dfrac{nR\gamma}{\gamma - 1}}$

19.8 d) ..... $\boxed{8{,}7\times10^{2}\,\mathrm{J}}$

19.9 a) ..... $\boxed{C_V(T_f - T_i)}$

19.9 b) ..... $\boxed{\dfrac{A}{2}({T_f}^2 - {T_i}^2) + B(T_f - T_i)}$

19.9 c) ..... $\boxed{\dfrac{D}{4}({T_f}^4 - {T_i}^4)}$

19.10 ..... $\boxed{-268\,\mathrm{kJ}}$

19.11 ..... $\boxed{T_i + \dfrac{n^2 a}{C_V}\left(\dfrac{1}{V_f} - \dfrac{1}{V_i}\right)}$

19.12 a) ..... $\boxed{T_i + \dfrac{Q}{C}}$

19.12 b) ..... $\boxed{T_i\,\mathrm{e}^{\frac{Q}{A}}}$

19.12 c) ..... $\boxed{\left({T_i}^3 + \dfrac{3Q}{B}\right)^{1/3}}$

19.13 a) ..... $\boxed{nRT_i \ln\left(\dfrac{V_f}{V_i}\right)}$

19.13 b) ..... $\boxed{\dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_i)}$

19.13 c) ..... $\boxed{0}$

19.14 a) ..... $\boxed{W_1 - Q_1}$

19.14 b) ..... $\boxed{Q_1 - Q_2}$

19.14 c) ..... $\boxed{W_1 - Q_2}$

19.15 ..... $\boxed{42\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}}$

19.16 a) ..... $\boxed{\dfrac{C}{h}}$

19.16 b) ..... $\boxed{T_a + (T_0 - T_a)\mathrm{e}^{-\frac{ht}{C}}}$

19.17 ..... $\boxed{\text{(b)}}$

19.18 a) ..... $\boxed{\dfrac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}}$

19.18 b) ..... $\boxed{\dfrac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} + \dfrac{Q}{(m_1 + m_2)c}}$

Corrigés

19.1 a) On a $W = -\left(1{,}5 \times 10^5\,\text{Pa}\right)\left(3 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 - 5 \times 10^{-3}\,\text{m}^3\right) = 300\,\text{J}$.

.....

19.1 b) On a $P_0 = 50\,\text{mbar} = 50 \times 10^{-3}\,\text{bar} = \left(50 \times 10^{-3}\right) \times 10^5\,\text{Pa} = 50 \times 10^2\,\text{Pa}$.

On a $V_i = 2\,\text{cL} = 2 \times 10^{-2}\,\text{L} = \left(2 \times 10^{-2}\right) \times 10^{-3}\,\text{m}^3 = 2 \times 10^{-5}\,\text{m}^3$.

On a $V_f = 120\,\text{mL} = 120 \times 10^{-3}\,\text{L} = \left(120 \times 10^{-3}\right) \times 10^{-3}\,\text{m}^3 = 12 \times 10^{-5}\,\text{m}^3$.

On a $W = -\left(50 \times 10^2\,\text{Pa}\right) \times \left(12 \times 10^{-5}\,\text{m}^3 - 2 \times 10^{-5}\,\text{m}^3\right) = -0{,}5\,\text{J}$.

.....

19.1 c) On a $V_i = 20\,\text{cm}^3 = 20 \times 10^{-6}\,\text{m}^3$ et $V_f = 10\,\text{cm}^3 = 10 \times 10^{-6}\,\text{m}^3$.

On a $W = -\left(150 \times 10^5\,\text{Pa}\right) \times \left(10 \times 10^{-6}\,\text{m}^3 - 20 \times 10^{-6}\,\text{m}^3\right) = 150\,\text{J}$.

.....

19.2 a) Le volume ne variant pas, on a $\text{d}V = 0$. Le travail des forces de pression s'écrit $W = -\displaystyle\int_{V_\text{initial}}^{V_\text{final}} P_\text{ext}\,\text{d}V$. Il est donc nul.

.....

19.2 b) Le travail des forces de pression s'écrit :

$$W = -\int_{V_\text{initial}}^{V_\text{final}} P_\text{ext}\,\text{d}V = -P_\text{ext}\int_{V_\text{initial}}^{V_\text{final}} \text{d}V = -P_\text{ext}(V_\text{final} - V_\text{initial})$$

Nous pouvons donc faire l'application numérique : $W = -1 \times 10^5\,\text{Pa} \times (2 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 - 1 \times 10^{-3}\,\text{m}^3) = -100\,\text{J}$.

.....

19.3 Le système A a reçu du milieu extérieur un travail $W_a = 50\,\text{W} \times 30\,\text{s} = 1\,500\,\text{J}$.

Le système B a reçu du milieu extérieur un travail $W_b = 400\,\text{W} \times 5\,\text{s} = 2\,000\,\text{J}$.

Le système B a donc reçu la plus grande quantité d'énergie.

.....

19.4 a) Le travail correspond à l'opposé de l'aire sous la courbe, et donc à l'opposé de l'aire du rectangle :

$$W = -P_0(V_\text{final} - V_\text{initial}).$$

.....

19.4 b) On décompose l'aire sous la courbe en un rectangle et en un triangle :

$$W = -\left(P_1(V_\text{final} - V_\text{initial}) + \frac{(P_2 - P_1)(V_\text{final} - V_\text{initial})}{2}\right) = \frac{-(P_2 + P_1)(V_\text{final} - V_\text{initial})}{2}.$$

.....

19.5 a) Le système est un gaz parfait, nous avons donc $PV = nRT$. De plus, la température reste constante et vaut T_0. Le travail s'écrit alors : $W = -nRT_0\displaystyle\int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}\,\text{d}V = -nRT_0\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$.

.....

19.5 b) La transformation étant polytropique, on a alors $P_i{V_i}^k = P_f{V_f}^k = PV^k$. Le travail s'exprime alors :

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{P_i{V_i}^k}{V^k}dV = -\frac{P_i{V_i}^k}{1-k}\left(\frac{1}{{V_f}^{k-1}} - \frac{1}{{V_i}^{k-1}}\right) = \frac{P_fV_f - P_iV_i}{k-1}.$$

.....

19.6 a) Par définition, on a $c = \dfrac{C}{m} = n\dfrac{C_m}{m}$. Et donc $C_m = M_{\mathrm{H_2O}} \times c = 76\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$.

19.6 b) On a $C_m = \dfrac{76\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}}{4184} = 18 \times 10^{-3}\,\mathrm{kcal \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$.

19.7 a) La masse m d'eau liquide de capacité thermique massique $c = 4{,}2\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$ aura une capacité thermique $C = mc$. Ainsi, on a $\Delta U = mc(T_f - T_i)$.

19.7 b) Notons que la température doit être exprimée en kelvin. Ici, on a $T_i = 293\,\mathrm{K}$ et $T_f = 303\,\mathrm{K}$. Nous obtenons donc $\Delta T = 10\,\mathrm{K}$. Ainsi, on a $\Delta U = 100 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg} \times 4{,}2\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}} \times 10\,\mathrm{K} = 4{,}2\,\mathrm{kJ}$.

19.8 a) On commence par exprimer la capacité thermique à volume constant C_V du gaz parfait, à partir de la relation de Mayer $C_P - C_V = nR$ et du rapport des capacités thermiques $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$. On obtient $C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$.

19.8 b) La grandeur C_V étant constante, la variation d'énergie interne d'un gaz parfait peut être écrite :

$$\Delta U = C_V \Delta T = C_V(T_f - T_i) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_i).$$

On passe alors à l'application numérique : on a $\Delta U = \dfrac{1\,\mathrm{mol} \times 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \times 30\,\mathrm{K}}{1{,}4 - 1} = 6{,}2 \times 10^2\,\mathrm{J}$.

19.8 c) On commence par exprimer la capacité thermique à volume constant C_P du gaz parfait, à partir de la relation de Mayer $C_P - C_V = nR$ et du rapport des capacités thermiques $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$ On obtient $C_P = \dfrac{nR\gamma}{\gamma - 1}$.

19.8 d) La grandeur C_P étant constante, la variation d'enthalpie d'un gaz parfait s'exprime :

$$\Delta H = C_P \Delta T = C_P(T_f - T_i) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}(T_f - T_i).$$

On passe alors à l'application numérique : on a $\Delta H = \dfrac{1\,\mathrm{mol} \times 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \times 1{,}4}{1{,}4 - 1} \times 30\,\mathrm{K} = 8{,}7 \times 10^2\,\mathrm{J}$.

19.9 a) On a $\Delta U = C_V \Delta T = C_V(T_f - T_i)$.

19.9 b) On a $\Delta U = \dfrac{A}{2}({T_f}^2 - {T_i}^2) + B(T_f - T_i)$.

19.9 c) On a $\Delta U = \dfrac{D}{4}({T_f}^4 - {T_i}^4)$.

19.10 Pour cette transformation, nous avons une masse $m_l = 800\,\mathrm{g}$ d'eau qui est transformée de l'état liquide à l'état solide, et qui subit donc une solidification (transformation inverse d'une fusion).

La variation d'enthalpie s'exprime : $\Delta H = -m_l \times L_{\mathrm{fus}} = 0{,}800\,\mathrm{kg} \times -335\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}} = -268\,\mathrm{kJ}$.

19.11 On a $T_f = T_i + \dfrac{n^2 a}{C_V}\left(\dfrac{1}{V_f} - \dfrac{1}{V_i}\right)$.

19.12 a) On a alors $C(T_f - T_i) = Q$, et donc $T_f = T_i + \dfrac{Q}{C}$.

.....

19.12 b) On a alors $A \ln\left(\dfrac{T_f}{T_i}\right) = Q$, et donc $T_f = T_i \mathrm{e}^{\frac{Q}{A}}$.

.....

19.12 c) On a alors $B\left(\dfrac{{T_f}^3}{3} - \dfrac{{T_i}^3}{3}\right) = Q$, et donc $T_f = \left({T_i}^3 + \dfrac{3Q}{B}\right)^{1/3}$.

.....

19.13 a) Le système est un gaz parfait, et nous avons donc $PV = nRT$, avec T la température qui est constante et qui vaut donc T_i. Le travail s'exprime donc :

$$W = -nRT_i \int_{V_i}^{V_f} \frac{\mathrm{d}V}{V} = -nRT_i \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right).$$

D'après la première loi de Joule, pour un gaz parfait la variation d'énergie interne s'exprime : $\Delta U = C_v \Delta T = 0$.

On obtient finalement : $Q = -W = nRT_i \ln\left(\dfrac{V_f}{V_i}\right)$.

.....

19.13 b) Pour un transformation isochore, le travail est nul : $W = -\displaystyle\int_{V_i}^{V_f} P\,\mathrm{d}V = 0$.

On obtient alors : $Q = \Delta U = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_i)$.

.....

19.13 c) Pour une transformation adiabatique, le transfert thermique reçu de l'extérieur est nul, et donc $Q = 0$.

.....

19.14 a) On a $\Delta U_A = W_A + Q_A$ avec $W_A = W_1$ et $Q_A = -Q_1$. Ainsi, on a $\Delta U_1 = W_1 + Q_1$.

.....

19.14 b) On a $\Delta U_B = W_B + Q_B$ avec $W_B = 0$ et $Q_B = Q_1 - Q_2$. Ainsi, on a $\Delta U_2 = Q_1 - Q_2$.

.....

19.14 c) On a $\Delta U_{\text{tot}} = \Delta U_A + \Delta U_B = W_1 - Q_1 + Q_1 - Q_2 = W_1 - Q_2$.

.....

19.15 La capacité thermique du calorimètre vaut donc $C = m \times c_{\text{eau}}$. On obtient $C = 42\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$.

.....

19.16 a) Le temps caractéristique pour l'équation différentielle obtenue est $\tau = \dfrac{C}{h}$.

.....

19.16 b) On obtient $T = T_a + (T_0 - T_a)\mathrm{e}^{-\frac{ht}{C}}$ en sommant solutions particulière et homogène, et en appliquant la condition initiale $T(0) = T_0$.

.....

19.17 La température initiale est T_a, donc la courbe doit commencer en T_a. Les courbes (a) et (c) sont donc exclues. La courbe (d) correspond à une exponentielle croissante, et ne convient donc pas. La réponse est (b).

.....

19.18 a) On trouve $T_{\text{eq}} = \dfrac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$.

.....

19.18 b) On trouve $T_{\text{eq}} = \dfrac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} + \dfrac{Q}{(m_1 + m_2)c}$.

.....

Fiche n° 20. Second principe et machines thermiques

Réponses

20.1 ..... $\boxed{-94{,}8\,\text{J}}$

20.2 ..... $\boxed{\text{(b)}}$

20.3 a) ..... $\boxed{\mathrm{d}H = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}P}$

20.3 b) ..... $\boxed{\mathrm{d}U = 0}$

20.3 c) ..... $\boxed{\mathrm{d}S = nR\dfrac{\mathrm{d}V}{V}}$

20.4 a) ..... $\boxed{\mathrm{d}U = \delta W = -P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}V}$

20.4 b) ..... $\boxed{\mathrm{d}U = \delta W = -P\,\mathrm{d}V}$

20.4 c) ..... $\boxed{\mathrm{d}U = \delta Q}$

20.5 a) ..... $\boxed{\mathrm{d}S = \delta S_c}$

20.5 b) ..... $\boxed{\mathrm{d}S = 0}$

20.5 c) ..... $\boxed{\mathrm{d}S = \dfrac{\delta Q}{T} + \delta S_c}$

20.6 a) ..... $\boxed{T_f V_f{}^{\gamma-1} = T_i V_i{}^{\gamma-1}}$

20.6 b) ..... $\boxed{T_f{}^{\gamma} P_f{}^{1-\gamma} = T_i{}^{\gamma} P_i{}^{1-\gamma}}$

20.6 c) ..... $\boxed{P_f V_f{}^{\gamma} = P_i V_i{}^{\gamma}}$

20.7 a) ..... $\boxed{x = \gamma - 1}$

20.7 b) ..... $\boxed{x = \dfrac{\gamma}{(1-\gamma)}}$

20.7 c) ..... $\boxed{x = \dfrac{(1-\gamma)}{\gamma}}$

20.7 d) ..... $\boxed{x = \dfrac{\gamma^2}{(1-\gamma)}}$

20.7 e) ..... $\boxed{x = 1 - \gamma}$

20.8 a) ..... $\boxed{1{,}03\,\text{bar}}$

20.8 b) ..... $\boxed{0{,}31\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$

20.9 a) ..... $\boxed{1{,}98\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$

20.9 b) ..... $\boxed{1{,}89\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$

20.9 c) ..... $\boxed{\text{Non}}$

20.10 ..... $\boxed{nR\ln(2)}$

20.11 a) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

20.11 b) ..... $\boxed{\text{(b)}}$

20.11 c) ..... $\boxed{\text{(c)}}$

20.11 d) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

20.11 e) ..... $\boxed{6\,390\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$

20.12 a) ..... $\boxed{393\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}}$

20.12 b) ..... $\boxed{447\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}}$

20.12 c) ..... $\boxed{\dfrac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}}$

20.12 d) ..... $\boxed{361\,\text{K}}$

20.12 e) ..... $\boxed{\Delta S = 7{,}54\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$

20.12 f) ..... $\boxed{\text{Non}}$

20.13 a) ..... $\boxed{W \times \text{COP}}$

20.13 b) ..... $\boxed{20{,}4\,\text{MJ}}$

20.13 c) ..... $\boxed{-37{,}4\,\text{MJ}}$

20.14 a) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

20.14 b) ..... $\boxed{\eta = 33\,\%}$

20.15 a) ..... $\boxed{\dfrac{-Q_C}{\text{COP}}}$

20.15 b) ..... $\boxed{1\,\text{GJ}}$

20.15 c) ..... $\boxed{3{,}6\,\text{MJ}}$

20.15 d) ..... $\boxed{1{,}2 \times 10^3\,\text{euros}}$

20.16 a) ..... $\boxed{33\,\%}$

20.16 b) ..... $\boxed{\dfrac{\eta Q_F}{(1-\eta)}}$

20.16 c) ..... $\boxed{-295\,\text{J}}$

20.16 d) ..... $\boxed{13{,}4\,\text{cv}}$

20.17 a) ..... $\boxed{\dfrac{1}{P}}$

20.17 b) ..... $\boxed{\dfrac{1}{T}}$

20.17 c) ..... $\boxed{-1}$

Corrigés

20.1 Le premier principe donne $\Delta U = W + Q$ donc $Q = \Delta U - W$. De plus, la première loi de Joule donne :

$$\Delta U = C_V \Delta T = C_V (T_f - T_i).$$

Finalement, on a $Q = C_V(T_f - T_i) - W = 1{,}04\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1} \times (298\,\text{K} - 293\,\text{K}) - 100\,\text{J} = -94{,}8\,\text{J}$.

.....

20.2 On effectue un bilan d'énergie à l'aide du premier principe. La variation élémentaire d'énergie interne du liquide est :

$$\mathrm{d}U = mc \times \mathrm{d}T \quad \text{soit, en puissance,} \quad P = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = mc\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t},$$

où P est la puissance de chauffe apportée. En supposant cette puissance constante, il vient $\Delta t = \dfrac{mc\,\Delta T}{P}$.

On a donc

$$\frac{\Delta t_{\text{eau}}}{\Delta t_{\text{huile}}} = \frac{c_{\text{eau}}}{c_{\text{huile}}} = \frac{4\,180\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}}{2\,000\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}} = 2{,}09 > 1.$$

Ainsi, l'huile chauffe plus de deux fois plus vite que l'eau.

.....

20.3 a) Par définition, on a $H = U + PV$. Ainsi, on a $\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + P\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}P$. On en déduit :

$$\mathrm{d}H = T\,\mathrm{d}S - P\,\mathrm{d}V + P\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}P = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}P.$$

.....

20.3 b) Le gaz parfait suit la première loi de Joule : son énergie interne ne dépend que de la température. Ainsi, pour une transformation isotherme, on a $\mathrm{d}U = 0$.

.....

20.3 c) On a $\mathrm{d}U = 0$. Ainsi, la première identité thermodynamique devient :

$$0 = T\,\mathrm{d}S - P\,\mathrm{d}V.$$

On en déduit $T\,\mathrm{d}S = P\,\mathrm{d}V$. Ainsi, grâce àl'équation d'état $PV = nRT$, on en déduit

$$\mathrm{d}S = \frac{P}{T}\,\mathrm{d}V = nR\frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

.....

20.6 a) Utilisons la relation $\Delta S = 0$ qui fait intervenir les volumes et les températures : on a

$$\Delta S = 0 = \frac{nR}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad \text{donc} \quad \frac{nR}{\gamma - 1}\left[\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + (\gamma - 1)\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)\right] = 0.$$

En utilisant les propriétés de la fonction logarithme, on obtient :

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1}\ln\left[\left(\frac{T_f}{T_i}\right)\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma-1}\right].$$

On en déduit $\dfrac{T_f}{T_i}\left(\dfrac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma-1} = 1$ c'est-à-dire $T_f {V_f}^{\gamma-1} = T_i {V_i}^{\gamma-1}$.

.....

20.6 b) On procède de la même manière à partir de l'expression qui fait intervenir les températures et les pressions. On a

$$\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\Big(\frac{T_f}{T_i}\Big) - nR\ln\Big(\frac{P_f}{P_i}\Big) = 0 = \frac{nR}{\gamma-1}\Big[\gamma\ln\Big(\frac{T_f}{T_i}\Big) - (\gamma-1)\ln\Big(\frac{P_f}{P_i}\Big)\Big].$$

En utilisant les propriétés de la fonction logarithme, on obtient

$$\frac{nR}{\gamma-1}\ln\left[\Big(\frac{T_f}{T_i}\Big)^{\gamma}\Big(\frac{P_f}{P_i}\Big)^{1-\gamma}\right] = 0.$$

On aboutit à

$$\Big(\frac{T_f}{T_i}\Big)^{\gamma}\Big(\frac{P_f}{P_i}\Big)^{1-\gamma} = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad {T_f}^{\gamma}{P_f}^{1-\gamma} = {T_i}^{\gamma}{P_i}^{1-\gamma}.$$

.....

