TD 1 MP*/MPI* 2024-2025

Suites et séries

1 Exercices faciles

1. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+nu_n}$
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et convergente et déterminer sa limite.
   Pour un n donné, calculer $\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n+1}}$ et en déduire une expression de u_n en fonction de n.

2. Montrer que $\left(u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n+p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et convergente.
   Quelle est sa limite ?

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.
   • Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent de même limite notée γ et appelée constante d'Euler ou d'Euler-Mascheroni
   • Déterminer la limite (si elle existe) de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

4. On considère la suite vérifiant $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} = \dfrac{7u_n+6}{u_n+2}$
   a. Montrer qu'elle est bien définie et à termes dans $\mathbb{R}_+^*$.
   b. Etudier sa convergence en étudiant comme une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ quelconque.
   c. Etudier sa convergence en montrant que, si on note a et b les solutions de $f(x) = x$, alors $\left(\dfrac{u_n - a}{u_n - b}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

5. **Mines Telecom MP : Recherche d'une limite**
   Donner la limite de $S_n = \displaystyle\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque $n \to +\infty$.

6. **Mines Télécom PSI 2017? : étude d'une suite**
   Étudier la convergence de la suite de terme général $\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$.

2 Exercices moyens

7. **(CCP)**
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j=n}} \frac{1}{ij}$.
Donner un équivalent simple de u_n.

8. **CCP** Etude d'une suite
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$ est convergente, en précisant sa limite (notée ℓ)
Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$

9. **Mines MP 2018 : Suite complexe classique**
On prend $u_0 \in \mathbb{C}$ et on définit : la suite (u_n) par la relation de récurrence
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + |u_n|\right)$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3 Exercices plus difficiles

10. **CCP (ou +)** Valeurs d'adhérence
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $u_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$
   a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
   b. Déterminer l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

11. **Mines MP 2018 : Lien ou pas entre deux assertions**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.
On considère les deux propositions suivantes :
$(P_1) : a_n = o(\frac{1}{n})$
$(P_2) : \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge
Trouver les implications entre (P_1) et (P_2).

12. **ENS PC 2017 : Suite récurrente**
Soit $a > 0$, $\mu \in]1, +\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et pour tout n : $u_{n+1} = 2^n . u_n^{\mu}$
Déterminer la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

13. **(Centrale)** Suite de solutions d'équation
a. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $x^n = x + n$ admet une unique solution u_n dans $]1, 2]$
   b. Déterminer la limite (si elle existe) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   c. Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

14. **X-ESPCI PC 2018 : Fonctions vérifiant une condition**
Trouver toutes les fonctions f continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.