CORRIGÉ DU D.S. N° 1 DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1. La fonction f est dérivable et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

x	0		e		$+\infty$
$y'(t)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

2. La série $\sum \frac{\ln n}{n}$ est divergente car $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\forall n \geq 3$, $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$. La suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$:
— est décroissante à partir du rang 3 car la fonction f est décroissante sur $[e, +\infty[$ d'après la q. 1 ;
— tend vers 0 d'après les croissances comparées.
Donc la série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est convergente d'après le théorème des séries alternées.

3. Soit $n \geq 3$. La fonction f est continue et décroissante sur $[3, +\infty[$ d'après la q. 1, d'où, pour tout $x \in [n, n+1]$, $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{\ln n}{n}$.
Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1}\, dx \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x}\, dx \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln n}{n}\, dx$.
Donc $\boxed{\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \dfrac{1}{2}(\ln n)^2 \leq \dfrac{\ln n}{n}.}$

4. La fonction f est continue et décroissante sur $[3, +\infty[$, d'où

$$\int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x}\, dx \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leq \int_3^{n} \frac{\ln x}{x}\, dx,$$

pour tout n supérieur ou égal à 3. D'où

$$\int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x}\, dx \leq S_n \leq \frac{\ln 3}{3} + \int_3^{n} \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

Donc

$$\frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} \leq S_n \leq \frac{\ln 3}{3} + \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}.$$

En divisant chaque membre par $\dfrac{1}{2}(\ln n)^2$, on obtient deux gendarmes qui tendent vers 1.
D'où $\dfrac{S_n}{\frac{1}{2}(\ln n)^2} \longrightarrow 1$. Donc $\boxed{S_n \sim \dfrac{1}{2}(\ln n)^2.}$

5. <u>Première méthode</u> (théorème de la limite monotone) : La suite (u_n) est décroissante car

$$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - S_n - \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 + \frac{1}{2}(\ln n)^2 = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 + \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

qui est négatif d'après la q. 3. Elle est minorée car $S_n \geq \dfrac{(\ln(n+1))^2}{2} - \dfrac{(\ln 3)^2}{2}$ d'après la q. 4, d'où

$$u_n \geq \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} - \frac{(\ln n)^2}{2} \geq -\frac{(\ln 3)^2}{2}$$

et cette constante est donc un minorant.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc convergente.

Seconde méthode (série télescopique) :
La suite (u_n) a la même nature que la série télescopique $\sum(u_n - u_{n-1})$.
Or $u_n - u_{n-1} = \dfrac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}(\ln(n))^2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1))^2$ et

$$(\ln(n-1))^2 = \left(\ln n + \ln(1-\frac{1}{n})\right)^2 = (\ln n)^2 - 2\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o(\frac{\ln n}{n^2}).$$

D'où $u_n - u_{n-1} \sim \frac{-\ln n}{2n^2}$ qui ne change pas de signe. De plus la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge.}}$

6. $T_{2n} = \displaystyle\sum_{k=2}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} = \sum_{p=1}^{n}\frac{\ln 2p}{2p} - \sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p-1)}{2p-1}$, en séparant les indices pairs et impairs. D'où
$T_{2n} = 2\times\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln 2 + \ln p}{2p} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k} = \ln 2\cdot\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{n}\frac{\ln p}{p} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k} = \ln 2\cdot\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} + \sum_{p=3}^{n}\frac{\ln p}{p} - \sum_{k=3}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}.$
Donc $\boxed{T_{2n} = H_n \cdot \ln 2 + S_n - S_{2n}.}$

7. $H_n - \ln n$ tend vers γ, d'où $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$. D'après la q. 5, il existe une contante K telle que $S_n = \dfrac{1}{2}(\ln n)^2 + K + o(1)$. Par suite, $S_{2n} = \dfrac{1}{2}(\ln(2n))^2 + K + o(1)$ et $T_{2n} = H_n \cdot \ln 2 + S_n - S_{2n} =$ $[\ln n + \gamma + o(1)]\cdot\ln 2 + \left[\dfrac{1}{2}(\ln n)^2 + K + o(1)\right] - \left[\dfrac{1}{2}(\ln(2n))^2 + K + o(1)\right] = \gamma\ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + o(1)$.
Donc $\boxed{T_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma\cdot\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot(\ln 2)^2.}$

Exercice 2 (extrait de Mines-Ponts 2023 Math 2 MP/MPI)

1. Le réel $\sigma(x)$ est défini si, et seulement si, la série $\sum \frac{x^k}{k^2}$ converge.

   Si $|x|>1$, alors $\left|\frac{x^k}{k^2}\right| = \mathrm{e}^{k\ln|x|-2\ln k} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$ par croissances comparées. D'où la série $\sum \dfrac{x^k}{k^2}$ diverge grossièrement.