20.6 c) Utilisons l'expression qui fait intervenir les pressions et les volumes : on a

$$\Delta S = 0 = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\Big(\frac{P_f}{P_i}\Big) + \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\Big(\frac{V_f}{V_i}\Big) = \frac{nR}{\gamma-1}\Big[\ln\Big(\frac{P_f}{P_i}\Big) + \gamma\ln\Big(\frac{V_f}{V_i}\Big)\Big].$$

En simplifiant, on trouve

$$\frac{nR}{\gamma-1}\ln\Big[\Big(\frac{P_f}{P_i}\Big)\Big(\frac{V_f}{V_i}\Big)^{\gamma}\Big] = 0.$$

Finalement, on aboutit à

$$\Big(\frac{P_f}{P_i}\Big)\Big(\frac{V_f}{V_i}\Big)^{\gamma} = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad P_f{V_f}^{\gamma} = P_i{V_i}^{\gamma}.$$

.....

20.7 a) On a $PV^{\gamma} = \mathrm{C^{te}}$. Avec l'équation d'état du gaz parfait, on obtient

$$\frac{nRT}{V}V^{\gamma} = \mathrm{C^{te}} \quad \text{et donc} \quad TV^{\gamma-1} = \frac{\mathrm{C^{te}}}{nR} = \mathrm{C^{te}}.$$

.....

20.8 a) On travaille sur un gaz parfait de manière isochore. Ainsi, on a

$$\frac{V}{nR} = \mathrm{C^{te}} = \frac{T}{P} = \frac{T_i}{P_i} = \frac{T_f}{P_f}.$$

On en déduit

$$P_f = \frac{T_f}{T_i}P_i = \frac{(130\,^{\circ}\mathrm{C}+273)}{(120\,^{\circ}\mathrm{C}+273)} \times 1.$$

Finalement, on trouve $P_f = 1{,}03\,\mathrm{bar}$.

.....

20.8 b) On a $\mathrm{d}H = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}P$. Ainsi, on a

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}H}{T} - nR\frac{\mathrm{d}P}{P}.$$

En intégrant cette relation, on obtient :

$$\Delta S = C_P\ln\Big(\frac{T_f}{T_i}\Big) - nR\ln\Big(\frac{P_f}{P_i}\Big) = \frac{5}{2}nR\ln\Big(\frac{T_f}{T_i}\Big) - nR\ln\Big(\frac{P_f}{P_i}\Big).$$

Comme $PV = nRT$, on a $\dfrac{T_f}{T_i} = \dfrac{P_f}{P_i}$ et donc $\Delta S = \dfrac{3}{2}nR\ln\Big(\dfrac{T_f}{T_i}\Big)$.

L'application numérique donne $\Delta S = 0{,}31\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$.

.....

20.9 a) On a $S_e = \dfrac{1{,}00\,\text{mol} \times 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}}{1{,}4-1}\ln\left(\dfrac{550\,\text{K}}{500\,\text{K}}\right) = 1{,}98\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

.....

20.9 b) Le premier principe s'écrit : $\Delta U = \underbrace{W}_{=0} + Q$.

Le gaz étant supposé parfait, la première loi de Joule s'applique : on a $\Delta U = C_v \Delta T$.

De plus, sa capacité thermique satisfait la relation de Mayer : on a $C_p - C_v = nR$ donc $C_v = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$ par définition du coefficient adiabatique $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$.

Par conséquent, l'entropie échangée s'exprime :

$$S_e = \frac{\Delta U}{T_0} = \frac{\frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_i)}{T_0}.$$

L'application numérique donne

$$S_e = \frac{\dfrac{1{,}00\,\text{mol} \times 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}}{1{,}4-1}(550\,\text{K} - 500\,\text{K})}{550\,\text{K}} = 1{,}89\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}.$$

.....

20.9 c) Le second principe s'écrit $\Delta S = S_e + S_c$. L'entropie créée au cours de la transformation étudiée vaut $S_c = \Delta S - S_e$ =1,98 J · K^{-1} - 1,89 J · K^{-1} = 0,09 J · K^{-1}. Puisque $S_c > 0$, on peut conclure que la transformation n'est pas réversible.

.....

20.10 La détente étant isoénergétique, on a $\Delta U = 0 = W + Q$. Comme il s'agit d'une détente dans le vide, on a $W = 0$ et ainsi $Q = 0$: cette détente brutale et rapide est adiabatique. Le second principe s'écrit :

$$\Delta S = \underbrace{\frac{Q}{T_0}}_{=0} + S_c.$$

De plus, la détente du gaz parfait étant isoénergétique, on a $T_i = T_f$ (en utilisant la première loi de Joule). Ainsi, on peut écrire $\Delta S = nR\ln\left(\dfrac{V_f}{V_i}\right)$. Finalement, on a $S_c = nR\ln(2)$.

.....

20.11 a) L'expression comporte trois termes : la variation d'enthalpie liée au changement de température de l'eau à l'état liquide, la variation d'enthalpie liée à la vaporisation de l'eau et enfin la variation d'enthalpie liée au changement de température de l'eau à l'état gazeux. Le premier terme décrit la variation de température de l'eau à l'état liquide, qui est chauffée de T_2 à T_1 (car la différence $T_1 - T_2$ correspond au bilan entre l'état final et l'état initial), autrement dit de $T_2 = T_i$ (température initiale) à $T_1 = T_0$ (changement d'état). Le résultat est cohérent car $T_0 - T_i > 0$: la variation d'entropie est positive, ce qui est cohérent avec une transformation de type chauffage.

.....

20.11 b) Voir corrigé précédent.

.....

20.11 c) Le troisième terme décrit la variation de température de l'eau à l'état gazeux, qui est chauffée de T_4 à T_3 (car la différence $T_4 - T_3$ correspond au bilan entre l'état final et l'état initial), autrement dit de $T_4 = T_0$ (changement d'état) à $T_3 = T_f$ (température finale). Le résultat est cohérent car $T_f - T_0 > 0$ et donc la variation d'entropie est positive, ce qui est cohérent avec une transformation de type chauffage.

.....

20.11 d) Voir corrigé précédent.

.....

20.11 e) De manière analogue à l'expression de la variation d'enthalpie forunie par l'énoncé, la variation d'entropie s'exprime en trois termes. Après intégration entre l'état initial et l'état final, on obtient :

$$\Delta S = mc_{\text{eau}} \ln\left(\frac{T_0}{T_i}\right) + m\frac{\Delta_{\text{vap}}H^o}{T_0} + mc_{P,\text{vapeur}} \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right).$$

L'application numérique donne

$$\begin{aligned}\Delta S = 1{,}00\,\text{kg} \times 4\,180\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1} \times \ln\left(\frac{373\,\text{K}}{353\,\text{K}}\right) + 1{,}00\,\text{kg} \times \frac{2\,257\,\text{kJkg}^{-1}}{373\,\text{K}} \\ + 1{,}00\,\text{kg} \times 2\,010\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1} \times \ln\left(\frac{393\,\text{K}}{373\,\text{K}}\right) \\ = 6\,390\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}.\end{aligned}$$

.....

20.12 a) La capacité thermique molaire est C_m qu'on peut exprimer en $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$. La capacité thermique massique c est donnée par $c = \dfrac{C_m}{M}$. L'application numérique pour le cuivre donne $c_1 = 393\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

20.12 b) De même, en utilisant $c = \dfrac{C_m}{M}$, l'application numérique pour le fer donne $c_2 = 447\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

20.12 c) Les phases condensées sont de volume constant donc $W = 0$, et le système est supposé isolé donc $Q = 0$. L'application du premier principe au système donne $\Delta U = 0$. L'additivité de l'énergie interne permet d'écrire :

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0.$$

On a donc

$$m_1c_1(T_f - T_1) + m_2c_2(T_f - T_2) = 0.$$

On isole T_f pour obtenir

$$T_f = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2}{m_1c_1 + m_2c_2}.$$

.....

20.12 d) L'application numérique donne $T_f = 361\,\text{K}$.

.....

20.12 e) Pour une phase condensée, on a $C_V = C_P = C_m$ et $\text{d}U = \text{d}H = mc\,\text{d}T$. Ainsi, on a $\text{d}S = \dfrac{mc\,\text{d}T}{T}$.
Par additivité de l'entropie, puis par intégration, on peut écrire que la variation d'entropie du système est :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m_1c_1 \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) + m_2c_2 \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right).$$

L'application numérique donne $\Delta S = 7{,}54\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$.

.....

20.12 f) Appliquons le second principe sur le système formé par l'ensemble des deux solides : on a

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T^{\text{ext}}} + S_c = S_c,$$

où l'entropie d'échange $\displaystyle\int \frac{\delta Q}{T^{\text{ext}}} = 0$ car le système est isolé ; il n'échange donc pas de transfert thermique avec l'extérieur.
Par conséquent, l'entropie créée vaut $S_c = \Delta S = 7{,}49\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1} > 0$. Cette valeur est strictement positive : ainsi, la transformation est irréversible.

.....

20.13 a) L'efficacité d'une machine frigorifique (ou COP) est : $\text{COP} = \dfrac{Q_F}{W}$. Ainsi, on a $Q_F = W \times \text{COP}$.

.....

20.13 b) L'application numérique donne $Q_F = 20{,}4\,\text{MJ}$.

Attention pour une machine frigorifique, on a $Q_F > 0$, $Q_C < 0$ et $W > 0$.

.....

20.13 c) Sur un cycle, on a $\Delta U = W + Q_C + Q_F = 0$. Donc, $Q_C = -W - Q_F$.

L'application numérique donne $Q_C = -37{,}4\,\text{MJ}$.

.....

20.14 a) Le premier principe sur le cycle donne $\Delta U = W + Q_C + Q_F = 0$. Ainsi, on a $Q_F = -W - Q_C$.

Attention, il faut bien identifier que pour un moteur $W = -500\,\text{J}$ et $Q_C = 1\,500\,\text{J}$.

L'application numérique donne $Q_F = -1\,000\,\text{J}$.

.....

20.14 b) L'efficacité du moteur est $\eta = \dfrac{-W}{Q_C}$ avec ici $W = -500\,\text{J}$ et $Q_C = 1\,500\,\text{J}$. On arrive à $\eta = 33\,\%$.

Il est important d'identifier le signe des transferts ici.

.....

20.15 a) L'efficacité d'une pompe à chaleur (ou COP) est : $\text{COP} = \dfrac{-Q_C}{W}$. Ainsi, $W = \dfrac{-Q_C}{\text{COP}}$.

.....

20.15 b) L'application numérique donne $W = \dfrac{-Q_C}{\text{COP}} = \dfrac{-(-3\,\text{GJ})}{3} = 1\,\text{GJ}$.

Attention, pour une pompe à chaleur, on a $Q_F > 0$, $Q_C < 0$ et $W > 0$.

.....

20.15 c) On a $1\,\text{kWh} = 1\,000\,\text{Wh} = 1\,000\,\text{W} \times 3\,600\,\text{s} = 3{,}6\,\text{MJ}$.

.....

20.15 d) La pompe utilise une énergie $W = 1\,\text{GJ}$ par semaine, soit $1 \times 10^9/(3{,}6 \times 10^6)$ kWh. En multipliant par le coût de 0,17 centime du kilowattheure et en considérant la moitié des 52 semaines annuelles, on obtient un coût annuel de

$$\frac{1 \times 10^9}{3{,}6 \times 10^6} \times 0{,}17\,\text{euros} \times \frac{52}{2} = 1\,228\,\text{euros} = 1{,}2 \times 10^3\,\text{euros}$$

(en prenant le bon nombre de chiffres significatifs).

.....

20.16 a) Le rendement de Carnot d'un moteur cyclique ditherme est donné par $\eta = 1 - \dfrac{T_F}{T_C}$. Après avoir converti les températures en kelvins en ajoutant 273,15, on trouve $\eta = 33\,\%$.

.....

20.16 b) Pour un moteur, on a $\eta = \dfrac{-W}{Q_C}$. Or, sur un cycle, on a $\Delta U = W + Q_C + Q_F = 0$. Ainsi, on a :

$$\eta = \frac{-W}{-W - Q_F} \quad \text{et donc} \quad W = \frac{\eta Q_F}{1 - \eta}.$$

.....

20.16 c) Il faut identifier que, pour un moteur, on a $Q_F < 0$ soit ici $Q_F = -600\,\text{J}$.

L'application numérique donne : $W = \dfrac{0{,}33 \times (-600\,\text{J})}{1 - 0{,}33} = -295\,\text{J}$.

Si on considère que $\eta = 1/3$, on trouve $W = -300\,\text{J}$.

.....

20.16 d) Le moteur fournit 295 J par cycle à un régime de 2000 cycles par minute. La puissance P est donc :

$$P = \frac{295\,\text{J} \times 2\,000\,\text{cycles} \cdot \text{min}^{-1}}{60\,\text{s} \cdot \text{min}^{-1}} = 9\,833\,\text{W}.$$

En utilisant que $1\,\text{cv} = 736\,\text{W}$, on obtient $P = 13{,}4\,\text{cv}$.

Si on considère que $W = -300\,\text{J}$, on trouve $P = 13{,}5\,\text{cv}$.

.....

20.17 a) Pour un gaz parfait, on a l'équation d'état $PV = nRT$, ainsi $V = \dfrac{nRT}{P}$.

On dérive par rapport à P à T constant ; on obtient

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{-nRT}{P^2} \qquad \text{et donc} \qquad \chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{nRT}{VP^2}.$$

En utilisant à nouveau l'équation d'état $PV = nRT$, il vient alors $\chi_T = \dfrac{1}{P}$.

.....

20.17 b) Pour un gaz parfait, on a l'équation d'état $PV = nRT$, ainsi $V = \dfrac{nRT}{P}$.

On dérive par rapport à T à P constant ; on obtient

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P} \qquad \text{et donc} \qquad \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{PV}.$$

En utilisant à nouveau l'équation d'état $PV = nRT$, il vient alors $\alpha = \dfrac{1}{T}$.

.....

20.17 c) On utilise l'équation d'état $PV = nRT$ pour isoler la variable à dériver. Après calcul, on obtient :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P}, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{V}{nR} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{nRT}{V^2}.$$

On arrive alors à $Y = -1$.

.....

Fiche n° 21. Statique des fluides

Réponses

21.1 a) $\boxed{75\,\mathrm{N\cdot cm^{-2}}}$

21.1 b) $\boxed{7{,}5\,\mathrm{bar}}$

21.1 c) $\boxed{7{,}4\,\mathrm{atm}}$

21.2 $\boxed{1{,}9\times10^{2}\,\mathrm{N}}$

21.2 $\boxed{6\,\mathrm{bar}}$

21.3 $\boxed{\text{c}}$

21.4 $\boxed{\text{d}}$

21.5 a) $\boxed{p_0+\rho g z_1}$

21.5 b) $\boxed{p_0+\rho g(H-h-z_2)}$

21.5 c) $\boxed{\rho g(H-z_3\sin(\alpha))+p_0}$

21.6 a) $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_x}-\vec{e_y})}$

21.6 b) $\boxed{-\vec{e_y}}$

21.6 c) $\boxed{-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\vec{e_x}+\vec{e_y}\right)}$

21.7 a) $\boxed{\text{b}}$

21.7 b) $\boxed{\text{c}}$

21.7 c) $\boxed{\text{a}\ \text{c}}$

21.7 d) $\boxed{\dfrac{\rho_\mathrm{h}V_\mathrm{h}}{\rho_\mathrm{e}s}}$

21.8 a) $\boxed{p_0+\rho gH}$

21.8 b) $\boxed{p_0+\rho g\left(H+\dfrac{s}{S}h\right)}$

21.9 a) $\boxed{12\ \mathrm{N}}$

21.9 b) $\boxed{51\ \mathrm{N}}$

21.9 c) $\boxed{82\ \mathrm{N}}$

21.10 $\boxed{\text{b}}$

21.11 a) $\boxed{0}$

21.11 b) $\boxed{0}$

21.11 c) $\boxed{-\rho g a^3}$

21.11 d) $\boxed{-\vec{P_\mathrm{d}}}$

21.12 a) $\boxed{2\,\mathrm{N}}$

21.12 b) $\boxed{5}$

21.13 a) $\boxed{[\rho_\mathrm{s}h-\rho_\ell(h-x)]S\,\vec{g}}$

21.13 b) $\boxed{h\left(\dfrac{\rho_\ell-\rho_\mathrm{s}}{\rho_\ell}\right)}$

21.13 c) $\boxed{(\rho_\ell-\rho_\mathrm{s})Shg}$

21.14 a) $\boxed{\text{a}}$

21.14 b) $\boxed{\dfrac{1}{3}\dfrac{S(h-x)^3}{h^2}}$

21.14 c) $\boxed{h\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{\rho_\mathrm{s}}{\rho_\mathrm{e}}}\right)}$

21.15 a) $\boxed{\text{b}}$

21.15 b) $\boxed{\text{b}}$

21.15 c) $\boxed{\text{c}}$

21.16 a) $\boxed{A\vec{e_z}}$

21.16 b) $\boxed{By^2\vec{e_x}+2Bxy\vec{e_y}+2C\mathrm{e}^{2z}\vec{e_z}}$

21.17 a) $\boxed{43{,}6\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}}$

21.17 b) $\boxed{14{,}8\,\mathrm{g\cdot m^{-3}}}$

21.17 c) $\boxed{\text{c}}$

21.17 d) $\boxed{55\,\mathrm{km}}$

21.18 a) $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{2p}{z_\mathrm{max}}}$

21.18 b) $\boxed{p_0\,\mathrm{e}^{-2z/z_\mathrm{max}}}$

21.19 a) $\boxed{p_0\mathrm{e}^{-agz/p_0}}$

21.19 b) ..... $\boxed{p_0 + \dfrac{a}{b}\left(\mathrm{e}^{-bgz} - 1\right)}$

21.19 c) ..... $\boxed{p_0 - agz + bcg\left(1 - \mathrm{e}^{-z/c}\right)}$

21.20 a) ..... $\boxed{\rho(ay - gz) + p_0}$

21.20 b) ..... $\boxed{z = \dfrac{a}{g}y}$

21.21 a) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}\rho g L h^2}$

21.21 b) ..... $\boxed{\dfrac{1}{6}\rho g L h^3}$

21.21 c) ..... $\boxed{\dfrac{1}{3}h}$

Corrigés

21.1 a) Par définition, on a $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. Ainsi, on a

$$750\,\mathrm{kPa} = 750\times10^3\,\mathrm{Pa} = 750\times10^3\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2} = 750\times10^3\times\mathrm{N}\times(100\,\mathrm{cm})^{-2} = 75\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}^{-2}.$$

.....

21.1 b) En effet, par définition on a $1\,\mathrm{bar} = 1\times10^5\,\mathrm{Pa}$.

.....

21.1 c) Par définition, on a $1\,\mathrm{atm} = 1\,013{,}25\,\mathrm{hPa}$. C'est pourquoi $750\,\mathrm{kPa} = 7\,500\,\mathrm{hPa} = \dfrac{7\,500}{1\,013{,}25} = 7{,}4\,\mathrm{atm}$.

.....

21.2 La force de pression s'écrit $\vec{F} = \iint p\,\vec{n}\,\mathrm{d}S$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à l'élément de la surface dirigé vers l'intérieur du solide. Ici $\vec{n}$ est verticale car la surface est un disque horizontal. Enfin, la pression étant uniforme sur la base du cylindre, on a

$$\vec{F} = pS\,\vec{n} \quad \text{soit} \quad F = p\pi(d/2)^2 = 6\times10^5\times\pi\times(0{,}01)^2 = 1{,}9\times10^2\,\mathrm{N}.$$

.....

21.2 Le volume de gaz ne variant pas, la pression reste la même.

.....

21.3 La formule (a) n'est pas homogène car p_0 est une pression et z une longueur. La formule (b) n'est pas homogène car $p_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{z}{z_{\max}}}\right)$ est une pression et z une longueur. La formule (d) n'est pas homogène car (entre autres) l'expression $1 - z - z^2$ n'est pas homogène, puisque z est une longueur et z^2 une aire.

.....

21.4 Dans un liquide incompressible en équilibre dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$, la pression suit la loi $p(\mathrm{M}) = p_0 + \rho g \times h_\mathrm{M}$ ou h_M est la profondeur du point M depuis la surface libre soumise à une pression p_0.

