Corrigé du D.S. n° 3 de mathématiques

— Exercice 1 —

1) L'intégrale I$=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ est impropre en 0 et en 1. Elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $I_1=\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ et $I_2=\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ convergent.

L'intégrale I_1 est impropre en 0. Or $\ln(1-t)\underset{t\to 0}{\sim}-t$, d'où $\dfrac{\ln(1-t)}{t}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}-1$. D'où l'intégrale I_1 converge car elle est faussement impropre.

L'intégrale I_2 est impropre en 1. Or $\dfrac{\ln(1-t)}{t}\underset{t\to 1^-}{\sim}\ln(1-t)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 \ln(1-t)\,dt$ converge car $\displaystyle\int_{1/2}^c \ln(1-t)\,dt=[(t-1)\ln(1-t)-t]_{1/2}^c\underset{c\to 1^-}{\longrightarrow}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$. Donc l'intégrale I est convergente.

2) On fait le CDV $x=-\ln(1-t)$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant de $[0,1[$ vers $[0,+\infty[$:

$$\lambda=-\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt=-\int_0^{+\infty}\frac{-x}{1-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{e}^{-x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,dx.$$

3) On fait une IPP : $\displaystyle\int_0^a x\mathrm{e}^{-kx}\,dx=\left[x\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{-k}\right]_0^a-\int_0^a\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{-k}\,dx\underset{a\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{k^2}$ par croissances comparées. Donc l'intégrale I_k converge et $I_k=\dfrac{1}{k^2}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^n I_k=\sum_{k=1}^n\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-kx}\,dx=\int_0^{+\infty}x\left(\sum_{k=1}^n\mathrm{e}^{-kx}\right)dx.$

Or, pour tout $x>0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n\mathrm{e}^{-kx}=\mathrm{e}^{-x}\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ en reconnaissant une somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{-x}\neq 1$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}=\int_0^{+\infty}x\,\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx$, cette dernière intégrale étant impropre en 0.

5) Soit $x\geq 0$. D'après le TAF, $\exists\in]0,x[,\ \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}^c\cdot(x-0)$. Or $\mathrm{e}^c\geq 1$. Donc $x\leq\mathrm{e}^x-1$.
(*Autre méthode* : dresser le tableau des variations de la fonction $[0,+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\mathrm{e}^x-x-1$ pour montrer qu'elle est positive. *Ou encore* : utiliser la convexité de la fonction exp.)

6) $\displaystyle\lambda-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,dx-\int_0^{+\infty}x\,\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx=\int_0^{+\infty}x\,\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx.$

D'après la question précédente, pour tout $x>0$, $x\leq\mathrm{e}^x-1$, d'où $0\leq\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}\leq 1$ en divisant par $\mathrm{e}^x-1>0$.
D'où $0\leq\displaystyle\int_0^{+\infty}x\,\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx\leq\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\,dx=\frac{1}{n}$. Donc, pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq\lambda-\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n}$.

7) D'après la question précédente et en utilisant le théorème des gendarmes, la série $\sum\frac{1}{k^2}$ converge et $\lambda=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

— Exercice 2 (d'après CCP TSI 2011, épreuve Maths 1) —

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,dt$.

1) Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_2 \geq x_1 > 0$. Alors $\dfrac{\mathrm{e}^t}{x_2+t} \leq \dfrac{\mathrm{e}^t}{x_1+t}$ pour tout $t \in [0,1]$, d'où (par croisssance de l'intégrale) $f(x_2) \leq f(x_1)$. Donc f est décroissante.

2) Soit $x_0 > 0$ et $x \in \left[\dfrac{x_0}{2}, +\infty\right[$: $f(x) - f(x_0) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x_0+t}\right) dt = (x_0 - x)\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)(x_0+t)}\,dt.$
Or, pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)(x_0+t)} \leq \frac{\mathrm{e}}{x x_0} \leq \frac{2\mathrm{e}}{x_0 x_0}$, donc $|f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{2 \cdot \mathrm{e} \cdot |x - x_0|}{x_0^2}$.
Quand x tend vers x_0, $\dfrac{2 \cdot \mathrm{e} \cdot |x - x_0|}{x_0^2}$ tend vers zéro, et d'après l'inégalité de la question précédente, $|f(x) - f(x_0)|$ aussi, d'où $f(x)$ tend $f(x_0)$. Donc la fonction f est continue en x_0. Ceci est vrai pour tout $x_0 > 0$. Donc f est continue sur $]0, +\infty[$.

3) Pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{\mathrm{e}^t}{x+1} \leq \dfrac{\mathrm{e}^t}{x+t} \leq \dfrac{\mathrm{e}^t}{x}$, d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+1}\,dt \leq f(x) \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x}$, donc $\dfrac{\mathrm{e}-1}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{\mathrm{e}-1}{x}$. On divise chaque membre de l'inégalité précédente par $\dfrac{\mathrm{e}-1}{x}$ qui est strictement positif : $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{f(x)}{\frac{\mathrm{e}-1}{x}} \leq 1$, d'où $\dfrac{f(x)}{\frac{\mathrm{e}-1}{x}}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, d'après le théorème des gendarmes. Donc $f(x) \sim \dfrac{\mathrm{e}-1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

4) D'après le théorème des accroissements finis, $\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^c \cdot (t-0)$, où $c \in]0,t[$. D'où $\mathrm{e}^c \leq \mathrm{e}$ pour tout $t \in [0,1]$, donc $|\mathrm{e}^t - 1| \leq M \cdot t$ pour tout $t \in [0,1]$, avec $M = \mathrm{e}$.

5) $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{x+t}\,dt$. D'une part, $g(x) \geq 0$; d'autre part, $g(x) \leq \displaystyle\int_0^1 M\,dt \leq M$. Donc la fonction g est bornée.

6) $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,dt = f(x) - \ln(1+x) + \ln(x)$, d'où $f(x) = g(x) + \ln(1+x) - \ln(x)$, donc $\dfrac{f(x)}{\ln(x)} = \dfrac{g(x)}{\ln(x)} + \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)} - 1$ tend vers -1 car $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et g est bornée et $\ln(1+x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Donc $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand x tend vers 0^+.

— Problème —

1) L'ensemble $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites car la suite nulle est bornée et toute combinaison linéaire de suites bornées est bornée. En effet :
si $\exists (M,N) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} |u_n| \leq M \\ |v_n| \leq N \end{cases}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha u_n + \beta v_n| \leq |\alpha||u_n| + |\beta||v_n| \leq |\alpha| M + |\beta| N$ qui est un majorant.
Soit $u \in \mathcal{P}$. Alors $u(\mathbb{N}) = \{u_0, u_1, \dots u_{T-1}\}$ est un ensemble fini, donc borné, donc $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$. De plus la suite nulle est un élément de $\mathcal{P}$. Soient $u, v \in \mathcal{P}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $(\lambda u + \mu v)(n+T) = \lambda u(n+T) + \mu v(n+T) = \lambda u(n) + \mu v(n) = (\lambda u + \mu v)(n)$, donc $\mathcal{P}$ est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$: d'une part, $c_n = 1$ et $c_{n+T} = 1$, donc c est T-périodique.
D'autre part, $w_{n+T} = e^{\frac{2i(n+T)\pi}{T}} = e^{\frac{2in\pi}{T}} e^{\frac{2i\pi T}{T}} = w_n$ donc w est T-périodique. Les suites c et w appartiennent donc à $\mathcal{P}$.

2) Soient $u, v \in \mathcal{P}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors $\varphi(\lambda u + \mu v) = ((\lambda u + \mu v)(0), \dots, (\lambda u + \mu v)(T-1)) = \lambda(u_0, \dots u_{T-1}) + \mu(v_0, \dots, v_{T-1}) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$, donc φ est linéaire.
De plus, on peut toujours définir une suite T-périodique à partir de ses T premiers termes, et ce, de façon unique. Donc φ est bijective, c'est donc un isomorphisme. Donc $\dim \mathcal{P} = \dim \mathbb{C}^T = T$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, on va montrer que $A(u,n) = A(u,0)$. Pour cela, on effectue la division euclidienne de n par T : $\exists!(q,r) \in \mathbb{N} \times [\![0, T-1]\!],\ n = qT + r$.
Alors $A(u,n) = \sum_{k=0}^{T-1} u_{qT+r+k} = \sum_{k=0}^{T-r-1} u_{qT+r+k} + \sum_{k=T-r}^{T-1} u_{qT+r+k} = \sum_{k=0}^{T-r-1} u_{r+k} + \sum_{k=T-r}^{T-1} u_{r+k-T} = \sum_{i=r}^{T-1} u_i + \sum_{j=0}^{r-1} u_{r+k-T}$ (en posant $i = r+k$ et $j = r+k-T$). On obtient $A(u,n) = A(u,0)$, qui ne dépend donc pas de n.

