Corrigé du D.S. n° 2 de mathématiques

Exercice 1 (extrait de Centrale PSI 2009 Math 1)

1. (a) On suppose que (a_n) est une suite réelle qui vérifie (P_1) : si (u_n) est une suite pour laquelle la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) est bornée, car convergente (elle tend vers 0). Daprès l'hypothèse, la série $\sum a_n u_n$ converge. On en déduit que la suite (a_n) vérifie (P_2).

   (b) On suppose que (a_n) est une suite complexe telle que la série $\sum a_n$ converge absolument. Soit (u_n) une suite bornée et M un majorant des $|u_n|$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n u_n| \leq M|a_n|$. La convergence absolue de la sarie $\sum a_n$ entraîne la convergence de $\sum |a_n u_n|$ donc aussi celle de $\sum a_n u_n$ et, par conséquent, la suite (a_n) vérifie (P_1).

2. Dans cette question, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

   (a) En posant $u_n = (-1)^n$, on obtient une suite bornée. De plus, $\sum a_n u_n$ est la série $\sum \frac{1}{n}$, or cette série diverge. Donc la suite (a_n) ne vérifie pas (P_1).

   (b) Posons, pour tout $n \geq 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est continue et décroissante sur $[2; +\infty[$, d'où

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) = \int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln t}\, dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$$

   en comparant série et intégrale. Or $\ln(\ln(n+1))$ tend vers $+\infty$, d'où S_n tend vers $+\infty$, donc la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

   (c) Posons $u_0 = u_1 = 0$ et, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$. D'apès le théorème des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge car la suite $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$ tend vers zéro en décroissant. Or $\sum a_n u_n$ est la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ qui diverge. Donc la suite (a_n) ne vérifie pas (P_2).

3. (a) La convergence de la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ entraîne celle de $\sum (a_{n+1} - a_n)$ car la convergence absolue entraîne la convergence. On en déduit (par télescopage) que la suite (a_n) converge.

   (b) En posant $U_{-1} = 0$, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N} a_n (U_n - U_{n-1}) = \sum_{n=0}^{N} a_n U_n - \sum_{n=0}^{N} a_n U_{n-1}.$$

   On opère le changement d'indice $k = n - 1$ dans la seconde somme et on regroupe les termes de même indice pour obtenir :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = a_N U_N + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_0 U_{-1} = a_N U_N + \sum_{n=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) U_k.$$

   (c) Supposons que la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (U_n) converge, donc elle est bornée. Comme la série $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge absolument, la question 1b indique que la série $\sum (a_n - a_{n+1}) U_n$ converge. De plus, $(a_n U_n)$ est une suite convergente (car c'est, d'après la question 3a, le produit de deux suites convergentes). L'égalité de la question 3b prouve alors que la série $\sum a_n u_n$ converge. On a prouvé la propriété (P_2) pour la suite (a_n).

4. (a) Posons $u_n = \frac{|a_n|}{a_n}$ si $a_n \neq 0$ et $u_n = 1$ sinon. Dans les deux cas, $a_n u_n = |a_n|$. Ainsi la série $\sum a_n u_n$ diverge tandis que la suite (u_n) est bornée puisque formée de termes de module 1. La suite (a_n) ne vérifie donc pas (P_1).

   (b) On a montré à la question 1b qu'une suite (a_n) telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie (P_1). Et que, réciproquement, une suite (a_n) telle que la série $\sum a_n$ ne converge pas absolument, ne vérifie pas (P_1). Finalement, les suites vérifiant (P_1) sont celles dont la série associée converge absolument.

Exercice 2

1. (a) Le calcul donne $AM = \begin{bmatrix} a+b & c+d \\ a+b & c+d \end{bmatrix}$ et $\text{tr}(AM) = a+b+c+d$. On en déduit que la forme linéaire T_A est non nulle car $T_A(A) = 1+1+1+1 = 4 \neq 0$ et que

$$M \in H_A \iff a+b+c+d = 0 \iff d = -a-b-c \iff M = a(E_{1,1}-E_{2,2})+b(E_{2,1}-E_{2,2})+c(E_{1,2}-E_{2,2})$$

Donc $\boxed{H_A \text{ est un hyperplan de } E}$ car c'est le noyau de la forme linéaire non nulle T_A. Une équation de H_A est $\boxed{a+b+c+d=0}$ et une base de H_A est $\boxed{(E_{1,1}-E_{2,2}, E_{2,1}-E_{2,2}, E_{1,2}-E_{2,2})}$

(b) La matrice $\boxed{M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$ est inversible (puisque $\det(M) = -1 \neq 0$) et ses coordonnées vérifient l'équation de l'hyperplan H_A, donc $M \in GL_2(\mathbb{R}) \cap H_A$.