Ici, le point M se situe à une profondeur $h_\mathrm{M} = h_0 - z$. Donc, on a $p(\mathrm{M}) = p_0 + \rho g(h_0 - z)$.

.....

21.5 a) L'équation fondamentale de la statique des fluides est $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = \rho\vec{g}$. On projette cette égalité suivant l'axe $(\mathrm{O}_1 z_1)$:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z_1} = \rho g \quad \text{d'où après intégration} \quad p(z_1) = \rho g z_1 + C_1.$$

À l'interface air/eau, on a $p(z_1 = 0) = p_0 = C_1$. Ainsi, on a $p(z_1) = p_0 + \rho g z_1$.

.....

21.5 b) Suivant l'axe (O_2z_2), on a $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z_2} = -\rho g$. D'où, $p(z_2) = -\rho g z_2 + C_2$. À l'interface air/eau, on a

$$p(z_2 = H - h) = p_0 = -\rho g(H - h) + C_2.$$

Donc, on a $C_2 = p_0 + \rho g(H - h)$. Finalement, on trouve $p(z_2) = p_0 + \rho g(H - h - z_2)$.

.....

21.5 c) Suivant l'axe (O_3z_3), on a

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z_3} = -\rho g \sin\alpha \quad \text{ce qui donne} \quad p(z_3) = -\rho g \sin\alpha z_3 + C_3.$$

Au fond de l'eau, on a $p(z_3 = 0) = p_0 + \rho g H = C_3$. Par conséquent, on a $p(z_3) = \rho g(H - z_3 \sin\alpha) + p_0$.

On pouvait aussi plus simplement reprendre la formule de la question b) et noter que $z_3 = (z_2 + h)/\sin(\alpha)$, ce qui donne le même résultat.

.....

21.6 a) La force pressante est toujours normale à la surface de l'objet et orientée vers celui-ci.

On trouve ainsi : $\overrightarrow{u_\mathrm{A}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_y})$.

.....

21.6 b) La force pressante est toujours normale à la surface de l'objet et orientée vers celui-ci.

On trouve ainsi : $\overrightarrow{u_\mathrm{B}} = -\overrightarrow{e_y}$.

.....

21.6 c) La force pressante est toujours normale à la surface de l'objet et orientée vers celui-ci.

On trouve ainsi : $\overrightarrow{u_\mathrm{C}} = -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{e_x} - \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{e_y} = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y}\right)$.

.....

21.7 a) Le point A est sous une hauteur h d'huile de masse volumique ρ_h par rapport à la surface. La pression en A vaut donc : $p_\mathrm{A} = p_\mathrm{atm} + \rho_\mathrm{h} g h$. Le volume V_h d'huile occupe la hauteur h dans le tube de section s telle que : $V_\mathrm{h} = sh$. On obtient ainsi $p_\mathrm{A} = p_\mathrm{atm} + \rho_\mathrm{h} g \dfrac{V_\mathrm{h}}{s}$.

.....

21.7 b) Le point B est sous une hauteur d_1 d'eau de masse volumique ρ_e par rapport à A, la pression en B vaut donc : $p_\mathrm{B} = p_\mathrm{A} + \rho_\mathrm{e} g d_1$.

.....

21.7 c) Le point C est sous une hauteur d_2 d'eau par rapport à la surface. La pression en C vaut donc :

$$p_\mathrm{C} = p_\mathrm{atm} + \rho_\mathrm{e} g d_2.$$

De plus, les points B et C sont à la même altitude dans le même fluide donc $p_\mathrm{B} = p_\mathrm{C}$.

.....

21.7 d) À partir des expressions de p_A, p_B et p_C obtenues précédemment, la relation $p_\mathrm{B} = p_\mathrm{C}$ donne :

$$p_\mathrm{atm} + \rho_\mathrm{h} g \frac{V_\mathrm{h}}{s} + \rho_\mathrm{e} g d_1 = p_\mathrm{atm} + \rho_\mathrm{e} g d_2.$$

Il en découle : $d_2 - d_1 = \dfrac{\rho_\mathrm{h} V_\mathrm{h}}{\rho_\mathrm{e} s}$.

.....

21.8 a) La pression qui règne dans un liquide incompressible s'écrit $p(\mathrm{M}) = p_0 + \rho g h_\mathrm{M}$ où h_M est la profondeur du point M depuis la surface libre soumise à une pression p_0. Ainsi, au fond du récipient, on a $p = p_0 + \rho g H$.

.....

21.8 b) En plongeant le solide dans le liquide, on modifie la hauteur de liquide. Notons H' cette nouvelle hauteur. On obtient H' en traduisant l'additivité des volumes :

$$SH + sh = SH' \quad \text{soit} \quad H' = H + \frac{s}{S}h.$$

Finalement, la pression au fond du récipient vaut

$$p = p_0 + \rho g H' = p_0 + \rho g\Big(H + \frac{s}{S}h\Big).$$

.....

21.9 a) On a $\big\|\vec{\Pi}\big\| = m_{\text{gly}} \times g = \rho_{\text{gly}} \times V_{\text{immergé}} \times g$ avec $V_{\text{immergé}} = a^3$. Finalement, on trouve

$$\big\|\vec{\Pi}\big\| = \rho_{\text{gly}} \times a^3 \times g = 1{,}2 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{cm}^{-3} \times (10\,\text{cm})^3 \times 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 12\,\text{N}.$$

.....

21.9 b) On a $\big\|\vec{\Pi}\big\| = m_{\text{savon}} \times g = \rho_{\text{savon}} \times V_{\text{immergé}} \times g$ avec $V_{\text{immergé}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3}\pi a^3$. Finalement, on trouve

$$\big\|\vec{\Pi}\big\| = \frac{2}{3}\rho_{\text{savon}} \times \pi a^3 g = \frac{2}{3} \times 2{,}5 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{cm}^{-3} \times \pi \times (10\,\text{cm})^3 \times 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 51\,\text{N}.$$

.....

21.9 c) On a $\big\|\vec{\Pi}\big\| = m_{\text{eau}} \times g = \rho_{\text{eau}} \times V_{\text{immergé}} \times g$ avec $V_{\text{immergé}} = \dfrac{2}{3}\pi a^2 h$ avec $h = 4a$. Finalement, on trouve

$$\big\|\vec{\Pi}\big\| = \frac{8}{3}\rho_{\text{eau}} \times \pi a^3 g = \frac{8}{3} \times 1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{cm}^{-3} \times \pi \times (10\,\text{cm})^3 \times 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 82\,\text{N}.$$

.....

21.10 En notant $\vec{P}$ le poids du solide et $\vec{\Pi}$ la poussée d'Archimède qui s'exerce sur lui, la condition d'équilibre assure $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$. Par projection sur l'axe vertical, on obtient $m_S g - m_L g = 0$ avec m_L la masse de fluide déplacé par le glaçon. En faisant apparaître les masses volumiques, l'équation $m_S = m_L$ devient $\rho_S V_S = \rho_L V_{\text{imm}}$: (b).

.....

21.11 a) La pression ne dépend que de z, par conséquent les forces de pression qui s'exercent sur les faces latérales verticales se compensent. Aussi a-t-on $R_x = 0$.

.....

21.11 b) Pour les mêmes raisons que précédemment, $R_y = 0$.

.....

21.11 c) Rappelons que la pression vérifie la loi $p(z) = p_0 + \rho g z$ avec p_0 la pression qui règne à la surface libre. Faisons un bilan des forces qui agissent sur les faces horizontales du cube. La face du dessus ressent la force $\vec{F_1} = (p_0 + \rho g z_1)a^2\,\vec{e_z}$ alors que la face du dessous subit une force pressante $\vec{F_2} = -(p_0 + \rho g z_2)a^2\,\vec{e_z}$. Ainsi, la résultante des forces pressantes verticale vaut

$$R_z = (\vec{F_1} + \vec{F_2}) \cdot \vec{e_z} = -\rho g a^2 (z_2 - z_1) = -\rho g a^3.$$

.....

21.11 d) On trouve donc $\vec{R} = -\rho g a^3\,\vec{e_z}$. L'immersion du solide déplace un volume a^3 de liquide qui a pour masse $m = \rho\, a^3$ et poids $\vec{P_{\text{d}}} = \rho a^3\,\vec{g} = \rho a^3 g\,\vec{e_z}$. Ainsi on trouve $\vec{R} = -\vec{P_{\text{d}}}$ conformément au principe d'Archimède.

.....

21.12 a) Avant immersion, on a $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$ où $\vec{P}$ est le poids du solide. Après, on a $\vec{T'} + \vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$ où $\vec{\Pi}$ est la poussée d'Archimède. On en déduit

$$\vec{\Pi} = \vec{T} - \vec{T'} \quad \text{soit} \quad \|\vec{\Pi}\| = \|\vec{T} - \vec{T'}\| = 10\,\text{N} - 8\,\text{N} = 2\,\text{N}.$$

.....

21.12 b) On a vu que le poids vaut $P = 10\,\text{N}$ et la poussée d'Archimède $\Pi = 2\,\text{N}$. Or, on a

$$P = \rho_\text{s} V g \quad \text{et} \quad \Pi = \rho_\text{e} V g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_\text{s} & \text{masse volumique du solide} \\ \rho_\text{e} & \text{masse volumique de l'eau.} \end{cases}$$

Le rapport de ces deux relations donne immédiatement la densité du solide : $d = \dfrac{\rho_\text{s}}{\rho_\text{e}} = \dfrac{P}{\Pi} = 5$.

.....

21.13 a) Le poids du bloc solide vaut $\vec{P} = \rho_\text{s} S h\, \vec{g}$. La poussée d'Archimède est l'opposée du poids de liquide déplacé, à savoir $\vec{\Pi} = -\rho_\ell S(h-x)\, \vec{g}$. Ainsi, la résultante des forces vaut $\vec{R} = \big[\rho_\text{s} h - \rho_\ell (h-x)\big] S\, \vec{g}$.

.....

21.13 b) La condition d'équilibre mécanique $\vec{R} = \vec{0}$ donne $\rho_\text{s} h - \rho_\ell (h-x) = 0$ et donc $x = h\left(\dfrac{\rho_\ell - \rho_\text{s}}{\rho_\ell}\right)$.

.....

21.13 c) La résultante des forces vaut maintenant $\vec{R} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F}$. En faisant $x = 0$ dans l'expression obtenue à la question a), on trouve

$$\vec{R} = (\rho_\text{s} h - \rho_\ell h) S\, \vec{g} + \vec{F}.$$

La condition d'équilibre $\vec{R} = \vec{0}$ donne alors $\vec{F} = (\rho_\ell h - \rho_\text{s} h) S\, \vec{g}$, d'où $\|\vec{F}\| = |(\rho_\ell h - \rho_\text{s} h) S| g = (\rho_\ell - \rho_\text{s}) S h g$.

.....

21.14 a) La proposition (a) est homogène car $\rho_\text{s}/\rho_\text{e}$ est sans dimension et h est homogène à une longueur.

La formule (b) n'est pas homogène à cause de la racine cubique.

La formule (c) n'est pas homogène non plus car on ajoute une longueur (h) à une masse volumique (ρ_s).

Enfin, la proposition (d) n'est pas homogène car le produit d'une masse volumique par une longueur ne peut pas donner une longueur.

.....

21.14 b) Le volume immergé s'écrit $V_\text{imm} = \dfrac{1}{3} S'(h-x)$ où S' est l'aire de la base du volume conique immergé. Si l'on note r' le rayon de cette base, on a

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \left(\frac{h-x}{h}\right)^2,$$

où la dernière égalité utilise les relations de Thalès (r est le rayon de la base de l'iceberg et r' celui du cône immergé). On en déduit

$$V_\text{imm} = \frac{1}{3} \frac{S(h-x)^3}{h^2}.$$

.....

21.14 c) Le poids du cône vaut $\vec{P} = m\, \vec{g}$ avec $m = \dfrac{1}{3} S h \rho_\text{s}$ et S l'aire de la base du cône.

Quant à la poussée d'Archimède, on a $\vec{\Pi} = -m_\text{d}\, \vec{g}$ où m_d désigne la masse de liquide déplacé par l'immersion du cône. On a $m_\text{d} = \rho_\text{e} V_\text{imm} = \dfrac{1}{3} \dfrac{S(h-x)^3}{h^2} \rho_\text{e}$ d'où $\vec{\Pi} = -\dfrac{1}{3} \dfrac{S(h-x)^3}{h^2} \rho_\text{e}\, \vec{g}$. La condition d'équilibre $\vec{\Pi} + \vec{P} = \vec{0}$ donne

$$\left[\frac{1}{3} S h \rho_\text{s} - \frac{1}{3} S \frac{(h-x)^3}{h^2} \rho_\text{e}\right] \vec{g} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad x = h\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_\text{s}}{\rho_\text{e}}}\right).$$

.....

21.15 a) La masse m_B peut se décomposer en notant m_liq la masse de la partie liquide et $m_\mathrm{glaçon}$ celle des glaçons :

$$m_\mathrm{B} = m_\mathrm{liq} + m_\mathrm{glaçon} = \rho_e(V_\mathrm{tot} - V_\mathrm{im}) + m_\mathrm{glaçon},$$

en notant ρ_e la masse volumique de l'eau, V_tot le volume total du verre (égal à celui du verre A) et V_im le volume immergé des glaçons.

Par ailleurs, l'équilibre mécanique des glaçons donne d'après le PFD : $m_\mathrm{glaçon} = \rho_e V_\mathrm{im}$. Ainsi, $m_\mathrm{B} = \rho_e V_\mathrm{tot} = m_\mathrm{A}$.

.....

21.15 b) Le polystyrène étant moins dense que la glace il est aussi moins dense que l'eau. Par conséquent, les boules flottent. Ayant la même masse que les glaçons, les boules de polystyrène présenteront un volume immergé identique à la situation précédente. La hauteur sera donc identique.

.....

21.15 c) Le fer est plus dense que l'eau, donc les boules coulent. On note V_sb1 et V_sb2 respectivement les volumes submergés avec les glaçons et avec les boules de fer. On a les relations :

$$V_\mathrm{sb1} = V_\mathrm{liq} + V_\mathrm{im} \qquad \text{et} \qquad V_\mathrm{sb2} = V_\mathrm{liq} + V_\mathrm{Fe}.$$

De plus, comme les boules de fer sont de même masse que les glaçons : $m_\mathrm{glaçon} = \rho_e V_\mathrm{im} = m_\mathrm{Fe} = \rho_\mathrm{Fe} V_\mathrm{Fe}$ en notant ρ_Fe la masse volumique du fer et V_Fe leur volume. Ainsi : $V_\mathrm{Fe} = \left(\dfrac{\rho_e}{\rho_\mathrm{Fe}}\right) V_\mathrm{im}$. Ainsi, on a

$$V_\mathrm{sb2} = V_\mathrm{liq} + \left(\frac{\rho_e}{\rho_\mathrm{Fe}}\right) V_\mathrm{im}$$

avec $\dfrac{\rho_e}{\rho_\mathrm{Fe}} < 1$. Ainsi, $V_\mathrm{sb2} < V_\mathrm{sb1}$: le niveau diminue.

.....

21.16 a) On a

$$\frac{\partial(p_0 + Az)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(p_0 + Az)}{\partial y} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(p_0 + Az)}{\partial z} = A.$$

On en déduit $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) = A\vec{e_z}$.

.....

21.16 b) On a

$$\frac{\partial(Bxy^2 + C\mathrm{e}^{2z})}{\partial x} = By^2, \qquad \frac{\partial(Bxy^2 + C\mathrm{e}^{2z})}{\partial y} = 2Bxy \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(Bxy^2 + C\mathrm{e}^{2z})}{\partial z} = 2C\mathrm{e}^{2z}.$$

Par conséquent, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) = By^2\vec{e_x} + 2Bxy\vec{e_y} + 2C\mathrm{e}^{2z}\vec{e_z}$.

.....

21.17 a) La masse molaire d'un mélange s'obtient en effectuant la moyenne pondérée des masses molaires :

$$\begin{aligned} M &= 0{,}96M(\mathrm{CO_2}) + 0{,}02M(\mathrm{Ar}) + 0{,}02M(\mathrm{N_2}) \\ &= 0{,}96 \times 44\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}} + 0{,}02 \times 40\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}} + 0{,}02 \times 28\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}} = 43{,}6\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}. \end{aligned}$$

.....

21.17 b) En partant de l'équation d'état des gaz parfaits, on a :

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT \quad \text{donc} \quad \frac{pM}{RT} = \frac{m}{V} = \rho.$$

L'application numérique donne : $\rho = \dfrac{6 \times 10^2\,\mathrm{Pa} \times 43{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot mol^{-1}}}{8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}} \times 213{,}15\,\mathrm{K}} = 14{,}8\,\mathrm{g\cdot m^{-3}}$.

.....

21.17 c) On remplace ρ par son expression trouvée précédemment et on obtient alors une équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT}p \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \frac{p}{z_0} = 0.$$

Ainsi, on a

$$p(z) = p_0 \exp\Big(-\frac{z}{z_0}\Big) \qquad \text{avec } z_0 = \frac{RT}{Mg}.$$

.....

21.17 d) On calcule $H = 5z_0 = 5\dfrac{8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}} \times 213{,}15\,\mathrm{K}}{43{,}6\times10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot mol^{-1}} \times 3{,}72\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}} = 55\,\mathrm{km}.$

.....

21.18 a) En effet, on a $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \dfrac{p(z+\mathrm{d}z)-p(z)}{\mathrm{d}z}$, ce qui donne l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{2p}{z_{\max}}$.

.....

21.18 b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du type $y' + ay = 0$.

La solution s'écrit $p(z) = A\,\mathrm{e}^{-2z/z_{\max}}$ avec A une constante d'intégration que l'on détermine à l'aide de la contrainte $p(z=0) = p_0$. On trouve $p(z) = p_0\,\mathrm{e}^{-2z/z_{\max}}$.

.....

21.19 a) La projection de l'équation de la statique sur les axes $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$ donne $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$. Le champ de pression ne dépend donc que de z. La projection selon $(\mathrm{O}z)$ donne alors

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{ag}{p_0}p.$$

Par conséquent, on aboutit à l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \frac{ag}{p_0}p = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les solutions s'écrivent $p(z) = C_1\mathrm{e}^{-agz/p_0}$.

On détermine la constante d'intégration C_1 à l'aide des conditions aux limites :

$$p(z=0) = p_0 = C_1 \quad \text{d'où} \quad p(z) = p_0\mathrm{e}^{-agz/p_0}.$$

.....

21.19 b) Pour les mêmes raisons que précédemment, le champ de pression ne dépend que de z. La projection de l'équation de la statique suivant $(\mathrm{O}z)$ donne

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + bg\,p = -ag + bgp_0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du première ordre avec un second membre constant. Les solutions de l'équation homogène se mettent sous la forme $p_{\mathrm{h}}(z) = C_2\mathrm{e}^{-bgz}$, et il est facile de trouver une solution particulière constante : $p_{\mathrm{part}} = p_0 - \dfrac{a}{b}$. La solution générale s'écrit donc

$$p(z) = p_{\mathrm{h}}(z) + p_{\mathrm{part}} = C_2\mathrm{e}^{-bgz} + p_0 - \frac{a}{b}.$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer C_2 à l'aide de la condition aux limites :

$$p(z=0) = p_0 = C_2 + p_0 - \frac{a}{b} \quad \text{d'où} \quad p(z) = p_0 + \frac{a}{b}\big(\mathrm{e}^{-bgz} - 1\big).$$

.....

21.19 c) À nouveau, le champ de pression ne dépend que de z. La projection de l'équation de la statique suivant (Oz) donne

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -ag + bg\mathrm{e}^{-z/c}.$$

On obtient $p(z)$ en cherchant la primitive de $-ag + bg\mathrm{e}^{-z/c}$, à savoir : $p(z) = -agz - bcg\mathrm{e}^{-z/c} + C_3$.

La condition $p(0) = p_0$ impose $bcg + C_3 = p_0$ soit $C_3 = p_0 - bcg$. Finalement, on trouve :

$$p(z) = p_0 - agz + bcg\big(1 - \mathrm{e}^{-z/c}\big).$$

.....

21.20 a) Projetons l'équation de la statique sur les trois axes cartésiens : on trouve

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho a \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

La première relation implique que le champ de pression ne dépend que de y et z.