4) $M(c) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} 1 = \frac{1}{T}T = 1$. Et $M(w) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} e^{\frac{2ik\pi}{T}} = 0$ (car la somme des racines $T-$ièmes de l'unité est nulle) si $T \neq 1$ et $M(w) = 1$ si $T = 1$.

5) Soient $u, v \in \mathcal{P}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors $M(\lambda u + \mu v) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1}(\lambda u_k + \mu v_k) = \frac{\lambda}{T}\sum_{k=0}^{T-1} u_k + \frac{\mu}{T}\sum_{k=0}^{T-1} v_k = \lambda M(u) + \mu M(v)$, donc M est linéaire. De plus, $M(c) \neq 0$ d'après la question précédente. D'où M est une forme linéaire non nulle, donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{P}$.

6) Soient $u, v \in \mathcal{P}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors $\Pi(\lambda u + \mu v) = (\lambda u + \mu v) + M(\lambda u + \mu v)c = \lambda u + \mu v + \lambda M(u)c + \mu M(v)c = \lambda\Pi(u) + \mu\Pi(v)$, donc Π est linéaire (en utilisant la linéarité de M).
De plus $\Pi(\Pi(u)) = \Pi(u - M(u)c) = \Pi(u) - M(u)\Pi(c)$. Or $\Pi(c) = c - M(c)c = c - c = 0$, donc $\Pi(\Pi(u)) = \Pi(u)$, donc Π est un projecteur.
D'une part, $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker}(\Pi - id) = \operatorname{Im}(\Pi)$. D'autre part, si $u \in \operatorname{Ker}\Pi$, alors $u = M(u)c \in \operatorname{Vect}(c)$, donc $\operatorname{Ker}\Pi \subset \operatorname{Vect}(c)$. De plus $\Pi(c) = 0$, d'où $\operatorname{Ker}\Pi = \operatorname{Vect}(c)$. Donc Π projette sur $\mathcal{P}_0$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(c)$.

7) Soit u une suite : elle appartient au noyau de D *ssi* elle est constante, *ssi* elle est colinéaire à c. Donc (c) est une base de $\operatorname{Ker}(D)$.

8) Soit $n \in \mathbb{N}$: $D(w)(n) = e^{\frac{2i(n+1)\pi}{T}} - e^{\frac{2in\pi}{T}} = e^{\frac{2in\pi}{T}}\left(e^{\frac{2i\pi}{T}} - 1\right) = 2i\sin\frac{\pi}{T}e^{\frac{i\pi}{T}}e^{\frac{2in\pi}{T}}$, ce qui reste une suite géométrique.

9) Si u est une suite bornée, alors $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$. Par l'inégalité triangulaire, $|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2M$. D'où la suite $D(u)$ est encore bornée. Donc $\mathcal{B}$ est stable par D.
Notons u' l'image par D d'une suite $u \in \mathcal{P}$: alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_{n+T} = u_{n+1+T} - u_{n+T} = u_{n+1} - u_n = u'_n$, d'où $u' \in \mathcal{P}$. Donc $\mathcal{P}$ est stable par D, ce qui fait que l'endomorphisme induit $\hat{D}$ est bien défini.

10) Soit $u \in \mathcal{P}$: alors $M(D(u)) = \sum_{k=0}^{T-1}(u_{n+1} - u_n) = u_T - u_0$ (somme télescopique), d'où $M(D(u)) = 0$.
Donc $D(\mathcal{P}) \subset \operatorname{Ker} M$. D'après le théorème du rang, ces deux espaces vectoriels ont même dimension $(T-1)$, car $\operatorname{Ker}\hat{D}$ et $\operatorname{Im} M$ sont tous les deux de dimension 1. Donc $D(\mathcal{P}) = \operatorname{Ker} M = \mathcal{P}_0$.

11) Soit u une suite : $D(u) = \lambda u$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (\lambda+1)u_n$ ssi u est géométrique de raison $\lambda + 1$. Donc E_λ est la droite vectorielle engendrée par la suite $((\lambda+1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

12) $((\lambda+1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$ ssi $\lambda + 1$ est une racine $T-$ième de l'unité. Et $((\lambda+1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_0$ ssi $\lambda + 1$ est une racine $T-$ième de l'unité différente de 1.