TP 7 : Méthode d'Euler et circuit du premier ordre

Matériel disponible
Un compilateur Python
Objectifs du TP
"Mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque."

1 Rappels sur la méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode numérique d'équations différentielles du premier ordre de la forme

$$\forall x \in I, y'(t) = f(t, y(t))$$

, où I est réel et f, une fonction réelle. En particulier, cette méthode est applicable à la (dé)-charge d'un condensateur, qui répond à l'équation (e étant la tension du générateur qui alimente le condensateur (échelon de tension, créneaux, sinus...)) :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{e}{\tau}$$

: ici,

$$f(t, y(t)) = \frac{e(t) - y(t)}{\tau}$$

. L'idée est subdiviser l'intervalle I en segments d'égales longueurs ;

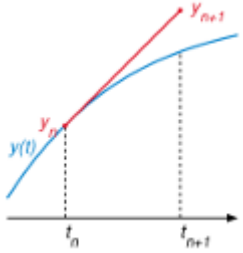
$$t_n = a + n\frac{b-a}{N}, 0 \leq n \leq N$$

, puis d'utiliser l'approximation suivante :

$$y'_n \simeq \frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n}$$

, pour en déduire

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n} = f(t_n, y_n)$$



Les valeurs intermédiaires sont alors données par la relation de récurrence

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n)f(t_n, y_n), 0 \leq n \leq N$$

, ce qui est le schéma d'Euler dit explicite.

2 Résolution par la méthode d'Euler

On s'intéresse donc ici à la résolution, sur $[a, b] = [t_0, t_1]$ de l'équation :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{e}{\tau}, u(0) = u_0 \quad (1)$$

On considère d'abord une fonction créneau T-périodique de rapport cyclique $\lambda \in [0, 1]$ valable

$$e(t) = \begin{cases} E_0, & \text{si } t \in [0, \lambda T], \\ 0, & \text{si } t \in [\lambda T, T]. \end{cases} \quad (2)$$

Dans un premier temps, le choix de N vous est laissé. On déclarera T ainsi que τ, t_0, t_1, le nombre de points N, et toute autre constante d'intérêt, de manière globale, tout en haut d script. Voici les valeurs conseillées (tout devra être converti en SI) :

- $t_0 = 0, t_1 = 3, N = 1000$,
- $T = 1, \lambda = 0.5, E_0 = 1$,
- $u_0 = 0, C = 1\mu F, R = 100k\Omega$.

1. Écrire une fonction $creneau(t)$ qui représentera la fonction e.
2. Définir la fonction $f(u, t)$ que l'on utilisera ici, telle que $\frac{du}{dt} = f(t, u(t))$.
3. Écrire une fonction $euler(f, u0, t, N)$ implémentant la méthode d'Euler explicite.
4. Définir alors t comme un tableau allant de t_0 à t_1 en N points, et tracer la solution et la fonction créneau sur le même graphique.
5. Changer le script afin que le choix de N points ne vous soit plus laissé : demandez au programme de découper l'intervalle en un nombre N assez grand afin que l'écart maximal entre u_{n+1} et u_n ne dépasse 0.1 en valeur absolue. A quel nombre de points cela correspond-il ? Et pour un critère de 0.01 ?

3 Régimes limites

On revient pour la suite du TP, au cas N=1000 fixé.

6. Avec la même approximation que dans la première partie, on peut calculer la dérivée de la tension comme suit :

$$\frac{du}{dt}(t_n) \simeq \frac{u(t_{n+1} - u_n}{t_{n+1} - t_n}$$

, Écrire alors une fonction $diff(f, t)$ qui calcule la dérivée de la fonction f par rapport à t.

N.B : cette dérivée a un point de moins que la fonction originale, puisque le point $n = N$ n'est pas défini. Il faudra donc créer une nouvelle variable

$$tt = np.linespace(t0, t1, N-1)$$

pour le temps.

7. Faites un peu varier les différents paramètres T et τ du système et tracez sur deux graphiques l'évolution de la tension et du courant au cours du temps. Que remarquez-vous dans la limite où $\tau/T \to$? A quoi un condensateur est-il équivalent en régime permanent ? Est-ce cohérent ?
8. Même question dans la limite $\tau/T \to \infty$.
9. Mêmes questions quand le rapport cyclique n'est plus égal à 1/2.

4 Conservation de l'énergie

Dans cette partie, on fixe tous les paramètres du système. On se place dans le cas où $T = 10\tau$.

10. Tracer l'énergie stockée dans le condensateur au cours du temps.
11. Calculer et tracer la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance.
12. Calculer et tracer la dérivée de l'énergie stockée dans le condensateur au cours de temps.
13. Que remarquez-vous ?

5 Précision de la méthode

La méthode d'Euler est simple mais l'erreur induite peut être assez élevée si le pas est choisi trop grand. Ici, on a la chance de connaître la solution exacte. Dans cette partie, on fixe encore tous les paramètres du système. On se place de plus dans le cas où $T = 10\tau$.

14. Écrire une fonction $sol(T, \tau, u0, tprime, N)$ qui est la solution analytique de l'équation recherchée, en fonction de la variable de temps $tprime$ (il est nécessaire de redéfinir une nouvelle variable de temps dans la mesure où on va changer N, et où t a déjà été définie plus haut).
15. Écrire une fonction $erreur(N, T, \tau, u0)$ qui calcule la norme infinie de l'écart entre la solution analytique et la solution trouvée par la méthode d'Euler :

$$erreur(N, T, \tau, u0) = ||sol(T, \tau, u0, tprime, N) - euler(f, u0, tprime, N)||_\infty = \max_{tprime \in [t_1, t_2]} |sol(T, \tau, u0, tprime, N) - euler(f, u0, tprime, N)|$$

16. Tracer alors $erreur(N, T, \tau, u0)$ en fonction de N en échelle log-log. Quelle semble être la loi approximative reliant $erreur$ et N ?