Intégrons la deuxième relation :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a \quad \text{donc} \quad p(y,z) = \rho a y + f(z).$$

Dérivons cette dernière relation par rapport à z : $\dfrac{\partial p}{\partial z} = f'(z)$. Par identification avec la troisième projection, on trouve

$$f'(z) = -\rho g \quad \text{donc} \quad f(z) = -\rho g z + C.$$

Le champ de pression se met sous la forme $p(y,z) = \rho a y - \rho g z + C$. Déterminons la constante d'intégration C à l'aide de la condition aux limites :

$$p(y=0, z=0) = p_0 = C \quad \text{d'où} \quad p(y,z) = \rho(ay - gz) + p_0.$$

.....

21.20 b) La surface libre est l'ensemble des points du liquide soumis à une pression p_0 :

$$p(y,z) = \rho(ay - gz) + p_0 = p_0 \quad \text{donne} \quad z = \frac{a}{g} y.$$

Il s'agit de l'équation d'un plan incliné d'un angle $\alpha = \arctan(a/g)$.

.....

21.21 a) On calcule

$$\begin{aligned} F_p &= \iint p(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint \rho g(h-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \rho g \int_0^L \mathrm{d}y \int_0^h (h-z)\,\mathrm{d}z = \rho g L \Big[hz - \frac{z^2}{2}\Big]_0^h \\ &= \rho g L (h^2 - \frac{h^2}{2}) = \frac{1}{2}\rho g L h^2. \end{aligned}$$

.....

21.21 b) On calcule

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p &= \iint z\; p(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint \rho g(hz - z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \rho g \int_0^L \mathrm{d}y \int_0^h (hz - z^2)\,\mathrm{d}z = \rho g L \Big[\frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\Big]_0^h \\ &= \rho g L (\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}) = \frac{1}{6}\rho g L h^3. \end{aligned}$$

.....

21.21 c) On a $z_C = \dfrac{\mathcal{M}_p}{F_p} = \dfrac{\frac{1}{6}\rho g L h^3}{\frac{1}{2}\rho g L h^2} = \dfrac{1}{3}h.$

.....

Fiche n° 22. Fondamentaux de la chimie des solutions

Réponses

22.1 a) ..... $\boxed{18\,\text{mmol}}$

22.1 b) ..... $\boxed{1{,}1 \times 10^{22}}$

22.2 a) ..... $\boxed{621\,\text{g}}$

22.2 b) ..... $\boxed{51{,}8\,\text{mol}}$

22.2 c) ..... $\boxed{3{,}12 \times 10^{25}}$

22.3 a) ..... $\boxed{8{,}01 \times 10^{24}}$

22.3 b) ..... $\boxed{1{,}75 \times 10^{-22}}$

22.3 c) ..... $\boxed{1\,400}$

22.4 ..... $\boxed{\text{Le cuivre}}$

22.5 a) ..... $\boxed{1}$

22.5 b) ..... $\boxed{[H_3O^+] = 10^{-7}\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$

22.5 c) ..... $\boxed{\text{pH}_0 - 2}$

22.6 a) ..... $\boxed{\text{(x)} = 2{,}85 \text{ et } \text{(y)} = 5{,}80}$

22.6 b) .... $\boxed{\text{(a)} = H_2A, \text{(b)} = HA^- \text{ et } \text{(c)} = A^{2-}}$

22.6 c) ..... $\boxed{HA^-}$

22.6 d) ..... $\boxed{H_2A}$

22.6 e) ..... $\boxed{A^{2-}}$

22.7 a) ..... $\boxed{\text{Le premier}}$

22.7 b) ..... $\boxed{\text{Le premier}}$

22.8 a) ..... $\boxed{90\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}}$

22.8 b) ..... $\boxed{0{,}26\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$

22.9 a) ..... $\boxed{\text{(c)}}$

22.9 b) ..... $\boxed{\dfrac{C_1V_1}{V_1 + V_2}}$

22.10 a) ..... $\boxed{0{,}28\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}}$

22.10 b) ..... $\boxed{24\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}}$

22.11 a) ..... $\boxed{\text{Aucune}}$

22.11 b) ..... $\boxed{\dfrac{C_1V_1 + C_2V_2}{V_1 + V_2}}$

22.12 a) ..... $\boxed{\dfrac{n \times M}{V}}$

22.12 b) ..... $\boxed{\dfrac{V \times C_m}{M}}$

22.12 c) ..... $\boxed{V = \dfrac{m}{C \times M}}$

22.13 a) ..... $\boxed{25\,\text{mL}}$

22.13 b) ..... $\boxed{3{,}2\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}}$

22.14 a) ..... $\boxed{7{,}2\,\text{g}}$

22.14 b) ..... $\boxed{600\,\text{g}}$

22.15 a) ..... $\boxed{2{,}2\,\text{mol}}$

22.15 b) ..... $\boxed{4{,}4\,\text{mol}}$

22.15 c) ..... $\boxed{2{,}2\,\text{mol}}$

22.16 a) ..... $\boxed{0{,}128\,\text{mol}}$

22.16 b) ..... $\boxed{0{,}128\,\text{mol}}$

22.16 c) ..... $\boxed{4{,}86\,\text{g}}$

22.17 a) ..... $\boxed{3{,}4\,\text{g}}$

22.17 b) ..... $\boxed{1{,}33}$

22.17 c) ..... $\boxed{\text{Il a diminué.}}$

22.18 a) ..... $\boxed{\text{(1)}}$

22.18 b) ..... $\boxed{\text{(2)}}$

22.18 c) ..... $\boxed{\text{(c)}}$

22.19 a) ..... $\boxed{1{,}19\,\text{kg}}$

22.19 b) ..... $\boxed{0{,}44\,\text{kg}}$

22.19 c) ..... $\boxed{12\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$

22.20 ..... $\boxed{96\,\%}$

22.21 ..... $\boxed{\text{(a)}}$

Corrigés

22.1 a) Par définition, on a

$$n = \frac{m}{M} = \frac{6\,\text{g}}{12 \times 12\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1} + 22 \times 1\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1} + 11 \times 16\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}}.$$

L'application numérique donne $n = 18 \times 10^{-3}\,\text{mol}$.

.....

22.1 b) On a :

$$N = n \times \mathcal{N}_A = 18 \times 10^{-3}\,\text{mol} \times 6{,}02 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}.$$

L'application numérique donne $N = 1{,}1 \times 10^{22}$.

.....

22.2 a) On peut écrire $m = 3\ 106 \times 200 \times 10^{-3}\,\text{g} = 621\,\text{g}$.

.....

22.2 b) On a $n = \dfrac{621\,\text{g}}{12\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}} = 51{,}8\,\text{mol}$.

.....

22.2 c) Par définition, on a

$$N = n \times \mathcal{N}_A = 51{,}8\,\text{mol} \times 6{,}02 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}.$$

L'application numérique donne $N = 3{,}12 \times 10^{25}$.

.....

22.3 a) Déjà, 24,0 cL d'eau pèsent 240 g, la quantité de matière correspondante est donc

$$n = \frac{240\,\text{g}}{18\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}} = 13{,}3\,\text{mol}.$$

Il reste à calculer $N_0 = n \times \mathcal{N}_A = 13{,}3\,\text{mol} \times 6{,}02 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1} = 8{,}01 \times 10^{24}$.

.....

22.3 b) Le rapport des volumes est :

$$R = \frac{24{,}0\,\text{cL}}{1{,}37 \times 10^{18}\,\text{m}^3} = \frac{2{,}40 \times 10^{-1}\,\text{L}}{1{,}37 \times 10^{18}\,\text{m}^3} = \frac{2{,}40 \times 10^{-4}\,\text{m}^3}{1{,}37 \times 10^{18}\,\text{m}^3} = 1{,}75 \times 10^{-22}.$$

.....

22.3 c) Les N_0 molécules d'eau se retrouveront dans l'ensemble du volume V_{tot}, on considère donc qu'on prélève un volume $V = 24\,\text{cL}$ dans le volume total. Ainsi, le rapport des volumes nous donnera la proportion N de molécules d'eau prélevées par rapport à N_0.

Ainsi, le nombre N de molécules d'eau initiales présentes dans le verre à la fin est :

$$N = N_0 \times R = 8 \times 10^{24} \times 1{,}75 \times 10^{-22} = 1\,400.$$

.....

22.4 On rappelle que $1\,\text{cm}^3 = 1\,\text{mL}$ et $1\,\text{dm}^3 = 1\,\text{L}$. On a $\rho_{\text{Cu}} = \dfrac{m}{V} = \dfrac{178\,\text{g}}{20 \times 10^{-3}\,\text{L}} = 8\,900\,\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$. De même, on calcule $\rho_{\text{Fe}} = \dfrac{24 \times 10^3\,\text{g}}{3\,\text{L}} = 8\,000\,\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$.

.....

22.5 c) On a $\mathrm{pH}_0 = -\log_{10}(x/C^\circ)$ et $\mathrm{pH} = -\log_{10}(100x/C^\circ) = -\log_{10}(100) - \log_{10}(x/C^\circ) = -2 + \mathrm{pH}_0$.

.....

22.6 c) Par lecture du diagramme de prédominance, il s'agit directement de l'espèce HA^-.

.....

22.6 d) Commençons par calculer le pH de la solution. Il vaut $\mathrm{pH} = -\log_{10}(1{,}0 \times 10^{-2}) = 2$. Une lecture du diagramme de prédominance montre que l'espèce $\mathrm{H_2A}$ prédomine.

.....

22.6 e) On commence par calculer le pH de la solution ; il vaut $\mathrm{pH} = -\log_{10}(a(\mathrm{H_3O^+}))$.

Le produit ionique de l'eau est défini par $a(\mathrm{H_3O^+}) \times a(\mathrm{HO^-}) = K_e$, ainsi il vient $\mathrm{pH} = -\log_{10}\left(\dfrac{K_e}{a(\mathrm{HO^-})}\right)$.

Donc, on a $\mathrm{pH} = -\log_{10}\left(\dfrac{1 \times 10^{-14}}{1{,}0 \times 10^{-5}}\right) = 9$. Une lecture du diagramme de prédominance à $\mathrm{pH} = 9$ montre que l'espèce $\mathrm{A^{2-}}$ prédomine.

.....

22.7 a) La première concentration en masse du sel est de $267\,\mathrm{g \cdot L^{-1}}$; la deuxième vaut $3\,\mathrm{g \cdot L^{-1}}$.

.....

22.7 b) La première concentration du sucre est de $300\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$; la deuxième vaut $200\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

.....

22.8 a) La concentration en masse est donnée par $C_m = \dfrac{3 \times 6\,\mathrm{g}}{20 \times 10^{-2}\,\mathrm{L}} = 90\,\mathrm{g \cdot L^{-1}}$.

.....

22.8 b) Une analyse dimensionnelle permet de retrouver que $C = \dfrac{C_m}{M} = \dfrac{90\,\mathrm{g}}{344\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}} = 0{,}26\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

.....

22.9 a) Une concentration en quantité de matière s'exprime en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$, seule la dernière proposition est homogène (mais fausse).

.....

22.9 b) La concentration de ces ions dans le mélange est donnée par le rapport de la quantité de matière sur le volume total, soit $[\mathrm{Fe^{3+}}]_i = \dfrac{C_1 V_1}{V_1 + V_2}$.

.....

22.10 a) La masse m_1 de caféine est $m_1 = C_1 \times V_1 = 0{,}7\,\mathrm{g \cdot L^{-1}} \times 100 \times 10^{-3}\,\mathrm{L} = 0{,}07\,\mathrm{g}$. La concentration en masse dans la solution finale de volume $V = V_1 + V_2 = 250\,\mathrm{mL}$ est donc : $C_1' = \dfrac{m_1}{V} = \dfrac{0{,}07\,\mathrm{g}}{250 \times 10^{-3}\,\mathrm{L}} = 0{,}28\,\mathrm{g \cdot L^{-1}}$.

.....

22.10 b) La masse m_2 de sucre est $m_2 = C_2 \times V_2 = 40\,\mathrm{g \cdot L^{-1}} \times 150 \times 10^{-3}\,\mathrm{L} = 6\,\mathrm{g}$. La concentration en masse dans la solution finale de volume $V = V_1 + V_2 = 250\,\mathrm{mL}$ est donc : $C_2' = \dfrac{m_2}{V} = \dfrac{6\,\mathrm{g}}{250 \times 10^{-3}\,\mathrm{L}} = 24\,\mathrm{g \cdot L^{-1}}$.

.....

22.11 a) Une concentration en quantité de matière s'exprime en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$, aucune de ces relations n'est homogène, elles ne peuvent donc pas être correctes.

.....

22.11 b) Lors du mélange, la quantité de matière se conserve. La quantité de matière totale en sucre est

$$n = n_1 + n_2 = C_1V_1 + C_2V_2.$$

Le volume total du mélange est $V = V_1 + V_2$ (en négligeant la contraction des volumes). La concentration en quantité de matière du mélange en sucre est donc $C = \dfrac{n}{V} = \dfrac{C_1V_1 + C_2V_2}{V_1 + V_2}$.

.....

22.12 a) On a $C_m = \dfrac{m}{V} = \dfrac{n \times M}{V}$.

.....

22.12 b) En partant de la relation précédente $C_m = \dfrac{m}{V} = \dfrac{n \times M}{V}$, il vient $C_m \times V = n \times M$ puis $\dfrac{C_m \times V}{M} = n$.

.....

22.12 c) On a $C_m = \dfrac{m}{V}$ et $C_m = M \times C$, ainsi $\dfrac{m}{V} = M \times C$. Soit alors $m = C \times M \times V$. Finalement, on a $V = \dfrac{m}{C \times M}$.

.....

22.13 a) Lors d'une dilution, la quantité de matière prélevée à la solution mère est conservée dans la solution fille. Ainsi, on a $CV_i = C_fV_f$ et donc

$$V_i = \frac{C_fV_f}{C} = \frac{20\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1} \times 100 \times 10^{-3}\,\text{L}}{80\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}}.$$

L'application numérique donne $V_i = 25\,\text{mL}$.

.....

22.13 b) La même démarche donne $C_mV_m = C_fV_f$, soit :

$$C_f = \frac{C_mV_m}{V_f} = \frac{40\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1} \times 20 \times 10^{-3}\,\text{L}}{250 \times 10^{-3}\,\text{L}}.$$

L'application numérique donne $C_f = 3{,}2\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$.

.....

22.14 a) Dans 20 mL d'une solution saturée en sel, on a $m = 358\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1} \times 20 \times 10^{-3}\,\text{L} = 7{,}2\,\text{g}$ de sel.

.....

22.14 b) Dans 300 mL, on peut dissoudre $m = 2 \times 10^3\,\text{g} \times 300 \times 10^{-3}\,\text{L} = 600\,\text{g}$ de sucre.

.....

22.15 a) On a $n = C \times V = \dfrac{C_m}{M} \times V = \dfrac{1\,220\,\text{g}}{138\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} \times 250 \times 10^{-3}\,\text{L} = 2{,}2\,\text{mol}$.

.....

22.15 b) La dissolution de K_2CO_3 donne deux ions K^+. Ainsi, on a $n_1 = 2 \times n = 4{,}4\,\text{mol}$.

.....

22.15 c) La dissolution de K_2CO_3 donne un ion CO_3^{2-}. Ainsi, on a $n_2 = n = 2{,}2\,\text{mol}$.

.....

22.16 a) La quantité de matière de fluorure de calcium que l'on a dissoute est $n = \dfrac{10\,\text{g}}{78\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0{,}128\,\text{mol}$.

.....

22.16 b) Une entité CaF_2 libère un ion Ca^{2+}. Ainsi, en solution on retrouve $n_{Ca^{2+}} = 0{,}128\,\text{mol}$.

.....

22.16 c) Une entité CaF_2 libère deux ions F^-. Ainsi, en solution on retrouve $n_{F^-} = 0{,}256\,\text{mol}$. Cela représente une masse $m_{F^-} = 0{,}256\,\text{mol} \times 19\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1} = 4{,}86\,\text{g}$.

.....

22.17 a) La masse maximale que l'on peut dissoudre dans ce volume est

$$m_{\max} = s \times V = 330\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1} \times 20 \times 10^{-3}\,\mathrm{L} = 6{,}6\,\mathrm{g}.$$

Sur les 10 g introduits, il reste donc 3,4 g non dissous.

.....

22.17 b) La masse volumique de la solution tient compte de la masse du soluté et du solvant (on ne tient pas compte de la masse non dissoute). Ainsi $\rho = \dfrac{6{,}6\,\mathrm{g} + 20\,\mathrm{g}}{20 \times 10^{-3}\,\mathrm{L}} = 1{,}33\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$. La densité est donc $d = 1{,}33$.

.....

22.17 c) Comme la densité réelle augmente à masse constante, il s'agit d'une diminution de volume. On parle d'effet de contraction de volume lors d'une dissolution.

.....

22.18 a) La courbe (1) car on retrouve l'ordre de grandeur de la densité égale à 1.

.....

22.18 b) La courbe (2) car elle présente une densité plus faible que l'eau et peut se retrouver liquide à 230 °C d'après les températures d'ébullition de l'huile et de l'éthanol dans le tableau.

.....

22.18 c) L'eau se vaporise à 100 °C sous pression atmosphérique, cela se confirme par l'arrêt de la courbe de densité du liquide sur le graphe.

.....

22.19 a) Prenons 1 L de solution. La densité vaut 1,19. Cette solution pèse donc $m = 1{,}19\,\mathrm{kg}$.

.....

22.19 b) Cette solution contient $m_{\mathrm{HCl}} = 37\,\% \times 1{,}19 \times 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{L}^{-1} \times 1\,\mathrm{L} = 0{,}44\,\mathrm{kg}$ d'acide pur.

.....

22.19 c) La quantité de matière d'acide chlorhydrique pur contenu dans ce litre de solution est

$$n = \frac{m}{M} = \frac{0{,}44 \times 10^3\,\mathrm{g}}{36{,}5\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}} = 12\,\mathrm{mol}.$$

Ainsi, la concentration en quantité de matière de ce litre de solution est $C = 12\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.

.....

22.20 Prenons 1 L de solution. Cette solution contient $n = 18\,\mathrm{mol}$ d'acide pur. Soit une masse en acide $m_{\mathrm{acide}} = n \times M = 18\,\mathrm{mol} \times 98\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1} = 1\,764\,\mathrm{g} = 1{,}764\,\mathrm{kg}$. Ce litre de solution présente une densité $d = 1{,}84$, donc il pèse 1,84 kg. Ainsi, le titre massique vaut

$$t = \frac{1{,}764}{1{,}84} = 96\,\%.$$

.....

22.21 La masse de la solution est $m = \rho \times V = 0{,}789 \times 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{L}^{-1} \times 10\,000\,\mathrm{L} = 7\,890\,\mathrm{kg}$. Elle contient 95,4 % d'éthanol pur, soit une masse

$$m_{\mathrm{EtOH}} = 0,954 \times 7\,890\,\mathrm{kg} = 7\,527{,}06\,\mathrm{kg}.$$

Cela représente une quantité de matière

$$n_{\mathrm{EtOH}} = \frac{m}{M} = \frac{7\,527{,}06\,\mathrm{kg}}{46{,}07 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}} = 163\,383\,\mathrm{mol} = 163\,\mathrm{kmol}.$$

.....

