D.S. n° 2 de mathématiques

Durée : 2 heures. Cet énoncé contient deux exercices. Les calculatrices sont interdites.
On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.
On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1

- On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si, pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.
- On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si, pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.

1. (a) Montrer qu'une suite réelle vérifiant la propriété (P_1) vérifie la propriété (P_2).
   (b) Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie la propriété (P_1).

2. Dans cette question seulement, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, pour tout $n \geq 1$.
   (a) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie-t-elle la propriété (P_1) ?
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$?
   (c) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie-t-elle la propriété (P_2) ?

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.
   (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie.
   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. On note $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver, pour tout entier naturel $N \geq 1$, la relation :
   $$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N$$
   (c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (P_2).

4. (a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge.
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_1).

Exercice 2

Notations :

- n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- E désigne l'ensemble $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E est noté E^* et est appelé le dual de E.
- $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de E.
- Pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, on note J_r la matrice $\sum\limits_{i=1}^{r} E_{i,i}$.
- Pour chaque $A \in E$, on définit la forme linéaire $T_A \in E^*$ par $T_A(M) = \operatorname{tr}(AM)$. Et l'ensemble H_A par $H_A = \{M \in E \mid \operatorname{tr}(AM) = 0\}$.

On pourra utiliser sans démonstration le théorème suivant, qui est au programme de la première année :

Si $A \in E$ est de rang $r \in [\![1, n]\!]$, alors il existe deux matrices inversibles U et V de E telles que $UAV = J_r$.

1. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et on note $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in E$.
   (a) Montrer que H_A est un hyperplan de E. Déterminer une équation et une base de H_A.
   (b) Exhiber une matrice inversible M appartenant à H_A.

2. (a) Soit $A = (a_{k,l})_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}$ une matrice de E. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $T_A(E_{i,j})$.
   (b) En déduire que, pour toute forme linéaire $f \in E^*$, il existe une unique matrice A de E telle que $f = T_A$.
   (c) En utilisant l'application $\varphi : E \to E^*,\ A \mapsto T_A$, déterminer la dimension du dual E^*.

3. On considère la matrice $P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de E.
   (a) Vérifier que P est inversible et que, pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, la matrice P appartient à H_{J_r}.
   (b) En déduire que chaque hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.

4. Soit une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f(M \cdot N) = f(N \cdot M)$ pour toutes matrices M et N de E. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $f = \lambda \operatorname{tr}$.