   Si $x\in[-1,1]$, alors $\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$ et la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge d'après le critère de Riemann. D'où la série $\sum \frac{x^k}{k^2}$ converge absolument.

   Donc $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } \sigma \text{ est } [-1,1].}$

2. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On note $P=\alpha X^2+\beta X$. Ainsi $P'=2\alpha X+\beta$ et $P''=2\alpha$.
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On peut intégrer par parties (car les fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\int_0^\pi P(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \left[P(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi P'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t = 0 + \left[P'(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi P''(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\mathrm{d}t$$

   or $\displaystyle\int_0^\pi P''(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\mathrm{d}t = \left[2\alpha\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^\pi = 0$ et $\displaystyle\left[P'(t)\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{(-1)^nP'(\pi)-P'(0)}{n^2}$ d'où

$$\int_0^\pi \left(\alpha t^2+\beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n\left(2\pi\alpha+\beta\right)-\beta}{n^2}$$

   En choisissant $\beta=-1$ et $\alpha=\dfrac{1}{2\pi}$, on obtient $(-1)^n\left(2\pi\alpha+\beta\right)-\beta = 1$, donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}}$$

3. Soit $t\in]0,\pi]$. Alors $\sin\frac{t}{2}\neq 0$. Par récurrence :
   - Initialement, $\sin\left(t+\frac{t}{2}\right) = \sin\frac{t}{2}\cos t + \sin t\cos\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2}\cos t + 2\sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}$, d'où

$$\frac{\sin\left(\frac{3t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{t}{2}-1\right) = \cos t = \sum_{k=1}^{1}\cos(kt).$$

   - Supposons que l'égalité soit vraie à un rang n. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1}\cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} + \cos\left((n+1)t\right) = \frac{\sin\left((n+1)t-\frac{t}{2}\right)+2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left((n+1)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

     Or $\sin\left((n+1)t-\frac{t}{2}\right) = \sin\left((n+1)t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left((n+1)t\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ donc

$$\begin{aligned}\sin\left((n+1)t-\tfrac{t}{2}\right)+2\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\cos\left((n+1)t\right) &= \sin\left((n+1)t\right)\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)+\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\cos\left((n+1)t\right)\\ &= \sin\left((n+1)t+\tfrac{t}{2}\right)\\ &= \sin\left(\tfrac{(2n+3)t}{2}\right)\end{aligned}$$

     D'où l'égalité au rang $n+1$.
   - On conclut que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}}$$

α

Voir une autre méthode en dernière page.

4. Soit un réel $x>0$. On effectue une intégration par parties avec les fonctions φ et $t\mapsto\dfrac{-\cos(xt)}{x}$ qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = \left[\varphi(t)\frac{-\cos(xt)}{x}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \varphi'(t)\frac{\cos(xt)}{x}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\varphi(0) - \frac{1}{x}\varphi(\pi)\cos(\pi x) + \frac{1}{x}\int_0^\pi \varphi'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t.$$

- Le premier terme tend vers 0 si x tend vers $+\infty$.
- Le deuxième aussi d'après le théorème des gendarmes car

$$0 \leq \frac{1}{x}\left|\varphi(\pi)\cos(\pi x)\right| \leq \frac{1}{x}\left|\varphi(\pi)\right|.$$

- Enfin $\left|\int_0^\pi \varphi'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\pi \left|\varphi'(t)\cos(xt)\right|\mathrm{d}t \leq \int_0^\pi \left|\varphi'(t)\right|\mathrm{d}t$ qui est une constante K ne dépendant plus de x. Ainsi $0 \leq \frac{1}{x}\left|\int_0^\pi \varphi'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{K}{x}$. D'après le théorème des gendarmes, $\frac{1}{x}\int_0^\pi \varphi'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t$ tend vers 0.