Fiche n° 23. Fondamentaux de la chimie en phase gazeuse

Réponses

23.1 ..... $\boxed{\dfrac{RT}{P}}$

23.2 a) ..... $\boxed{12{,}5\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}}$

23.2 b) ..... $\boxed{24{,}9\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}}$

23.2 c) ..... $\boxed{495\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}}$

23.2 d) ..... $\boxed{24{,}9\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}}$

23.3 ..... $\boxed{\text{c}}$

23.4 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

23.4 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

23.4 c) ..... $\boxed{\text{d}}$

23.4 d) ..... $\boxed{\text{a}}$

23.5 ..... $\boxed{\text{b}}$

23.6 a) ..... $\boxed{0{,}078\,\mathrm{g\cdot L^{-1}}}$

23.6 b) ..... $\boxed{24{,}8\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}}$

23.6 c) ..... $\boxed{2\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}}$

23.6 d) ..... $\boxed{\mathrm{H_2}}$

23.7 a) ..... $\boxed{RT}$

23.7 b) .. $\boxed{RT + bP - \dfrac{a}{V_m} + \dfrac{ab}{V_m^2}}$

23.7 c) ..... $\boxed{0}$

23.8 ..... $\boxed{\text{a}}$

23.9 a) ..... $\boxed{\dfrac{1}{V_0}\sum_{k=0}^{N} P_k V_k}$

23.9 b) ..... $\boxed{P_0}$

23.9 c) ..... $\boxed{\dfrac{N(N+1)}{2}P_0}$

23.9 d) ..... $\boxed{\dfrac{N n_0 R T_0}{V_0}}$

23.10 a) ..... $\boxed{151\,\mathrm{mmol}}$

23.10 b) ..... $\boxed{0{,}788}$

23.10 c) ..... $\boxed{0{,}21}$

23.10 d) ..... $\boxed{213\,\mathrm{mbar}}$

23.10 e) ..... $\boxed{8\,\mathrm{mmol}}$

23.10 f) ..... $\boxed{0{,}162}$

23.10 g) ..... $\boxed{164\ \mathrm{mbar}}$

23.10 h) ..... $\boxed{51\ \mathrm{mbar}}$

23.11 a) ..... $\boxed{\text{faux}}$

23.11 b) ..... $\boxed{\text{faux}}$

23.11 c) ..... $\boxed{\text{vrai}}$

23.11 d) ..... $\boxed{\text{faux}}$

23.12 a) ..... $\boxed{4\ \mathrm{bar}}$

23.12 b) ..... $\boxed{0,78\ \mathrm{bar}}$

23.12 c) ..... $\boxed{2\times10^{-4}\,\mathrm{bar}}$

23.12 d) ..... $\boxed{9\times10^{1}\,\mathrm{bar}}$

23.12 e) ..... $\boxed{6\times10^{-3}\,\mathrm{bar}}$

23.12 f) ..... $\boxed{0{,}21\,\mathrm{bar}}$

23.13 a) ..... $\boxed{4n-2\xi}$

23.13 b) ..... $\boxed{\dfrac{2n-\xi}{2n}P_i}$

23.13 c) ..... $\boxed{\dfrac{\xi}{2-\xi}P_i}$

23.13 d) ..... $\boxed{\dfrac{(n-\xi)}{4n}P_i}$

23.13 e) ..... $\boxed{\dfrac{3(n-\xi)}{4n}P_i}$

23.14 ..... $\boxed{\text{c}}$

23.15 a) ..... $\boxed{0}$

23.15 b) ..... $\boxed{-2}$

23.15 c) ..... $\boxed{+2}$

23.15 d) ..... $\boxed{-1}$

23.16 a) ..... $\boxed{\dfrac{P^2_{\mathrm{NH_3}}(P^\circ)^2}{P_{\mathrm{N_2}}P^3_{\mathrm{H_2}}}}$

23.16 b) ..... $\boxed{\dfrac{(P^\circ)^5}{P^4_{\mathrm{H_2}}P_{\mathrm{O_2}}}}$

23.16 c) ..... $\boxed{\dfrac{[\mathrm{CO_2}](P^\circ)^3}{P_{\mathrm{CH_4}}P^2_{\mathrm{O_2}}C^\circ}}$

23.16 d) ..... $\boxed{\dfrac{[\mathrm{H_2CO_3}]P^\circ}{P_{\mathrm{CO_2}}C^\circ}}$

23.17 ..... $\boxed{\text{c}}$

Corrigés

23.1 Par définition le volume molaire s'écrit $V_m = \dfrac{V}{n}$, soit $V_m = \dfrac{RT}{P}$ par identification avec l'équation d'état des gaz parfait ($PV = nRT$). Le volume molaire est indépendant de la nature chimique du gaz : il ne dépend que des conditions de température et de pression.

.....

23.2 a) Pour un gaz parfait, on a $V_m = \dfrac{RT}{P}$. Ici, $P = 1{,}00 \times 10^5\,\text{Pa}$ et $T = 150\,\text{K}$. L'application numérique donne : $V_m = \dfrac{8{,}31\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \times 150\,\text{K}}{1{,}00 \times 10^5\,\text{Pa}} = 12{,}5\,\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}$ en considérant le bon nombre de chiffres significatifs.

.....

23.2 b) Pour un gaz parfait, on a $V_m = \dfrac{RT}{P}$. Ici, $P = 1{,}00 \times 10^5\,\text{Pa}$ et $T = 300\,\text{K}$. Par rapport au cas a), la pression est inchangée et la température est doublée : le volume molaire est donc doublé. On peut le vérifier par l'application numérique : $V_m = \dfrac{8{,}31\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \times 300\,\text{K}}{1{,}00 \times 10^5\,\text{Pa}} = 24{,}9\,\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}$ en considérant le bon nombre de chiffres significatifs.

.....

23.2 c) Pour un gaz parfait, on a $V_m = \dfrac{RT}{P}$. Ici, $P = 5{,}000 \times 10^3\,\text{Pa}$ et $T = 298\,\text{K}$. L'application numérique donne : $V_m = \dfrac{8{,}31\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \times 298\,\text{K}}{5{,}000 \times 10^3\,\text{Pa}} = 495\,\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}$ en considérant le bon nombre de chiffres significatifs.

.....

23.2 d) Pour un gaz parfait, on a $V_m = \dfrac{RT}{P}$. Ici, $P = 5{,}00\,10^4\text{Pa}$ et $T = 150\,\text{K}$. Par rapport au cas a), la pression est divisée par deux et la température est inchangée : le volume molaire est donc doublé, comme dans le cas b). On peut le vérifier par l'application numérique : $V_m = \dfrac{8{,}31\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \times 150\,\text{K}}{5{,}00 \times 10^4\,\text{Pa}} = 24{,}9\,\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}$ en considérant le bon nombre de chiffres significatifs.

.....

23.3 On note V_m le volume molaire du gaz sous ces conditions. La masse de gaz est

$$m = n \times M = \frac{V}{V_m} M$$

en exprimant n *via* la définition du volume molaire, à savoir $V_m = \dfrac{V}{n}$. Ainsi, la masse est proportionnelle au produit MV, la valeur V_m ne dépendant pas de la nature chimique du gaz.

En convertissant les volumes en litres (par exemple), les applications numériques donnent une masse de $20/V_m$ pour l'hélium, $24/V_m$ pour le dioxygène (avec $M(\text{O}_2) = 2M(\text{O})$), $28/V_m$ pour le diazote (avec $M(\text{N}_2) = 2M(\text{N})$) et $20/V_m$ pour le dihydrogène (avec $M(\text{H}_2) = 2M(\text{H})$) : la réponse (c) est la bonne.

.....

23.4 a) Cette loi stipule qu'à pression et quantité de matière fixées, le rapport volume/température est constant, c'est-à-dire que le volume est une fonction linéaire de température. La représentation graphique $V = f(T)$ est donc une droite : c'est la réponse (b).

.....

23.4 b) Cette loi stipule qu'à pression et température fixées, le rapport volume/quantité de matière (appelé volume molaire) est constant, c'est-à-dire que le volume est une fonction linéaire de la quantité de matière. La représentation graphique $V = f(n)$ est donc une droite : c'est la réponse (c).

.....

23.4 c) Cette loi stipule qu'à volume et quantité de matière fixés, le rapport pression/température est constant, c'est-à-dire que la pression est une fonction linéaire de température. La représentation graphique $P = f(T)$ est donc une droite : c'est la réponse (d).

.....

23.4 d) Cette loi stipule qu'à température et quantité de matière fixées, le produit pression-volume est constant, c'est-à-dire que la pression est une fonction inverse du volume. La représentation graphique $P = f(V)$ est donc une branche d'hyperbole : c'est la réponse (a).

.....

23.5 L'équation d'état d'un gaz parfait est $PV = nRT$.

Ainsi, si l'on fait subir une transformation isotherme (T est une constante) à une quantité de matière donnée (n est une constante) d'un gaz parfait, alors le produit PV est identique à chaque instant de la transformation. Dans notre cas, en notant P_1 la pression du gaz dans la bouteille, V_1 le volume du gaz contenu dans la bouteille, P_2 la pression du gaz respiré (égale à la pression atmosphérique, soit 1 bar) et V_2 le volume de gaz que le plongeur peut respirer, on a $P_1V_1 = P_2V_2$ ou encore $V_2 = \dfrac{P_1}{P_2}V_1$.

L'application numérique donne

$$V_2 = \frac{200\,\text{bar}}{1\,\text{bar}} \times 12\,\text{L} = 2\,400\,\text{L}.$$

Une bouteille de 12 L remplie d'air comprimé à 200 bar contient donc l'équivalent de 2 400 L d'air à la pression atmosphérique.

.....

23.6 a) Par définition, on a $\rho = \dfrac{m}{V}$.

Sachant que $m = 0{,}70\,\text{mg}$ et $V = 0{,}009\,0\,\text{L}$, l'application numérique donne $\rho = 0{,}078\,\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$.

.....

23.6 b) Pour un gaz parfait, on a $V_m = \dfrac{RT}{P}$. Ici, on a $P = 1{,}00 \times 10^5\,\text{Pa}$ et $T = 298\,\text{K}$. Finalement, on trouve $V_m = 0{,}024\,8\,\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} = 24{,}8\,\text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$.

.....

23.6 c) On sait que $\rho = \dfrac{m}{V}$, $V_m = \dfrac{V}{n}$ et $M = m/n$. On en déduit $M = \rho \times V_m = 24{,}8 \times 0{,}078 \sim 2\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

.....

23.6 d) On a trouvé $M \sim 2\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Sachant qu'on a $M(\text{H}) = 1\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et que le corps simple formé par l'hydrogène est le dihydrogène H_2, on déduit que $M(\text{H}_2) \sim 2\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$. On en conclut que le gaz formé est de H_2.

.....

23.7 a) En identifiant $V_m = \dfrac{V}{n}$ dans l'équation d'état d'un gaz parfait, on obtient $PV_m = RT$.

.....

23.7 b) En identifiant $V_m = \dfrac{V}{n}$ dans l'équation d'état de van der Waals et en développant le produit, on obtient $PV_m = RT + bP - \dfrac{a}{V_m} + \dfrac{ab}{V_m^2}$.

.....

23.7 c) En identifiant les deux expressions obtenues précédemment, on constate qu'elles sont identiques si, et seulement si, $a = b = 0$.

.....

23.8 Intuitivement, il semble que la pression totale doit être supérieure à chacune des pressions des bouteilles individuelles. En modélisant tous les gaz comme des gaz parfaits, la pression correspond exactement la somme des pressions des différentes bouteilles. En effet pour chaque bouteille $n_i = \dfrac{P_i V_i}{RT}$, avec $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V$ (toutes les bouteilles sont de même volume). Après mélange, la bouteille finale contient une quantité de matière $n = \sum_i n_i$, donc la pression totale s'exprime $P_{\text{tot}} = \sum_i P_i$ (loi de Dalton). On remarque que la pression des gaz dans chaque bouteille correspond à la pression partielle dans le mélange obtenu.

.....

23.9 a) Les gaz étant parfaits, chaque contenant initial vérifie l'équation d'état des gaz parfaits, c'est-à-dire que le contenant k contient une quantité de matière $n_k = \dfrac{P_k V_k}{RT}$. Une fois l'ensemble des contenants transvasé dans le flacon, ce dernier contient une quantité de matière $n = \sum_k n_k$. Le mélange obtenu se comportant a priori lui aussi comme un gaz parfait, on a $P = \dfrac{nRT_0}{V_0} = \dfrac{RT_0 \sum_k n_k}{V_0}$. En injectant l'expression de n_k il vient $P = \dfrac{1}{V_0} \sum_{k=0}^{N} P_k V_k$.

.....

23.9 b) En partant de l'expression $P = \dfrac{1}{V_0} \sum_{k=0}^{N} P_k V_k$ obtenue précédemment, on obtient $P = \dfrac{P_0}{N} \sum_{k=0}^{N} 1 = P_0$.

.....

23.9 c) En partant de l'expression $P = \dfrac{1}{V_0} \sum_{k=0}^{N} P_k V_k$ obtenue précédemment, on obtient $P = P_0 \dfrac{V_0}{V_0} \sum_{k=0}^{N} k$.

On reconnaît la somme des entiers naturels de 1 à N. Ainsi, on a $P = \dfrac{N(N+1)}{2} P_0$.

.....

23.9 d) En partant de $P = \dfrac{1}{V_0} \sum_{k=0}^{N} P_k V_k$ (obtenu précédemment), on obtient $P = \dfrac{n_0 RT_0}{V_0} \sum_{k=0}^{N} 1 = \dfrac{N n_0 RT_0}{V_0}$.

.....

23.10 a) On a $n_{\text{tot}} = 119\,\text{mmol} + 24\,\text{mmol} = 151\,\text{mmol}$.

.....

23.10 b) On a $x_{\text{ins}}(\text{N}_2) = \dfrac{n_{\text{ins}}(\text{N}_2)}{n_{\text{tot}}} = \dfrac{119\,\text{mmol}}{151\,\text{mmol}} = 0{,}788$. Sachant que la même quantité de matière totale est inspirée et expirée et que la quantité de diazote est inchangée, on retrouve naturellement la fraction molaire du mélange expiré.

.....

23.10 c) On a $x_{\text{ins}}(\text{O}_2) = \dfrac{n_{\text{ins}}(\text{N}_2)}{n_{\text{tot}}} = \dfrac{32\,\text{mmol}}{151\,\text{mmol}} = 0{,}21$. On peut aussi considérer la quantité totale : on trouve $x(\text{O}_2) = 1 - 0{,}788 = 0{,}212$.

.....

23.10 d) On a $P_{\text{ins}}(\text{O}_2) = x_{\text{ins}}(\text{O}_2) \times p_{\text{tot}} = 0{,}212 \times 1\,013\,\text{mbar} = 213\,\text{mbar}$. On peut aussi considérer la pression totale : on a $P_{\text{O}_2} = 1\,013\,\text{mbar} - 800\,\text{mbar} = 213\,\text{mbar}$.

.....

23.10 e) On a $n_{\text{exp}}(\text{CO}_2) = n_{\text{tot}} - n_{\text{exp}}(\text{N}_2) - n_{\text{exp}}(\text{O}_2) = 151\,\text{mmol} - 119\,\text{mmol} - 24\,\text{mmol} = 8\,\text{mmol}$.

.....

23.10 f) On a $x_{\text{exp}}(\text{CO}_2) = x_{\text{tot}} - x_{\text{exp}}(\text{N}_2) - x_{\text{exp}}(\text{O}_2) = 1 - 0{,}788 - 0{,}050 = 0{,}162$.

.....

23.10 g) On a $P_{\text{exp}}(\text{O}_2) = x_{\text{exp}}(\text{O}_2) \times p_{\text{tot}} = 0{,}162 \times 1\,013\,\text{mbar} = 164\,\text{mbar}$.

.....

23.10 h) On a $P_{\text{exp}}(CO_2) = x_{\text{exp}}(CO_2) \times p_{\text{tot}} = 0{,}050 \times 1\,013\,\text{mbar} = 51\,\text{mbar}$. On peut aussi considérer la pression totale : on a $P_{CO_2} = 1\,013\,\text{mbar} - 800\,\text{mbar} - 162\,\text{mbar} = 51\,\text{mbar}$.

.....

23.11 a) Si les pressions partielles sont égales, alors les quantités de matières sont égales d'après la loi de Dalton : la proposition est fausse.

.....

23.11 b) Si les fractions molaires sont égales alors les quantités de matières sont égales par définition de la fraction molaire : la proposition est fausse.

.....

23.11 c) Les gaz étant différents, ils n'ont pas la même masse molaire, donc si leurs quantités de matière sont égales leurs masses ne peuvent pas l'être : la proposition est vraie.

.....

23.11 d) Si les volumes sont identiques alors les quantités de matière sont identiques par définition du volume molaire : la proposition est fausse.

.....

23.12 a) On a $P_{N_2} = 0{,}04 \times 90\,\text{bar} = 4\,\text{bar}$, en considérant le bon nombre de chiffres significatifs.

.....

23.12 b) On a $P_{N_2} = 0{,}78 \times 1{,}000\,\text{bar} = 0{,}78\,\text{bar}$, en considérant le bon nombre de chiffres significatifs.

.....

23.12 c) On a $P_{N_2} = 0{,}03 \times 600 \times 1 \times 10^{-5}\,\text{bar} = 2 \times 10^{-4}\,\text{bar}$, avec le bon nombre de chiffres significatifs.

.....

23.12 d) On a $P_{CO_2} = 0{,}96 \times \dfrac{9 \times 10^6\,\text{Pa}}{1\,013 \times 10^2\,\text{Pa} \cdot \text{bar}^{-1}} = 9 \times 10^1\,\text{bar}$, avec le bon nombre de chiffres significatifs.

.....

23.12 e) On a $P_{CO_2} = 0{,}95 \times 600 \times 10^{-5}\,\text{bar} = 6 \times 10^{-3}\,\text{bar}$, avec le bon nombre de chiffres significatifs.

.....

23.12 f) On a $P_{O_2} = 0{,}21 \times 1{,}000\,\text{bar} = 0{,}21\,\text{bar}$.

.....

23.13 a) On a $n_{\text{tot}}(t) = n_{N_2}(t) + n_{H_2}(t) + n_{NH_3}(t) = (n - \xi(t)) + (3n - 3\xi(t)) + 2\xi(t) = 4n - 2\xi(t)$.

La quantité de matière totale dépend de l'avancement. La réaction ayant lieu dans un volume constant et la température étant constante ; alors la pression dépendra elle aussi de l'avancement si l'on considère des gaz parfaits.

.....

23.13 b) On sait que $P_{\text{tot}}(t) = n_{\text{tot, gazeux}}(t)\dfrac{RT}{V}$ avec V le volume et T la température du système (constantes).

Pour l'état initial, on a $P_i = 4n\dfrac{RT}{V}$. Pour un état intermédiaire quelconque, étant donné la réponse à la question précédente, on a $P_{\text{tot}}(t) = (4n - 2\xi) \times \dfrac{RT}{V} = \dfrac{4n - 2\xi}{4n} P_i = \dfrac{2n - \xi}{2n} P_i$.

.....

23.13 c) On a $P_{NH_3} = x_{NH_3} P_{\text{tot}}(t) = \dfrac{n_{NH_3}(t)}{n_{\text{tot}}} P_{\text{tot}}(t) = \dfrac{2\xi}{4n - 2\xi} P_{\text{tot}}(t) = \dfrac{2\xi}{4n - 2\xi} \dfrac{2n - \xi}{2n} P_i = \dfrac{\xi}{2n} P_i$.

.....

23.13 d) On a $P_{N_2} = x_{N_2} P_{\text{tot}}(t) = \dfrac{n_{N_2}(t)}{n_{\text{tot}}} P_{\text{tot}}(t) = \dfrac{n - \xi}{4n - 2\xi} \dfrac{2n - \xi}{2n} P_i = \dfrac{n - \xi}{4n} P_i$.

.....

23.13 e) On a $P_{H_2} = x_{H_2} P_{tot} = \dfrac{n_{H_2}(t)}{n_{tot}} P_{tot}(t) = \dfrac{3n - 3\xi}{4n - 2\xi} P_{tot}(t) = \dfrac{3n - 3\xi}{4n - 2\xi} \dfrac{2n - \xi}{2n} P_i = \dfrac{3(n - \xi)}{4n} P_i$.

Les résultats obtenus sont cohérents car on remarque que la loi de Dalton est vérifiée : $P_{tot} = P_{H_2} + P_{N_2} + P_{NH_3}$.

.....

23.14 L'activité a d'un gaz s'exprime $a = \dfrac{P_i}{P^\circ}$ où P_i est la pression partielle du gaz i dans le mélange et P° la pression de référence (1 bar). Pour un gaz parfait, cette pression partielle s'exprime $P_i = \dfrac{n_i RT}{V}$ avec n_i la quantité de matière du gaz i dans le mélange, T la température du mélange et V le volume total du mélange. Si l'on ajoute 20 moles de dioxygène alors n_i triple : la pression P_i et donc l'activité sont triplées (la réponse (a) est exclue). Si l'on agrandit l'enceinte à $4\,m^3$ alors V est doublée : l'activité est divisée de moitié (la réponse b est exclue). Si l'on double la température l'activité double, à condition de considérer la température absolue qui s'exprime en kelvin. Ici la température est de 25 °C, soit 298 K, dont le double vaut 596 K, soit 323 °C (la réponse (d) est exclue, la réponse (c) est correcte).

