

Les projections de forces en mécanique

Niveau MP2I

Principe fondamental de la dynamique — Choix du repère — Décomposition des forces —
Applications au plan incliné.

1 Pourquoi projeter les forces ?

En mécanique, les forces sont des **vecteurs**. Elles possèdent une direction, un sens et une norme.

Or le mouvement d'un système est généralement étudié dans un **repère particulier**. Pour appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) appelé également la deuxième loi de Newton, il est donc nécessaire d'exprimer toutes les forces dans la base choisie.

La projection n'est pas une opération physique.

C'est uniquement un **changement de base vectorielle**.

Autrement dit, on remplace un vecteur par ses composantes selon les axes du repère.

Le PFD s'écrit

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Cette égalité vectorielle est équivalente aux deux égalités scalaires

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_y = ma_y$$

dans une base orthonormée plane.

Méthode

Avant tout calcul :

1. Définir le système étudié.
2. Réaliser le bilan des forces.
3. Choisir un repère adapté.
4. Décomposer uniquement les forces qui ne sont pas parallèles aux axes.
5. Projeter le PFD sur chaque axe.
6. Résoudre les équations obtenues.

2 Rappels sur les vecteurs

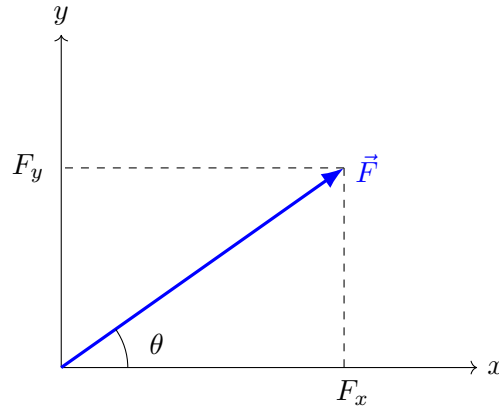
Dans une base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$,
tout vecteur peut s'écrire

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$$

où

- F_x est la composante selon l'axe x ;
- F_y est la composante selon l'axe y .

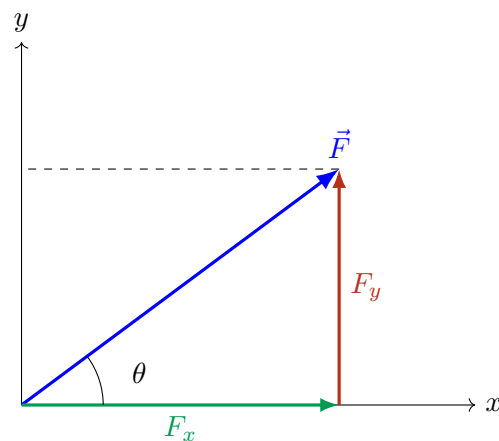
Ces deux composantes dépendent uniquement du choix du repère.



3 Décomposition d'une force

Considérons une force $\vec{F}$ faisant un angle θ avec l'axe horizontal.

L'objectif est de déterminer les composantes de cette force dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.



Le triangle obtenu est rectangle.

On applique alors directement la trigonométrie.

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$

On obtient ainsi

$$\vec{F} = F \cos \theta \vec{e}_x + F \sin \theta \vec{e}_y$$

Attention

Les étudiants confondent très souvent sinus et cosinus.

Il ne faut jamais apprendre les formules par cœur.

Il faut retrouver les composantes à partir du triangle rectangle.

$$\cos \theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

Le dessin permet presque toujours d'éviter les erreurs.

4 Choix du repère

Le choix du repère est une étape essentielle.

Le meilleur repère est celui qui permet de limiter le nombre de projections.

Situation	Repère conseillé
Mouvement horizontal	axes horizontaux/verticaux
Plan incliné	parallèle et perpendiculaire au plan
Mouvement circulaire	tangent / normal

Méthode

Une force déjà parallèle à un axe ne doit pas être décomposée.

Par exemple :

- une tension horizontale reste entièrement sur x ;
- une réaction normale reste entièrement sur l'axe normal ;
- seul le poids est généralement projeté sur un plan incliné.

Chaque projection inutile augmente le risque d'erreur.

5 Le poids

Le poids est une force particulière.

Sa direction est toujours verticale.

Sa norme vaut

$$P = mg$$

où

- m est la masse ;
- $g = 9.81 m.s^{-2}$ est l'intensité de la pesanteur.

Le poids n'est donc pas orienté suivant les axes du problème.

Il devra très souvent être projeté.

Remarque

Une projection ne change jamais la norme du poids.

Elle consiste simplement à exprimer le même vecteur dans une base plus adaptée.

6 Application fondamentale : le plan incliné

Le plan incliné constitue l'application classique des projections de forces. Il illustre l'intérêt de choisir une base adaptée à la géométrie du problème.

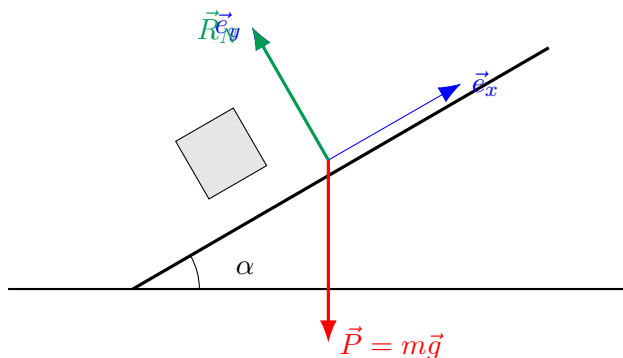
Le solide est supposé glisser sur un plan faisant un angle α avec l'horizontale.

On choisit la base :

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$$

où

- $\vec{e}_x$ est parallèle au plan ;
- $\vec{e}_y$ est perpendiculaire au plan.