2. (a) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\boxed{T_A(E_{ij}) = a_{j,i}}$ car c'est la trace de la matrice

$$A \cdot E_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ j & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{j,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Analyse — Soient $f \in E^*$ et $A = (a_{i,j}) \in E$: si $f = T_A$, alors $f(E_{i,j}) = T_A(E_{i,j}) = a_{j,i}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ d'après la question précédente. Ceci prouve l'unicité de la matrice A.

Synthèse — Soit $A \in E$ la matrice définie par $f(E_{i,j}) = a_{j,i}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors $f(E_{i,j}) = T_A(E_{i,j})$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Or $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de E, d'où $f(M) = T_A(M)$ pour toute matrice $M \in E$. Donc $f = T_A$. Ceci prouve l'existence de la matrice A.

(c) L'application φ est linéaire. Soient, en effet, A et B dans E et λ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall M \in E,\ T_{\lambda A+B}(M) = \text{tr}((\lambda A+B)M) = \lambda \text{tr}(AM) + \text{tr}(BM) = \lambda T_A(M) + T_B(M).$$

Elle est de plus bijective d'après la question 2b. C'est donc un isomorphisme de E vers E^*. Ces deux espaces vectoriels ont donc la même dimension. On conclut que $\boxed{\dim E^* = \dim E = n^2}$

3. (a) L'ensemble des colonnes de P est une permutation des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les colonnes de P sont donc libres, par suite $\boxed{P \text{ est une matrice inversible}}$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $E_{i,i}P = \begin{cases} E_{1,n} \text{ si } i=1 \\ E_{i,i-1} \text{ si } i \geq 2 \end{cases}$ et donc $\text{tr}(E_{i,i}P) = 0$

Puis, par linéarité de la trace, $T_{J_r}(P) = \sum\limits_{i=1}^{r} \text{tr}(E_{i,i}P) = 0$, donc $\boxed{P \text{ appartient à } H_{J_r}}$

(b) Soit H un hyperplan de E : c'est donc le noyau d'une forme linéaire non nulle f. D'après la question 2b, il existe une matrice $A \in E$ telle que $f = T_A$. Notons $r \in [\![0,n]\!]$ le rang de cette matrice A. Remarquons que $r \neq 0$, sans quoi la matrice A serait nulle et la forme T_A aussi. Selon le théorème rappelé dans l'énoncé, il existe alors deux matrices inversibles U et V telles que $UAV = J_r$.
Or $P \in H_{J_r}$, d'où $\text{tr}(UAVP) = \text{tr}(J_rP) = 0$. D'après les propriétés de la trace et l'associativité du produit matriciel, $\text{tr}(U(AVP)) = \text{tr}((AVP)U) = \text{tr}(A(VPU)) = 0$, donc $VPU \in H_A$.
Comme les matrices V, P et U sont inversibles, la matrice $N = VPU$ l'est aussi et elle appartient à $H_A = H$. En conclusion, $\boxed{\text{tout hyperplan } H \text{ de } E \text{ contient au moins une matrice inversible}}$

4. On sait grâce à la question 2b qu'il existe $A \in E$ telle que $f = T_A$. De $f(MN) = f(NM)$, on tire que $T_A(MN) = T_A(NM)$. D'où $\text{tr}(AMN) = \text{tr}(ANM)$. D'où $\text{tr}(AMN) = \text{tr}(MAN)$. D'où $\text{tr}\,[(AM-MA)N] = 0$.

Ceci est vrai pour toute matrice N, d'où la forme linéaire T_{AM-MA} est nulle. Donc la matrice $AM-MA$ est nulle, à nouveau d'après la question 2b.

Ceci est vrai pour toute matrice M. La matrice A commute donc avec toutes les matrices carrées. On en déduit que : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ A = \lambda I_n$.

On conclut : $f = T_{\lambda I_n}$. Autrement dit : $\boxed{f = \lambda\,\text{tr}}$