.....

23.15 a) On a $Q_1 = \dfrac{n_1^2 n_2^3}{n_3^3 n_4^2}$. La grandeur P° n'apparaît pas, elle est à la puissance 0. On constate que le résultat simplifié est bien sans dimension, conformément à la définition d'un quotient de réaction.

.....

23.15 b) On a $Q_2 = \dfrac{n_1^4 n_2^2}{n_3 n_4^3 n_{tot}^2} \dfrac{P^2}{(P^\circ)^2}$. La grandeur P° est à la puissance -2. On constate que le résultat simplifié est bien sans dimension, conformément à la définition d'un quotient de réaction.

.....

23.15 c) On a $Q_3 = \dfrac{n_1^5 n_{tot}^2}{n_2^3 n_3^4} \dfrac{c_1^2}{(C^\circ)^2} \dfrac{(P^\circ)^2}{P^2}$. La grandeur P° est à la puissance $+2$. On constate que le résultat simplifié est bien sans dimension, conformément à la définition d'un quotient de réaction.

.....

23.15 d) On a $Q_4 = \dfrac{n_1^3}{n_2^2 n_{tot}} \dfrac{c_1^2 C^\circ}{c_2^3} \dfrac{P}{P^\circ}$. La grandeur P° est à la puissance -1. On constate que le résultat simplifié est bien sans dimension, conformément à la définition d'un quotient de réaction.

.....

23.16 a) L'activité d'un gaz parfait dans un mélange vaut le rapport de sa pression partielle sur la pression de référence, le tout à la puissance de son coefficient stoechiométrique : on trouve $Q = \dfrac{P_{NH_3}^2}{P_{N_2} P_{H_2}^3} \dfrac{(P^\circ)^4}{(P^\circ)^2} = \dfrac{P_{NH_3}^2}{P_{N_2} P_{H_2}^3} (P^\circ)^2$.

.....

23.16 b) L'activité d'un corps pur en phase condensée vaut 1, donc $a_{H_2O(l)} = 1$: ainsi, $Q = \dfrac{1(P^\circ)^4 P^\circ}{P_H^4 P_{O_2}} = \dfrac{(P^\circ)^5}{P_{H_2}^4 P_{O_2}}$.

.....

23.16 c) L'activité d'un solvant vaut 1, donc $a_{H_2O(l)} = 1$; l'activité d'un soluté en solution vaut le rapport de sa concentration dans la solution sur la concentration de référence à la puissance son coefficient stoechiométrique : on trouve $Q = \dfrac{1 \times [CO_2] P^\circ (P^\circ)^2}{C^\circ P_{CH_4} P_{O_2}^2} = \dfrac{[CO_2](P^\circ)^3}{P_{CH_4} P_{O_2}^2 C^\circ}$.

.....

23.16 d) L'activité d'un solvant vaut 1, donc $a_{H_2O(l)} = 1$: on trouve $Q = \dfrac{[H_2CO_3] P^\circ}{1 \times C^\circ P_{CO_2}}$.

.....

23.17 On est à l'équilibre donc le quotient de réaction vaut la constante d'équilibre.

On a $K = Q = \dfrac{a(CO_{2(aq)})}{a(CO_{2(g)})} = \dfrac{[CO_{2(aq)}]/C^\circ}{P(CO_{2(g)})/P^\circ} = \dfrac{[CO_{2(aq)}]}{P(CO_{2(g)})} \dfrac{P^\circ}{C^\circ} = \dfrac{7{,}0\,g \cdot L^{-1}}{44\,g \cdot mol^{-1} \times 3{,}0\,bar} \times \dfrac{1{,}00\,bar}{1{,}00\,mol \cdot L^{-1}} = 0{,}050.$

.....

Fiche n° 24. Réactions chimiques

Réponses

24.1 a) $\boxed{2\,CO + O_2 = 2\,CO_2}$

24.1 b) $\boxed{2\ Ag^+ + Cu = 2\ Ag + Cu^{2+}}$

24.1 c) $\boxed{2\ NO + 2\ CO = N_2 + 2\ CO_2}$

24.1 d) $\boxed{S_2O_8^{2-} + 2\,I^- = 2\,SO_4^{2-} + I_2}$

24.1 e) $\boxed{2\,C_8H_{18} + 25\,O_2 = 16\,CO_2 + 18\,H_2O}$

24.1 f) $\boxed{MnO_4^- + 8\,H^+ + 5\,Fe^{2+} = 5\,Fe^{3+} + Mn^{2+} + 4\,H_2O}$

24.2 $\boxed{n_1 - \xi}$

24.2 $\boxed{n_2 - 3\xi}$

24.2 $\boxed{2\xi}$

24.3 $\boxed{\text{d}}$

24.4 $\boxed{\text{e}}$

24.5 a) $\boxed{\dfrac{a(NH_3)_{eq} \times a(H_2O)_{eq}}{a(NH_4^+)_{eq} \times a(HO^-)_{eq}}}$

24.5 b) $\boxed{\dfrac{a(NH_3)_{eq} \times a(H_3O^+)_{eq}}{a(NH_4^+)_{eq} \times a(H_2O)_{eq}}}$

24.5 c) $\boxed{\dfrac{a(HO^-)_{eq} \times a(H_3O^+)_{eq}}{a(H_2O)_{eq}^2}}$

24.5 d) $\boxed{K^\circ = \dfrac{K_A}{K_e}}$

24.5 e) $\boxed{10^{4,75}}$

24.6 a) $\boxed{\text{a}}$

24.6 b) $\boxed{\text{a}}$

24.6 c) $\boxed{\text{b}}$

24.6 d) $\boxed{\text{c}}$

24.7 $\boxed{\text{b}}$

24.8 a) $\boxed{5{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}}$

24.8 b) ..... $\boxed{4{,}0 \times 10^{-1}\,\text{mol}}$

24.9 a) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

24.9 b) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

24.10 a) ..... $\boxed{\dfrac{(C^\circ(V_1+V_2))^2}{(C_1V_1-\xi)\times(C_2V_2-\xi)}}$

24.10 b) ..... $\boxed{\xi^2-\xi(C_1V_1+C_2V_2)+C_1C_2V_1V_2-\dfrac{[C^\circ(V_1+V_2)]^2}{K^\circ}=0}$

24.11 a) ..... $\boxed{\xi_v^2(1-K^\circ)+\xi_vK^\circ(C_1+C_2)-K^\circ C_1C_2=0}$

24.11 b) ..... $\boxed{\xi_v^2+\xi_v(C_2+K^\circ C^\circ)-K^\circ C_1C^\circ=0}$

24.11 c) ..... $\boxed{\xi^2(K^\circ-1)-\xi K^\circ(n_1+n_2)+K^\circ n_1n_2=0}$

24.11 d) ..... $\boxed{4K^\circ\xi^2-\xi\left(4K^\circ n+\dfrac{P^\circ V}{RT}\right)+K^\circ n^2=0}$

24.11 e) ..... $\boxed{\xi^2(4K^\circ P+P^\circ)-\xi(4nK^\circ P+nP^\circ)+K^\circ n^2P=0}$

24.12 a) ..... $\boxed{7{,}6\times10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}$

24.12 b) ..... $\boxed{3{,}6\times10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}$

24.13 a) ..... $\boxed{1{,}3}$

24.13 b) ..... $\boxed{12}$

24.14 a) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

24.14 b) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

24.14 c) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

24.14 d) ..... $\boxed{\text{(b)}}$

24.15 a) ..... $\boxed{\text{pH}=\text{p}K_A+\log_{10}\left(\dfrac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}\right)}$

24.15 b) ..... $\boxed{8{,}9}$

24.16 a) ..... $\boxed{\xi_v^2+K_AC^\circ\,\xi_v-K_AC_1C^\circ=0}$

24.16 b) ..... $\boxed{8{,}8\times10^{-4}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}$

24.16 c) ..... $\boxed{3{,}9}$

Corrigés

24.1 a) On commence d'abord par équilibrer les atomes de carbone (un de chaque côté). On a deux atomes d'oxygène à droite, on doit donc en placer deux à gauche. Ce qui donne : $\mathrm{CO} + \frac{1}{2}\,\mathrm{O_2} = \mathrm{CO_2}$.

On préfère raisonner avec des coefficients stœchiométriques entiers, il suffit alors de multiplier les coefficients par deux : $2\,\mathrm{CO} + \mathrm{O_2} = 2\,\mathrm{CO_2}$.

.....

24.1 b) Initialement, les charges ne sont pas équilibrées. Il faut mettre 2 $\mathrm{Ag^+}$ pour ajuster les charges. Enfin, on équilibre l'élément Ag en mettant un coefficient 2 au produit Ag. On obtient $2\ \mathrm{Ag^+} + \mathrm{Cu} = 2\ \mathrm{Ag} + \mathrm{Cu^{2+}}$.

.....

24.1 c) On commence par équilibrer l'élément azote : $2\ \mathrm{NO} + \mathrm{CO} = \mathrm{N_2} + \mathrm{CO_2}$. Les carbones sont équilibrés mais pas les atomes d'oxygène. On doit donc trouver x tel que :

$$2\,\mathrm{NO} + x\,\mathrm{CO} = \mathrm{N_2} + x\,\mathrm{CO_2}.$$

En raisonnant sur l'atome d'oxygène on trouve $2 + x = 2x$ soit $x = 2$.

.....

24.1 d) Commençons par équilibrer les atomes d'iode puis le soufre et enfin l'oxygène. On arrive à :

$$\mathrm{S_2O_8^{2-}} + 2\,\mathrm{I^-} = 2\,\mathrm{SO_4^{2-}} + \mathrm{I_2}.$$

On s'aperçoit que les charges sont *de facto* ajustées. La réaction est équilibrée !

.....

24.1 e) Commençons par ajuster les atomes d'hydrogène : $\mathrm{C_8H_{18}} + \mathrm{O_2} = \mathrm{CO_2} + 9\,\mathrm{H_2O}$. Poursuivons avec les atomes de carbone : $\mathrm{C_8H_{18}} + \mathrm{O_2} = 8\mathrm{CO_2} + 9\,\mathrm{H_2O}$. Puis avec les atomes d'oxygène : $\mathrm{C_8H_{18}} + \frac{25}{2}\mathrm{O_2} = 8\mathrm{CO_2} + 9\,\mathrm{H_2O}$.

Terminons en multipliant tous les coefficients par deux : $2\,\mathrm{C_8H_{18}} + 25\,\mathrm{O_2} = 16\,\mathrm{CO_2} + 18\,\mathrm{H_2O}$.

.....

24.1 f) Commençons par équilibrer les atomes d'oxygène : $\mathrm{MnO_4^-} + \mathrm{H^+} + \mathrm{Fe^{2+}} = \mathrm{Fe^{3+}} + \mathrm{Mn^{2+}} + 4\,\mathrm{H_2O}$.

Puis les atomes d'hydrogène : $\mathrm{MnO_4^-} + 8\,\mathrm{H^+} + \mathrm{Fe^{2+}} = \mathrm{Fe^{3+}} + \mathrm{Mn^{2+}} + 4\,\mathrm{H_2O}$.

Les éléments sont équilibrés. Comptons les charges : +9 à gauche et +5 à droite. Les charges ne sont donc pas ajustées. Or, on n'a pas encore considéré le fer. Appelons x son coefficient :

$$\mathrm{MnO_4^-} + 8\,\mathrm{H^+} + x\,\mathrm{Fe^{2+}} = x\,\mathrm{Fe^{3+}} + \mathrm{Mn^{2+}} + 4\,\mathrm{H_2O}.$$

L'équilibre des charges donne $7 + 2x = 2 + 3x$, d'où $x = 5$.

.....

24.2 Par définition l'avancement est lié aux quantités de matière des produits ou réactifs *via* $\xi = \dfrac{n_i(t) - n_i(0)}{\nu_i}$ où ν_i est le coefficient stœchiométrique algébrique du produit ou réactif. On obtient donc :

	$\mathrm{N_{2(g)}}$ +	$3\mathrm{H_{2(g)}}$ =	$2\mathrm{NH_{3(g)}}$
État initial	n_1	n_2	0
État final	$n_1 - \xi$	$n_2 - 3\xi$	2ξ

.....

24.3 La constante thermodynamique d'équilibre est une grandeur adimensionnée, ce qui exclut les propositions (a) et (b). Ensuite, par définition, l'activité des produits de la réaction doit se trouver au numérateur et celle des réactifs au dénominateur. On garde donc l'expression (d).

.....

24.4 La constante thermodynamique d'équilibre est une grandeur adimensionnée, ce qui exclut les propositions (b), (d) et (f). Ensuite, par définition, l'activité d'un solide seul dans sa phase vaut 1, ce qui exclut les propositions (a) et (c). On garde donc l'expression (e).

.....

24.5 a) D'après la loi d'action de masse, on a $K^\circ = Q_{\text{eq}} = \dfrac{a(\text{NH}_3)_{\text{eq}} \times a(\text{H}_2\text{O})_{\text{eq}}}{a(\text{NH}_4^+)_{\text{eq}} \times a(\text{HO}^-)_{\text{eq}}}$.

.....

24.5 b) La constante d'acidité est la constante d'équilibre associée à la réaction entre l'acide du couple et l'eau :

$$\text{NH}_4^+ + \text{H}_2\text{O} = \text{NH}_3 + \text{H}_3\text{O}^+.$$

D'après la loi d'action de masse, on a donc : $K_A = \dfrac{a(\text{NH}_3)_{\text{eq}} \times a(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{eq}}}{a(\text{NH}_4^+)_{\text{eq}} \times a(\text{H}_2\text{O})_{\text{eq}}}$.

.....

24.5 c) La constante d'autoprotolyse de l'eau est la constante d'équilibre associée à la réaction :

$$2\ \text{H}_2\text{O} = \text{H}_3\text{O}^+ + \text{HO}^-.$$

D'après la loi d'action de masse, on a donc $K_e = \dfrac{a(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{eq}} \times a(\text{HO}^-)_{\text{eq}}}{a(\text{H}_2\text{O})_{\text{eq}}^2}$.

.....

24.5 d) On a, d'après les questions précédentes :

$$K_A = \frac{a(\text{NH}_3)_{\text{eq}} \times a(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{eq}}}{a(\text{NH}_4^+)_{\text{eq}} \times a(\text{H}_2\text{O})_{\text{eq}}} \qquad \text{et} \qquad K_e = \frac{a(\text{HO}^-)_{\text{eq}} \times a(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{eq}}}{a(\text{H}_2\text{O})_{\text{eq}}^2}.$$

Donc $\dfrac{K_A}{K_e} = \dfrac{a(\text{NH}_3)_{\text{eq}} \times a(\text{H}_2\text{O})_{\text{eq}}}{a(\text{NH}_4^+)_{\text{eq}} \times a(\text{HO}^-)_{\text{eq}}}$. On en déduit donc que $K^\circ = \dfrac{K_A}{K_e}$.

.....

24.5 e) On a $K^\circ = \dfrac{K_A}{K_e} = \dfrac{10^{-9,25}}{10^{-14}} = 10^{4,75}$.

.....

24.6 a) À l'état initial, $Q_i = \dfrac{[\text{HF}]_i \times \left[\text{CH}_3\text{COO}^-\right]_i}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_i \times \left[\text{F}^-\right]_i} = 0 < K^\circ$. La réaction évolue donc dans le sens direct.

.....

24.6 b) À l'état initial, $Q_i = \dfrac{[\text{HF}]_i \times \left[\text{CH}_3\text{COO}^-\right]_i}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_i \times \left[\text{F}^-\right]_i} = 0 < K^\circ$. La réaction évolue donc dans le sens direct.

.....

24.6 c) À l'état initial, $Q_i = \dfrac{[\text{HF}]_i \times \left[\text{CH}_3\text{COO}^-\right]_i}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_i \times \left[\text{F}^-\right]_i} = 1 > K^\circ$. La réaction évolue donc dans le sens indirect.

.....

24.6 d) À l'état initial, $Q_i = \dfrac{[\text{HF}]_i \times \left[\text{CH}_3\text{COO}^-\right]_i}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_i \times \left[\text{F}^-\right]_i} = 2{,}5 \times 10^{-2} = 10^{-1,6} = K^\circ$. Ainsi, le système est à l'équilibre et n'évolue pas.

.....

24.7 On calcule, pour chaque réactif, le rapport entre sa quantité de matière initiale et son nombre stœchiométrique. Le réactif pour lequel ce rapport est le plus faible est le réactif limitant.

On trouve $\dfrac{n(\text{Fe}^{3+})_i}{1} = 3{,}0 \times 10^{-2}$ mol et $\dfrac{n(\text{OH}^-)_i}{3} = 2{,}0 \times 10^{-2}$ mol.

L'ion hydroxyde HO^- est donc le réactif limitant.

Remarque : on ne prend pas en compte les ions Na^+ *ou* Cl^- *car ce sont des ions spectateurs et non des réactifs.*

.....

24.8 a) On a $\frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{13} = 5{,}0 \times 10^{-2}$mol : les réactifs ont donc été introduits en proportions stœchiométriques. Dans ce cas, il n'y a pas de réactif limitant (ou alors tous les réactifs sont limitants).

L'avancement maximal est alors $\xi_{\max} = 5{,}0 \times 10^{-2}$mol.

.....

24.8 b) On écrit un tableau d'avancement pour la réaction totale :

	$2\,C_4H_{10\,(g)}$	+ $13\,O_{2\,(g)}$	⟶ $8\,CO_{2\,(g)}$	+ $10\,H_2O_{(g)}$
État initial	n_1	n_2	0	0
État final	$n_1 - 2\xi_{\max}$	$n_2 - 13\xi_{\max}$	$8\xi_{\max}$	$10\xi_{\max}$

Comme la réaction est totale, l'avancement atteint à l'état final correspond à l'avancement maximal $\xi_{\max}$ calculé à la question précédente. On a donc $n(CO_2)_f = 8\xi_{\max} = 4{,}0 \times 10^{-1}$mol.

.....

24.9 a) On calcule dans un premier temps les quantités de matière initiales de tous les réactifs :

$$n(Ag^+)_i = n_1 = C \times V = 0{,}25\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \times 20 \times 10^{-3}\,\text{L} = 5{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}$$
$$n(Cu)_i = n_2 = \frac{m}{M_{Cu}} = \frac{0{,}254\,\text{g}}{63{,}5\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}} = 4{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}.$$

On calcule ensuite les rapports entre les quantités de matière initiales et les nombres stœchiométriques :

$$\frac{n(Ag^+)_i}{2} = 2{,}5 \times 10^{-3}\,\text{mol} < \frac{n(Cu)_i}{1} = 4{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}$$

Le réactif limitant est donc Ag^+.

.....

24.9 b) On dresse un tableau d'avancement pour cette réaction :

	$2\,Ag^+_{(aq)}$	+ $Cu_{(s)}$	= $Cu^{2+}_{(aq)}$	+ $2\,Ag_{(s)}$
État initial	n_1	n_2	0	0
État final	$n_1 - 2\xi_{\max}$	$n_2 - \xi_{\max}$	$\xi_{\max}$	$2\xi_{\max}$

La réaction est totale, donc l'avancement final est égal à l'avancement maximal.
Le réactif limitant est l'ion argent (Ag^+), donc l'avancement final est $\xi_{\max} = \frac{n_1}{2} = 2{,}5\,\text{mmol}$.
À l'état final, on a donc $n(Cu)_f = 4{,}0\,\text{mmol} - 2{,}5\,\text{mmol} = 1{,}5\,\text{mmol}$.

.....

24.10 a) D'après la loi d'action de masse, $K^\circ = \frac{a(\text{PhCOOH})_{\text{eq}} \times a(H_2O)_{\text{eq}}}{a(\text{PhCOO}^-)_{\text{eq}} \times a(H_3O^+)_{\text{eq}}}$. Comme PhCOOH est un solide seul dans sa phase, son activité vaut 1. Comme H_2O est le solvant, son activité vaut 1. L'activité des espèces aqueuses s'exprime en fonction de leur concentration et de C°.