Le poids est la seule force qui n'est alignée avec aucun des axes.

C'est donc la seule force qu'il faut projeter.

La réaction normale est déjà portée par l'axe $\vec{e}_y$.

6.1 Projection du poids

Le triangle de projection conduit immédiatement aux relations

$$P_x = mg \sin \alpha$$

$$P_y = mg \cos \alpha$$

où

- P_x est parallèle au plan ;
- P_y est perpendiculaire au plan.

Attention

L'angle α est situé entre le poids et la normale au plan.
C'est cette géométrie qui explique pourquoi

$$P_x = mg \sin \alpha$$

et non

$$mg \cos \alpha.$$

Ne jamais retenir ces formules par cœur.

Il faut toujours reconstruire mentalement le triangle de projection.

6.2 Application du Principe Fondamental de la Dynamique

On suppose dans un premier temps l'absence de frottement.

Le bilan des forces est

$$\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}.$$

En projetant selon l'axe parallèle au plan,

$$mg \sin \alpha = ma.$$

On obtient immédiatement

$$a = g \sin \alpha.$$

Selon l'axe normal,

$$R_N - mg \cos \alpha = 0.$$

On en déduit

$$R_N = mg \cos \alpha.$$

Méthode

Sur un plan incliné, la résolution suit toujours les mêmes étapes.

1. Choisir les axes parallèle et normal.
2. Réaliser le bilan des forces.
3. Projeter uniquement le poids.
4. Écrire le PFD sur chacun des deux axes.
5. Résoudre le système obtenu.

7 Exemples entièrement corrigés

Exemple 1 – Décomposition d'une force

Une force de norme

$$F = 120N$$

fait un angle de

$$\theta = 35^\circ$$

avec l'horizontale.

Déterminer ses composantes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

Résolution

Le repère est déjà adapté au problème.

On applique directement les relations de projection.

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$

Numériquement,

$$F_x = 120 \cos 35^\circ = 98.3N$$

$$F_y = 120 \sin 35^\circ = 68.8N$$

Le vecteur peut donc s'écrire

$$\vec{F} = 98.3 \vec{e}_x + 68.8 \vec{e}_y$$

Remarque

La norme du vecteur n'a évidemment pas changé.
On a seulement changé son écriture dans la base choisie.

Exemple 2 – Solide sur un plan incliné

Un solide de masse

$$m = 5kg$$

glisse sans frottement sur un plan incliné d'angle

$$\alpha = 25^\circ.$$

On donne

$$g = 9.81m.s^{-2}.$$

Déterminer

- la réaction normale ;
- l'accélération du solide.

1. Bilan des forces

Le solide est soumis à deux forces.

$$\vec{P}$$

le poids.

$$\vec{R}_N$$

la réaction normale du plan.

2. Choix du repère

On choisit

$$\vec{e}_x$$

parallèle au plan,
et

$$\vec{e}_y$$

normal au plan.

3. Projection du poids

Le poids vaut

$$P = mg = 5 \times 9.81 = 49.1 N.$$

Ses composantes sont

$$P_x = mg \sin 25^\circ = 20.8 \text{ N}$$

$$P_y = mg \cos 25^\circ = 44.5 \text{ N}$$

4. Projection du PFD

Selon l'axe parallèle,

$$mg \sin 25^\circ = ma$$

d'où

$$a = g \sin 25^\circ = 4.15 m.s^{-2}.$$

Selon l'axe normal,

$$R_N - mg \cos 25^\circ = 0$$

d'où

$$R_N = 44.5 \text{ N}$$

Méthode

Dans un problème de mécanique, il est conseillé de toujours suivre la même démarche :

1. Définir le système.
2. Réaliser le bilan des forces.
3. Choisir le repère.
4. Projeter le PFD.
5. Résoudre les équations.

Cette méthode est universelle et fonctionne dans la quasi-totalité des problèmes de mécanique en CPGE.

Attention

Les erreurs les plus fréquentes sont :

- choisir un mauvais repère ;
- oublier une force ;
- inverser sinus et cosinus ;
- projeter une force déjà alignée avec un axe ;
- oublier que le poids est toujours vertical.

8 Travaux dirigés

Les exercices suivants doivent être résolus en appliquant rigoureusement la méthode exposée précédemment.

Pour chacun d'eux, on demande :

1. Définir le système étudié.
2. Réaliser le bilan des forces.
3. Choisir un repère adapté.
4. Écrire le PFD sous forme vectorielle.
5. Projeter le PFD.
6. Résoudre les équations.

Exercice 1 – Décomposition d'une force

Une force

$$F = 250N$$

est appliquée avec un angle

$$\theta = 40^\circ$$

par rapport à l'horizontale.

Déterminer :

1. les composantes F_x et F_y ;
2. la norme retrouvée à partir des composantes.

Exercice 2 – Plan incliné sans frottement

Un solide de masse

$$m = 8kg$$

est placé sur un plan incliné faisant un angle

$$\alpha = 30^\circ.$$

Le contact est supposé parfaitement lisse.

On prendra

$$g = 9.81m.s^{-2}.$$

Déterminer :

1. le poids ;
2. les composantes du poids ;
3. la réaction normale ;
4. l'accélération du solide.

Exercice 3 – Traction sur un plan incliné

Un solide de masse

$$m = 12\text{kg}$$

est posé sur un plan incliné de

$$20^\circ.$$

Une force

$$T = 150\text{N}$$

est appliquée par une corde faisant un angle

$$15^\circ$$

au-dessus du plan.

Le contact est supposé sans frottement.

Déterminer :

1. les projections du poids ;
2. les projections de la tension ;
3. la réaction normale ;
4. l'accélération du solide.