On a ainsi prouvé le lemme de Riemann-Lebesgue.

5. La fonction φ est continue en 0 car $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-2\pi t}{2\pi t} \xrightarrow[t\to 0]{} -1 = \varphi(0)$. Elle est dérivable sur $]0,\pi]$ et

$$\forall t \in]0,\pi], \varphi'(t) = \frac{(2t-2\pi)\sin(t/2) - (1/2)(t^2-2\pi t)\cos(t/2)}{4\pi\sin^2(t/2)} = \frac{4(t-\pi)\sin(t/2) - (t^2-2\pi t)\cos(t/2)}{8\pi\sin^2(t/2)}.$$

Quand t tend vers 0,

$$4(t-\pi)\sin\frac{t}{2} - (t^2-2\pi t)\cos\frac{t}{2} = 4(t-\pi)\left(\frac{t}{2} + o\left(t^2\right)\right) - (t^2-2\pi t)\left(1+o(t)\right) = t^2 + o(t^2) \sim t^2$$

d'où $\varphi'(t) \sim \frac{t^2}{8\pi(t/2)^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2\pi}$. Le théorème de la limite de la dérivée s'applique, donc φ est dérivable en 0, $\varphi'(0) = \frac{1}{2\pi}$ et φ' est continue en 0. Or φ' est continue aussi sur $]0,\pi]$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi].}$

6. D'après la question 2, $\sigma(1) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} S_n$, où

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^\pi \frac{t^2-2\pi t}{4\pi}\mathrm{d}t$$

d'après la question 3. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la question 5, d'où le lemme de Riemann-Lebesgue s'applique :

$$\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

donc $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 - \int_0^\pi \frac{t^2-2\pi t}{4\pi}\mathrm{d}t = \left[\frac{3\pi t^2 - t^3}{12\pi}\right]_0^\pi = \frac{3\pi^3-\pi^3}{12\pi}$ Donc $\boxed{\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}}$

EXERCICE 3. (Merci à Romain)

1. VRAI. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose $\sum u_n$ convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{\infty} u_k = 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2. VRAI. On suppose $\sum (u_{n+1} - u_n)$ convergente.

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + u_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} (u_{k+1} - u_k) + u_0 \in \mathbb{R}$.

donc (u_n) converge.

3. FAUX : On pose $u_n = \ln(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
alors $u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(1) = 0$
mais (u_n) diverge.

4. FAUX. On pose $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 2$.

On a : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$

La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ tend vers 0 en décroissant donc $\sum v_n$ converge d'après le critère des séries alternées.

Or $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 + \underset{n\to\infty}{o}\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2\right) = v_n - \frac{1}{2n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

donc $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ qui ne change pas de signe

donc $\sum (u_n - v_n)$ et $\sum \left(-\frac{1}{2n}\right)$ sont de même nature.

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge d'après le critère de Riemann, donc $\sum (u_n - v_n)$ diverge.

Comme $\sum v_n$ converge, on a : $\sum u_n$ diverge.

(u_n) et (v_n) sont équivalentes mais leurs séries ne sont pas de même nature.

Exo 2 (autre méthode) (Merci à Romain)

3. Soit $t \in]0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(e^{ikt}) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} (e^{it})^k$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{it} \cdot \frac{1-e^{itn}}{1-e^{it}}\right) \quad \text{car } t \in]0,\pi] \text{ donc } e^{it} \neq 1.$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{it} \cdot \frac{e^{int/2}(e^{-int/2}-e^{int/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2}-e^{it/2})}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{it(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})} \cdot \frac{-2i\sin(nt/2)}{-2i\sin(t/2)}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}$$

$$\cancel{= \left(\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)\frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}}$$

$$\cancel{\text{donc } \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} = \frac{\cos(nt)\sin(\frac{t}{2}) + \sin(nt)\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos(nt)-1)}$$

$$\text{donc } \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}\left[2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{2}t - \frac{t}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{2}t + \frac{t}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$

car pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sin(a) - \sin(b) = \mathrm{Im}(e^{ia} - e^{ib}) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{i\frac{b-a}{2}}\right)\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{a+b}{2}} \cdot 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Finalement : $$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}}$$