Avec les expressions du tableau d'avancement, on a alors :

$$K^\circ = \frac{1 \times 1}{\left(\frac{1}{C^\circ}\frac{C_1V_1 - \xi}{V_1+V_2}\right) \times \left(\frac{1}{C^\circ}\frac{C_2V_2 - \xi}{V_1+V_2}\right)} = \frac{(C^\circ(V_1+V_2))^2}{(C_1V_1 - \xi) \times (C_2V_2 - \xi)}.$$

.....

24.10 b) À partir de la relation précédente on déduit $(C_1V_1 - \xi) \times (C_2V_2 - \xi) = \frac{(C^\circ(V_1+V_2))^2}{K^\circ}$.

Après développement on obtient

$$\xi^2 - \xi(C_1V_1 + C_2V_2) + C_1C_2V_1V_2 - \frac{(C^\circ(V_1+V_2))^2}{K^\circ} = 0.$$

Au passage, la formule obtenue est bien homogène : chaque terme est homogène à une quantité de matière au carré.

.....

24.12 a) La résolution du polynôme du second degré donne deux solutions :

$$\xi_{v,1} = 7{,}6 \times 10^{-2}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad \text{et} \quad \xi_{v,2} = 5{,}2 \times 10^{-1}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

L'avancement final ne peut pas être supérieur à l'avancement maximal $\xi_{\text{v,max}} = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On en déduit donc que $\xi_v = 7{,}6 \times 10^{-2}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

.....

24.12 b) La résolution du polynôme du second degré donne deux solutions :

$$\xi_{v,1} = 3{,}6 \times 10^{-2}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad \text{et} \quad \xi_{v,2} = -5{,}6 \times 10^{-2}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Il est indiqué que la réaction se déroule dans le sens direct, donc l'avancement doit être positif. La solution $\xi_{v,2}$ est par conséquent impossible. On a donc $\xi_v = 3{,}6 \times 10^{-2}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$, qui est bien inférieur à l'avancement maximal.

.....

24.13 a) Par définition, $\text{pH} = -\log_{10}\big(a(\text{H}_3\text{O}^+)\big)$.

En solution aqueuse diluée, l'activité de H_3O^+ est $a(\text{H}_3\text{O}^+) = \dfrac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^\circ}$. L'expression précédente devient donc :

$$\text{pH} = -\log_{10}\left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^\circ}\right) = -\log_{10}\left(\frac{5{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}{1{,}0\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}\right) = 1{,}3.$$

.....

24.13 b) Les concentrations $[\text{HO}^-]$ et $[\text{H}_3\text{O}^+]$ sont liées *via* la constante d'autoprotolyse de l'eau :

$$K_e = \frac{[\text{HO}^-] \times [\text{H}_3\text{O}^+]}{(C^\circ)^2} \qquad \text{donc} \qquad \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^\circ} = \frac{K_e\, C^\circ}{[\text{HO}^-]}.$$

On a donc

$$\text{pH} = -\log_{10}\left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^\circ}\right) = -\log_{10}\left(\frac{K_e C^\circ}{[\text{HO}^-]}\right) = -\log_{10}\left(\frac{1{,}0 \times 10^{-14} \times 1{,}0\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}{1{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}\right) = 12.$$

.....

24.14 a) Une solution à $\text{pH} = 1{,}0$ possède une concentration en ions oxonium $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-1,0}\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$, et une solution à $\text{pH} = 2{,}0$ possède une concentration en ions oxonium $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2,0}\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

.....

24.14 b) Une solution à $\text{pH} = 3{,}0$ possède une concentration en ions oxonium $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1{,}0 \times 10^{-3,0}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

.....

24.14 c) Les concentrations $[\text{HO}^-]$ et $[\text{H}_3\text{O}^+]$ sont liées *via* la constante d'autoprotolyse de l'eau :

$$K_e = \frac{[\text{HO}^-] \times [\text{H}_3\text{O}^+]}{(C^\circ)^2} \qquad \text{donc} \qquad [\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_e \cdot (C^\circ)^2}{[\text{HO}^-]}.$$

On a donc :

- pour la solution (a) : $[\text{H}_3\text{O}^+] = 5{,}0 \times 10^{-13}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
- Pour la solution (b) : $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1{,}25 \times 10^{-13}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

C'est donc la solution (a) qui est la plus concentrée en ions oxonium.

.....

24.14 d) Les concentrations $[\text{HO}^-]$ et $[\text{H}_3\text{O}^+]$ sont liées *via* la constante d'autoprotolyse de l'eau :

$$K_e = \frac{[\text{HO}^-] \times [\text{H}_3\text{O}^+]}{(C^\circ)^2} \qquad \text{donc} \qquad [\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_e \cdot (C^\circ)^2}{[\text{HO}^-]}.$$

On a donc $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1{,}0 \times 10^{-13}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ pour la solution (a).

Quant à la solution de $\text{pH} = 9{,}0$: sa concentration en ions oxonium est $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1{,}0 \times 10^{-9,0}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

C'est donc la solution (b) qui est la plus concentrée en ions oxonium.

.....

24.15 a) La concentration en ions oxonium en solution est liée à la concentration en NH_4^+ et NH_3 *via* la constante d'acidité du couple (NH_4^+/NH_3) :

$$K_A = \frac{[NH_3] \times [H_3O^+]}{[NH_4^+] \times C^\circ} \quad \text{d'où} \quad \frac{[H_3O^+]}{C^\circ} = \frac{K_A[NH_4^+]}{[NH_3]}.$$

On retrouve ainsi la formule d'Henderson :

$$\text{pH} = -\log_{10}\left(\frac{[H_3O^+]}{C^\circ}\right) = -\log_{10}\left(\frac{K_A[NH_4^+]}{[NH_3]}\right) = \text{p}K_A + \log_{10}\left(\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}\right).$$

.....

24.15 b) Numériquement, on trouve

$$\text{pH} = \text{p}K_A + \log_{10}\left(\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}\right) = 9{,}2 + \log_{10}\left(\frac{1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}{2{,}0 \times 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}\right) = 8{,}9.$$

.....

24.16 a) On écrit un tableau d'avancement pour cette réaction, où ξ_v représente l'avancement volumique :

	$CH_3COOH_{(aq)}$ +	$H_2O_{(\ell)}$ =	$CH_3COO^-_{(aq)}$ +	$H_3O^+_{(aq)}$
État initial	C_1	excès	0	0
État final	$C_1 - \xi_v$	excès	ξ_v	ξ_v

avec $C_1 = \dfrac{CV}{V+V'} = 1{,}00 \times 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

À l'équilibre, d'après la loi d'action de masse, on a :

$$Q_{\text{eq}} = K_A = \frac{a(CH_3COO^-)_{\text{eq}} \times a(H_3O^+)_{\text{eq}}}{a(CH_3COOH)_{\text{eq}} \times a(H_2O)_{\text{eq}}}.$$

En solution aqueuse diluée, on remplace les activités par leurs expressions. On obtient

$$K_A = \frac{[CH_3COO^-]_{\text{eq}} \times [H_3O^+]_{\text{eq}}}{[CH_3COOH]_{\text{eq}}\, C^\circ}.$$

Ensuite, on remplace les concentrations par leurs expressions trouvées dans le tableau d'avancement. Il vient :

$$K_A = \frac{\xi_v^2}{(C_1 - \xi_v)C^\circ} \qquad \text{donc} \qquad \xi_v^2 + K_A C^\circ\, \xi_v - K_A C_1 C^\circ = 0.$$

.....

24.16 b) La résolution du polynôme du second degré obtenu à la question précédente donne deux solutions :

$$\xi_{v,1} = 1{,}2 \times 10^{-4}\,\text{mol} \quad \text{et} \quad \xi_{v,2} = -1{,}3 \times 10^{-4}\,\text{mol}.$$

Le quotient de réaction à l'instant initial vaut $Q_i = 0$ (il n'y a pas de produits à l'instant initial).
Ainsi, on a $Q_i < K_A$: la réaction se produit dans le sens direct. L'avancement doit donc être positif et on a $\xi_v = \xi_{v,1}$.
Ainsi, à l'équilibre $[CH_3COOH] = C_1 - \xi_v = 8{,}8 \times 10^{-4}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

.....

24.16 c) La concentration en ions H_3O^+ est égale à ξ_v, ainsi le pH se calcule par $\text{pH} = -\log_{10}\left(\dfrac{\xi_v}{C^\circ}\right) = 3{,}9$.

.....

Fiche n° 25. Cinétique chimique

Réponses

25.1 a) ⓐ

25.1 b) ⓓ

25.1 c) ⓒ

25.1 d) ⓒ

25.2 a) ⓐ

25.2 b) ⓑ

25.2 c) ⓐ ⓒ ⓓ

25.2 d) ⓒ

25.3 a) Oui : 2

25.3 b) Oui : $\dfrac{5}{2}$

25.3 c) Non

25.4 a) $5{,}0\,\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{min}^{-1}$

25.4 b) $1{,}7\,\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{min}^{-1}$

25.4 c) $3{,}3\,\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{min}^{-1}$

25.4 d) $1{,}7\,\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{min}^{-1}$

25.5 a) $RT\big(\ln(A)-\ln(k)\big)$

25.5 b) $53\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.6 a) $\ln(A)-\dfrac{E_\text{a}}{RT}$

25.6 b) $1{,}8\times10^{2}\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.6 c) $5{,}3\times10^{11}\,\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$

25.7 a) $-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\text{d[A]}}{\text{d}t}$

25.7 b) k

25.7 c) $[\text{A}]_0-\alpha kt$

25.8 a) $v=k[\text{A}]$

25.8 b) $[\text{A}]_0\times\exp(-\alpha kt)$

25.9 a) $k[\text{A}]^2$

25.9 b) $\dfrac{1}{[\text{A}]_0}+\alpha kt$

25.9 c) $\dfrac{[\text{A}]_0}{1+\alpha[\text{A}]_0kt}$

25.10 a) $\dfrac{[\text{A}]_0}{2\alpha k}$

25.10 b) $\dfrac{\ln(2)}{\alpha k}$

25.10 c) $\dfrac{1}{[\text{A}]_0\alpha k}$

25.11 a) 1

25.11 b) $7{,}90\times10^{-4}\,\text{s}^{-1}$

25.12 a) ⓑ

25.12 b) ⓐ et ⓒ

25.12 c) ⓑ

25.12 d) ⓓ

25.13 a) $m=1$

25.13 b) $\ln\left(k\times[\text{H}_2]_0^m\right)+n\ln\left([\text{S}]_0\right)$

25.13 c) $n=\dfrac{1}{2}$

25.13 d) $3{,}00\ \text{L}^{1/2}\cdot\ \text{mol}^{-1/2}\cdot\ \text{min}^{-1}$

Corrigés

25.1 a) C'est (a) car la vitesse volumique s'exprime en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

25.1 b) C'est (d) car la vitesse volumique s'exprime en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ et la concentration en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Une analyse dimensionnelle sur $v = k[\text{A}]^3$ donne k en $\text{L}^2 \cdot \text{mol}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

25.2 a) Par définition, on a $v_{\text{form}}(\text{NH}_3) = +\dfrac{\text{d}[\text{NH}_3]}{\text{d}t}$.

25.2 b) Par définition, on a $v_{\text{disp}}(\text{H}_2) = -\dfrac{\text{d}[\text{H}_2]}{\text{d}t}$.

25.2 c) Par définition, en utilisant les coefficients stœchiométriques, on a $v = \dfrac{1}{2}\dfrac{\text{d}[\text{NH}_3]}{\text{d}t} = -\dfrac{\text{d}[\text{N}_2]}{\text{d}t} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\text{d}[\text{H}_2]}{\text{d}t}$.

25.2 d) On a $v_{\text{disp}}(\text{N}_2) = v$; $v_{\text{disp}}(\text{H}_2) = 3v$; $v_{\text{form}}(\text{NH}_3) = 2v$.

25.3 a) La réaction admet un ordre global égal à 2.

25.3 b) La réaction admet un ordre global égal à $\dfrac{5}{2}$.

25.3 c) La réaction n'admet pas d'ordre global.

25.4 a) On utilise la tangente à la courbe à $t = 0\,\text{min}$ et on calcule le coefficient directeur de la tangente.

La vitesse de disparition du réactif est égale à l'opposé du coefficient directeur de la tangente à la courbe.

On en déduit : $v_{\text{disp}}(\text{C}\ell\text{O}^-)_{0\text{min}} = 5{,}0\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$.

25.4 b) On utilise la tangente à la courbe à $t = 0\,\text{min}$ et on calcule le coefficient directeur de la tangente. La vitesse de formation du produit est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe. On en déduit

$$v_{\text{form}}(\text{C}\ell\text{O}_3{}^-)_{0\,\text{min}} = 1{,}7\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}.$$

25.4 c) On utilise la tangente à la courbe à $t = 0\,\text{min}$ et on calcule le coefficient directeur de la tangente. La vitesse de formation du produit est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe. On en déduit

$$v_{\text{form}}(\text{C}\ell^-)_{0\,\text{min}} = 3{,}3\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}.$$

25.4 d) Par définition, la vitesse de réaction est égale à $v = \dfrac{1}{|\nu_i|} v_{\text{disp/form}}$.

On en déduit ici que $v(t = 0\,\text{min}) = \dfrac{1}{3} v_{\text{disp}}(\text{C}\ell\text{O}^-)_{0\text{min}} = 1{,}7\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$.

25.5 a) On a $\ln(k) = \ln(A) - \dfrac{E_\text{a}}{RT}$. On en déduit : $E_\text{a} = RT\big(\ln(A) - \ln(k)\big)$.

25.5 b) On a $E_a = RT_1(\ln(A) - \ln(k))$ et $E_a = RT_2(\ln(A) - \ln(2k))$. On en déduit

$$E_a\Big(\frac{1}{RT_1} - \frac{1}{RT_2}\Big) = \ln(2),$$

puis $E_a = \dfrac{-R\ln(2)}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}$. L'application numérique donne : $E_a = 53\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

.....

25.6 a) On a $k = A \times \exp\Big(-\dfrac{E_a}{RT}\Big)$ donc $\ln(k) = \ln(A) - \dfrac{E_a}{RT}$.

.....

25.6 b) Le coefficient directeur de la droite a est égal à $a = -\dfrac{E_a}{R}$. On en déduit donc que l'énergie d'activation E_a vaut $E_a = -a \times R = 1{,}8 \times 10^2\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

.....

25.6 c) L'ordonnée à l'origine de la droite b est égale à $b = \ln(A)$. On en déduit donc le facteur de fréquence A vaut $A = \exp(b) = 5{,}3 \times 10^{11}\,\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$.

.....

25.7 a) On a $v = -\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\text{d[A]}}{\text{d}t}$.

.....

25.7 b) Par définition de l'ordre d'une réaction, on a $v = k[\text{A}]^0 = k$.

.....

25.7 c) On a donc $-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\text{d[A]}}{\text{d}t} = k$ donc $\text{d[A]} = -\alpha k\,\text{d}t$. Il vient par intégration : $\displaystyle\int_{[\text{A}]_0}^{[\text{A}]} \text{d[A]} = -\alpha k \int_{t=0}^{t} \text{d}t$.

Ainsi, on a $\Big[[\text{A}]\Big]_{[\text{A}]_0}^{[\text{A}]} = -\alpha k\big[t\big]_{t=0}^{t}$, ce qui donne $[\text{A}] = [\text{A}]_0 - \alpha k t$.

.....

25.8 a) Par définition de l'ordre d'une réaction, on a $v = k[\text{A}]^1 = k[\text{A}]$.

.....

25.8 b) On a donc $-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\text{d[A]}}{\text{d}t} = k[\text{A}]$ donc $\dfrac{\text{d[A]}}{[\text{A}]} = -\alpha k\,\text{d}t$. Il vient par intégration : $\displaystyle\int_{[\text{A}]_0}^{[\text{A}]} \frac{\text{d[A]}}{[\text{A}]} = -\alpha k \int_{t=0}^{t} \text{d}t$.

Ainsi, on a $\Big[\ln[\text{A}]\Big]_{[\text{A}]_0}^{[\text{A}]} = -\alpha k\big[t\big]_{t=0}^{t}$, ce qui donne $\ln\big([\text{A}]\big) - \ln\big([\text{A}]_0\big) = -\alpha k(t-0)$.

Finalement, on trouve $[\text{A}] = [\text{A}]_0 \times \exp(-\alpha k t)$.

.....

25.9 a) Par définition de l'ordre d'une réaction, on a $v = k[\text{A}]^2$.

.....

25.9 b) On a donc $-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\text{d[A]}}{\text{d}t} = k[\text{A}]^2$ donc $-\dfrac{\text{d[A]}}{[\text{A}]^2} = \alpha k\,\text{d}t$. Il vient par intégration : $\displaystyle\int_{[\text{A}]_0}^{[\text{A}]} -\frac{\text{d[A]}}{[\text{A}]^2} = \alpha k \int_{t=0}^{t} \text{d}t$.

Ainsi, on a $\Big[\dfrac{1}{[\text{A}]}\Big]_{[\text{A}]_0}^{[\text{A}]} = \alpha k\big[t\big]_{t=0}^{t}$, ce qui donne $\dfrac{1}{[\text{A}]} = \dfrac{1}{[\text{A}]_0} + \alpha k t$.

.....

25.9 c) On a donc $[\text{A}] = \dfrac{1}{\dfrac{1}{[\text{A}]_0} + \alpha k t} = \dfrac{[\text{A}]_0}{1 + \alpha[\text{A}]_0 k t}$.

.....

25.10 a) Lorsque $t = t_{1/2}$, on a $[\text{A}]_{t_{1/2}} = \dfrac{[\text{A}]_0}{2}$. On a donc $\dfrac{[\text{A}]_0}{2} - [\text{A}]_0 = -\alpha k t_{1/2}$. On en déduit alors : $t_{1/2} = \dfrac{[\text{A}]_0}{2\alpha k}$.

.....

25.10 b) À $t = t_{1/2}$, on a l'égalité $\frac{[\text{A}]_0}{2} = [\text{A}]_0 \times \exp(-\alpha k \times t_{1/2})$. En simplifiant de part et d'autre par $[\text{A}]_0$, il reste $\frac{1}{2} = \exp(-\alpha k t_{1/2})$, soit $\ln(2) = \alpha k \times t_{1/2}$. On en déduit l'expression du temps de demi-réaction : $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\alpha k}$.

.....

25.10 c) À $t = t_{1/2}$, on a l'égalité $\frac{2}{[\text{A}]_0} = \frac{1}{[\text{A}]_0} + \alpha \times k \times t$, soit $\frac{1}{[\text{A}]_0} = \alpha \times k \times t_{1/2}$. On en déduit l'expression du temps de demi-réaction : $t_{1/2} = \frac{1}{[\text{A}]_0 \alpha k}$.

.....

25.11 a) Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ ne dépend pas de la concentration initiale. La réaction est d'ordre 1.

.....

25.11 b) Pour l'ordre 1, on a $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{1 \times k}$. La moyenne des temps de demi-réaction obtenus est de 877 s.

On en déduit que $k = \frac{\ln(2)}{877} = 7{,}90 \times 10^{-4}\,\text{s}^{-1}$.

.....

25.12 a) D'après l'énoncé, les ions hydroxyde sont en large excès donc RBr est le réactif limitant de la transformation. On constate qu'au bout de 70 minutes, la concentration en RBr est divisée par deux et qu'au bout de 140 minutes, soit 2×70 minutes, la concentration est divisée par quatre. On en déduit que $t_{1/2} = 70$ min (réponse (b)).

.....

25.12 b) L'ordre partiel par rapport à chacun des réactifs étant de 1, on peut écrire la vitesse $v = k[\text{RBr}]^1[\text{HO}^-]^1$. La réponse (a) est donc correcte. En outre, les ions hydroxyde sont en large excès par rapport au 1-bromo-2-méthylpropane, donc on suppose leur concentration constante au cours de la transformation. Ainsi, on introduit une constante de vitesse apparente $k_{\text{app}} = k[\text{HO}^-]_0$; la vitesse peut donc s'écrire $v = k_{\text{app}}[\text{RBr}]$ (réponse (c)).

.....

