D.S. n° 1 de mathématiques

Durée : 2 heures. Les calculatrices sont interdites.
On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.
On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on admet que la suite $(H_n - \ln n)$ converge vers un réel noté γ.
On rappelle que $2 < \mathrm{e} = \exp(1) < 3$.

1. Dresser le tableau des variations de la fonction

$$f\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$$

2. Quelle est la nature des séries $\sum \dfrac{\ln n}{n}$ et $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$?
3. Montrer que, pour tout $n \geq 3$,

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \leq \frac{\ln n}{n}.$$

Soient, pour chaque n supérieur ou égal à 3,

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = S_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2.$$

4. Déterminer un équivalent de S_n quand n tend vers ∞.
5. Montrer que la suite (u_n) est convergente, de deux manières :
   (a) en utilisant le théorème de la limite monotone ;
   (b) en utilisant une série télescopique.

Soit, pour chaque n supérieur ou égal à 3, $T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

6. Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 3, $T_{2n} = H_n \cdot \ln 2 + S_n - S_{2n}$.
7. Montrer que la suite (T_{2n}) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$\sigma \,:\, x \mapsto \sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}.$$

2. Exhiber deux nombres réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{\pi} \left(\alpha t^2 + \beta t\right) \cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

3. Montrer que, si $t \in]0, \pi]$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

4. Démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue : si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, alors

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin(xt)\mathrm{d}t = 0.$$

5. Montrer que la fonction φ définie sur $[0, \pi]$ par

$$\varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0, \pi],\ \varphi(t) = \frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

6. Conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3

Pour chacune des propriétés suivantes, dites si elle est vraie ou fausse. Et prouvez votre réponse.

1. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0.
2. Si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, alors la suite (u_n) converge.
3. Si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0, alors la suite (u_n) converge.
4. Si les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.