25.12 c) L'ordre partiel par rapport à RBr valant 1, la concentration en RBr vérifie $[\text{RBr}] = [\text{RBr}]_0 \times \exp(-k_{\text{app}} t)$, soit $\ln[\text{RBr}] = \ln[\text{RBr}]_0 - k_{\text{app}} \times t$. Donc, le tracé de $\ln\big([\text{RBr}]\big)$ en fonction du temps devrait être une droite de coefficient directeur $-k_{\text{app}}$ et d'ordonnée à l'origine $\ln\big([\text{RBr}]_0\big)$. C'est la réponse (b) qui est correcte.

.....

25.12 d) On a $k_{\text{app}} = k[\text{HO}^-]_0$ donc $k = \frac{k_{\text{app}}}{[\text{HO}^-]_0}$ donc $k = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$, ce qui correspond à (d).

.....

25.13 a) Dans la série 1, $[\text{S}]_0$ est fixe. De plus, v_0 est doublée/triplée lorsque $[\text{H}_2]_0$ est doublée/triplée donc v_0 est proportionnelle à $[\text{H}_2]_0$. Ainsi, on a $m = 1$.

.....

25.13 b) On a $v_0 = k \times [\text{S}]_0{}^n \times [\text{H}_2]_0{}^m$ donc $\ln(v_0) = \ln\big(k \times [\text{H}_2]_0{}^m\big) + n \times \ln\big([\text{S}]_0\big)$. C'est bien une fonction affine de coefficient directeur n et d'ordonnée à l'origine $\ln\big(k \times [\text{H}_2]_0{}^m\big)$.

.....

25.13 c) Le coefficient directeur de la modélisation est de l'ordre de 0,5. On en déduit que $n = \frac{1}{2}$.

.....

25.13 d) Grâce à la valeur de l'ordonnée à l'origine, on trouve $k = \frac{\exp(-5{,}19)}{1{,}86 \times 10^{-3}} = 3{,}00\ \text{L}^{1/2} \cdot \text{mol}^{-1/2} \cdot \text{min}^{-1}$.

.....

Fiche n° 26. Chiffres significatifs et incertitudes

Réponses

26.1 a) $\boxed{3{,}15 \times 10^{1}}$

26.1 b) $\boxed{1{,}9 \times 10^{-3}}$

26.1 c) $\boxed{8{,}120 \times 10^{-1}}$

26.1 d) $\boxed{1{,}600\,002 \times 10^{6}}$

26.1 e) $\boxed{2{,}023\,9 \times 10^{3}}$

26.1 f) $\boxed{7{,}300 \times 10^{3}}$

26.1 g) $\boxed{3{,}30 \times 10^{8}}$

26.1 h) $\boxed{7{,}022 \times 10^{-3}}$

26.2 a) $\boxed{2}$

26.2 b) $\boxed{4}$

26.2 c) $\boxed{5}$

26.2 d) $\boxed{2}$

26.3 a) $\boxed{8{,}0\,\text{km}}$

26.3 b) $\boxed{31\,\text{cm}}$

26.3 c) $\boxed{1{,}0 \times 10^{-1}}$

26.4 $\boxed{\text{(c) et (d)}}$

26.5 a) $\boxed{(19{,}10 \pm 0{,}36)\,\text{m}}$

26.5 b) $\boxed{(0{,}90 \pm 0{,}36)\,\text{m}}$

26.5 c) $\boxed{(91{,}0 \pm 3{,}5)\,\text{m}^2}$

26.5 d) $\boxed{0{,}910 \pm 0{,}035}$

26.6 $\boxed{(59{,}0 \pm 1{,}4)\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}}$

26.7 a) $\boxed{(1{,}191 \pm 0{,}035)\,\text{W}}$

26.7 b) $\boxed{(1{,}175 \pm 0{,}059)\,\text{W}}$

26.7 c) $\boxed{\text{(a)}}$

26.8 a) $\boxed{\text{(b)}}$

26.8 b) $\boxed{\text{(a)}}$

26.8 c) $\boxed{\text{(d)}}$

26.9 a) $\boxed{d\sqrt{\left(\frac{\mathrm{u}(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{u}(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{u}(\ell)}{\ell}\right)^2}}$

26.9 b) $\boxed{(74{,}4 \pm 4{,}4)\,\mu\text{m}}$

26.10 a) $\boxed{4{,}929\,5\,\text{V}}$

26.10 b) $\boxed{0{,}472\,\text{V}}$

26.10 c) $\boxed{(4{,}93 \pm 0{,}15)\,\text{V}}$

26.11 $\boxed{(25{,}017 \pm 0{,}092)\,\text{cm}}$

26.12 $\boxed{\text{(a)}}$

26.13 a) $\boxed{(1{,}780 \pm 0{,}050)\,\text{mm}}$

26.13 b) $\boxed{(2{,}49 \pm 0{,}14)\,\text{mm}^2}$

26.14 a) $\boxed{\text{(b)}}$

26.14 b) $\boxed{\text{(b)}}$

26.14 c) $\boxed{\text{(a)}}$

Corrigés

26.1 a) Pour passer en écriture scientique, on garde une puissance de 10 et un préfacteur compris entre 1 (inclus) et 10 (exclu). On réécrit alors 31,5 sous la forme $3{,}15 \times 10^{1}$.

.....

26.1 b) On écrit $0{,}001\,9 = 1{,}9 \times 10^{-3}$.

.....

26.1 c) On écrit $0{,}812\,0 = 8{,}120 \times 10^{-1}$.

.....

26.1 d) On écrit $1\,600\,002 = 1{,}600\,002 \times 10^{6}$.

.....

26.1 e) On écrit $2\,023{,}9 = 2{,}023\,9 \times 10^{3}$.

.....

26.1 f) On écrit $7\,300 = 7{,}300 \times 10^{3}$.

.....

26.1 g) On écrit $330 \times 10^{6} = 3{,}30 \times 10^{8}$.

.....

26.1 h) On écrit $70{,}22 \times 10^{-4} = 7{,}022 \times 10^{-3}$.

.....

26.2 a) C'est le nombre de chiffres de 0,39 qu'il faut regarder, il y a 2 chiffres à partir du premier non nul, le nombre de chiffres significatifs est 2.

.....

26.2 b) C'est le nombre de chiffres de 12,84 qu'il faut regarder, il y a 4 chiffres à partir du premier non nul, le nombre de chiffres significatifs est 4.

.....

26.2 c) C'est le nombre de chiffres de 12,250 qu'il faut regarder, il y a 5 chiffres à partir du premier non nul (il faut prendre en compte le zéro final), le nombre de chiffres significatifs est 5.

.....

26.2 d) Les zéros avant le premier chiffre non nul ne comptent pas dans le décompte des chiffres significatifs, ceux après si : le nombre de chiffres significatifs est 2.

.....

26.3 a) Les deux données ont deux chiffres significatifs, on garde donc deux chiffres significatifs lors de la multiplication : on a $d = v\,t = 80\,\mathrm{km \cdot h^{-1}} \times 0{,}10\,\mathrm{h} = 8{,}0\,\mathrm{km}$.

.....

26.3 b) Il faut additionner la longueur et la largeur puis multiplier par deux : on a

$$p = 2 \times (6\,\mathrm{mm} + 15\,\mathrm{cm}) = 31{,}2\,\mathrm{cm}.$$

Dans la somme, la précision est limitée par la longueur (précise au centimètre près). Il faut donc arrondir au centimètre près : on écrit $p = 31\,\mathrm{cm}$.

.....

26.3 c) Déjà, on a $R_1 + R_2 = 0{,}9\,\mathrm{k\Omega} + 100\,\Omega = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, avec deux chiffres significatifs.

On calcule alors le gain par une division, en gardant le plus petit nombre de chiffres significatifs entre le numérateur (trois chiffres significatifs) et le dénominateur (deux chiffres significatifs) :

$$G = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100\,\Omega}{1{,}0\,\mathrm{k\Omega}} = 1{,}0 \times 10^{-1}.$$

.....

26.4 L'incertitude-type est exprimée dans le résultat final avec deux chiffres significatifs, avec un arrondi par valeur supérieure, ou au plus près (les deux options sont acceptées). Le résultat numérique est ensuite arrondi au niveau du dernier chiffre significatif de l'incertitude-type, donc ici au millimètre. On en déduit $f' = (120 \pm 33)\,\text{mm}$ ou $f' = (120 \pm 32)\,\text{mm}$.

.....

26.5 a) On a $z = x + y = 19{,}1\,\text{m}$ et $\mathsf{u}(z) = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^2} = 0{,}36\,\text{m}$. En arrondissant l'incertitude à deux chiffres, on obtient $(19{,}10 \pm 0{,}36)\,\text{m}$.

.....

26.5 b) On a $z = x - y = 0{,}9\,\text{m}$ et $\mathsf{u}(z) = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^2} = 0{,}36\,\text{m}$. En arrondissant l'incertitude à deux chiffres, on obtient $(0{,}90 \pm 0{,}36)\,\text{m}$.

Lorsque l'on soustrait deux grandeurs physiques proches, le résultat est en général moins précis que la donnée la moins précise.

.....

26.5 c) On a $z = x \times y = 91\,\text{m}^2$ et $\mathsf{u}(z) = 91 \times \sqrt{(0{,}2/10)^2 + (0{,}3/9{,}1)^2} = 3{,}51\,\text{m}^2$. En arrondissant l'incertitude à deux chiffres, on obtient $(91{,}0 \pm 3{,}5)\,\text{m}^2$.

.....

26.5 d) On a $z = y/x = 0{,}91$ et $\mathsf{u}(z) = 0{,}91 \times \sqrt{(0{,}2/10)^2 + (0{,}3/9{,}1)^2} = 0{,}035\,1$. En arrondissant l'incertitude à deux chiffres, on obtient $(9{,}10 \pm 0{,}35) \times 10^{-1}$.

.....

26.6 On commence par calculer le résultat avant de s'intéresser aux incertitudes :

$$c_A = \frac{c_B \cdot V_B}{V_A} = \frac{100{,}0\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot 11{,}8\,\text{mL}}{20\,\text{mL}} = 59\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

On propage l'incertitude pour ce produit de grandeurs indépendantes :

$$\frac{\mathsf{u}(c_A)}{c_A} = \sqrt{\left(\frac{\mathsf{u}(c_B)}{c_B}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(V_A)}{V_A}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(V_B)}{V_B}\right)^2}.$$

Numériquement, cela donne

$$\mathsf{u}(c_A) = 59\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1} \sqrt{\left(\frac{2{,}0\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}}{100{,}0\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}10\,\text{mL}}{20{,}00\,\text{mL}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}10\,\text{mL}}{11{,}80\,\text{mL}}\right)^2}.$$

On obtient $\mathsf{u}(c_A) = 1{,}4\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}$, et finalement $c_A = (59{,}0 \pm 1{,}4)\,\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}$.

.....

26.7 a) On calcule la puissance : $\mathcal{P} = U \times I = 2{,}382\,\text{V} \times 0{,}500\,\text{A} = 1{,}191\,\text{W}$.

On applique ici la propagation des incertitudes à $\mathcal{P} = U \times I$,

$$\frac{\mathsf{u}(\mathcal{P})}{\mathcal{P}} = \sqrt{\left(\frac{\mathsf{u}(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(I)}{I}\right)^2}.$$

Numériquement, cela donne

$$\mathsf{u}(\mathcal{P}) = 1{,}202\,\text{W} \times \sqrt{\left(\frac{0{,}050\,\text{V}}{2{,}382\,\text{V}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}010\,\text{A}}{0{,}500\,\text{A}}\right)^2} = 0{,}035\,\text{W}.$$

Finalement, on obtient $\mathcal{P} = (1{,}191 \pm 0{,}035)\,\text{W}$.

.....

26.7 b) On calcule la puissance : $\mathcal{P} = R \times I^2 = 4{,}7\,\Omega \times (0{,}500\,\text{A})^2 = 1{,}175\,\text{W}$.

On applique ici la propagation des incertitudes à $\mathcal{P} = R \times I^2$: on a

$$\frac{\mathsf{u}(\mathcal{P})}{\mathcal{P}} = \sqrt{\left(\frac{\mathsf{u}(R)}{R}\right)^2 + 2^2\left(\frac{\mathsf{u}(I)}{I}\right)^2}.$$

Numériquement, cela donne

$$\mathsf{u}(\mathcal{P}) = 1{,}175\,\text{W}\sqrt{\left(\frac{0{,}14}{100}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{0{,}010\,\text{A}}{0{,}500\,\text{A}}\right)^2} = 0{,}059\,\text{W}.$$

Finalement, on obtient $\mathcal{P} = (1{,}175 \pm 0{,}059)\,\text{W}$.

.....

26.7 c) Les mesures sont $\mathcal{P} = (1{,}191 \pm 0{,}035)\,\text{W}$ et $\mathcal{P} = (1{,}175 \pm 0{,}059)\,\text{W}$. Les deux intervalles se recoupent : les mesures sont compatibles.

.....

26.8 a) L'épaisseur du tube est la différence entre le rayon du cylindre extérieur et le rayon intérieur. Le rayon étant la moitié du diamètre, on trouve $e = \dfrac{D}{2} - \dfrac{d}{2}$.

.....

26.8 b) On applique la formule donnée dans les prérequis de cette section avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$. On trouve

$$\mathsf{u}(e) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathsf{u}^2(D) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \mathsf{u}^2(d)} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathsf{u}^2(D) + \mathsf{u}^2(d)}.$$

.....

26.8 c) On a $e = \dfrac{10{,}3\,\text{mm} - 6{,}8\,\text{mm}}{2} = 1{,}75\,\text{mm}$, et $\mathsf{u}(e) = \dfrac{1}{2}\sqrt{(0{,}1\,\text{mm})^2 + (0{,}1\,\text{mm})^2} = 0{,}071\,\text{mm}$. Finalement, on a donc $e = (1{,}750 \pm 0{,}071)\,\text{mm}$.

.....

26.9 a) On a, pour ce produit de grandeurs indépendantes :

$$\frac{\mathsf{u}(d)}{d} = \sqrt{\left(\frac{\mathsf{u}(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(\ell)}{\ell}\right)^2}.$$

.....

26.9 b) On commence par calculer le résultat avant de s'intéresser aux incertitudes :

$$d = 2\frac{\lambda\, D}{\ell} = 2 \times \frac{632{,}8\,\text{nm} \times 3\,\text{m}}{51\,\text{mm}} = 74{,}447\,\mu\text{m}.$$

Le nombre de chiffres conservés ici n'est pas significatif, juste assez grand pour pouvoir être ajusté ensuite. On calcule ensuite numériquement l'incertitude :

$$\mathsf{u}(d) = 74{,}447\,\text{nm} \times \sqrt{\left(\frac{0{,}10\,\text{nm}}{632{,}8\,\text{nm}}\right)^2 + \left(\frac{10 \times 10^{-3}\,\text{m}}{3{,}000\,\text{m}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}30\,\text{cm}}{5{,}1\,\text{cm}}\right)^2} = 4{,}4\,\mu\text{m}.$$

Finalement, on obtient $d = (74{,}4 \pm 4{,}4)\,\mu\text{m}$.

.....

26.10 a) On peut faire le calcul à l'aide d'un tableur (fonction `MOYENNE()` souvent), d'une calculatrice ou de python (fonction `mean()` de la bibliothèque `numpy` par exemple). On obtient $m = \displaystyle\sum_{i=1}^{10} U_i = 4{,}929\,5\,\text{V}$.

.....

26.10 b) Le calcul est fait par une fonction prédéfinie du tableur (`ECARTYPE()` souvent), de la calculatrice ou de python (fonction `std()` de la bibliothèque `numpy` par exemple). On obtient $\sigma_U = 0{,}472\,042\,429\,825\,493\,\text{V}$, soit 0,472 V en gardant trois chiffres significatifs.

.....

26.10 c) On obtient alors $\mathtt{u}(m) = \dfrac{0{,}472}{\sqrt{10}} = 0{,}149\,\text{V}$, que l'on arrondit en gardant deux chiffres significatifs.

L'incertitude-type sur la valeur moyenne est donc finalement $\mathtt{u}(m) = 0{,}15\,\text{V}$.

Il faut exprimer la moyenne au centième de volt ce qui donne le résultat suivant : $m = (4{,}93 \pm 0{,}15)\,\text{V}$. Cette valeur moyenne est la meilleure estimation de la « valeur vraie » que l'on peut faire à partir de cette série de mesures répétées.

.....

26.11 On calcule une valeur moyenne de 25,017 cm et un écart-type des mesures de 0,301 cm, ce qui donne une incertitude-type sur la valeur moyenne de 0,087 cm.

L'incertitude-type est, avec deux chiffres significatifs, au centième de millimètre, il faut donc garder les chiffres jusqu'à cette décimale : on obtient $(25{,}017 \pm 0{,}087)\,\text{cm}$.

.....

26.12 Pour une résistance, on a $\mathtt{u}(r) = r \times \dfrac{\mathtt{u}(r)}{r}$.

Pour les $n = 5$ résistances, on a $R = n\,r$, et $\mathtt{u}(R) = \sqrt{n\,u^2(r)}$, donc

$$\frac{\mathtt{u}(R)}{R} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pour $n = 5$, on obtient $\dfrac{\mathtt{u}(R)}{R} \approx 0{,}44\,\%$.

La réduction de l'incertitude vient du fait que les incertitudes sur les composants sont indépendantes les unes des autres. On retrouve ici le facteur « $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ » qui permet de passer de l'incertitude sur une mesure (une résistance) à celui sur la moyenne d'une série de n mesures (les n résistances en série).

.....

26.13 a) Le zéro de l'échelle mobile est entre 1,7 mm et 1,8 mm. Il y a 20 graduations dans l'échelle mobile, le pied à coulisse a donc une précision affichée de $\dfrac{1\,\text{mm}}{20} = 0{,}05\,\text{mm}$. La graduation qui est alignée avec une graduation fixe est la 16e de l'échelle mobile, on lit donc

$$d = 1{,}7\,\text{mm} + 16 \times 0{,}05\,\text{mm} = 1{,}78\,\text{mm}.$$

Le résultat de la mesure est alors $d = (1{,}780 \pm 0{,}050)\,\text{mm}$, puisque conventionnellement les incertitudes sont données avec deux chiffres significatifs.

.....

26.13 b) La section droite est un disque de diamètre d. Sa mesure vaut donc $s = \pi(d/2)^2$. Numériquement on obtient

$$s = \pi \times \left(\frac{1{,}78\,\text{mm}}{2}\right)^2 = 2{,}488\,5\,\text{mm}^2.$$

La section étant reliée au diamètre par une fonction puissance on a

$$\frac{\mathtt{u}(s)}{s} = 2\frac{\mathtt{u}(d)}{d} = 2 \times \frac{0{,}05\,\text{mm}}{1{,}78\,\text{mm}} = 5{,}6\,\%.$$

Finalement, on obtient $\mathtt{u}(s) = 0{,}14\,\text{mm}^2$ et le résultat s'écrit $s = (2{,}49 \pm 0{,}14)\,\text{mm}^2$.

.....

26.14 a) On compare une valeur à une valeur de référence. On vérifie que l'incertitude de la valeur tabulée est très inférieure à celle de la mesure. En effet, l'inégalité

$$(0{,}69\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})^2 = 0{,}48\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2} \ll (2{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})^2 = 5{,}3\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

est bien vérifiée (il y a plus d'un facteur 10 entre les deux valeurs).

On peut donc utiliser la formule simplifiée : on a $\mathsf{z} = \dfrac{4{,}92\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{2{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} = 2{,}1 > 2$.

Ainsi, les deux valeurs sont incompatibles.

.....

26.14 b) On compare deux valeurs avec la même incertitude, on doit appliquer la formule complète, mais qui se simplifie un peu puisque les incertitudes sont les mêmes. On trouve

$$\mathsf{z} = \frac{0{,}2\,^\circ\mathrm{C}}{\sqrt{2}\times 0{,}060\,^\circ\mathrm{C}} = 2{,}4 > 2$$

Ainsi, les deux valeurs sont incompatibles.

.....

26.14 c) On compare une valeur à une valeur de référence exacte : on a $\mathsf{z} = \dfrac{0{,}95\,\mathrm{cm}}{0{,}85\,\mathrm{cm}} = 1{,}1 < 2$. D'après le critère donné, les deux valeurs sont compatibles.

.....