D.S. n° 3 de mathématiques

Durée : 4 heures.

Cet énoncé contient un exercice et un problème.
Les calculatrices sont interdites.

On attachera un grand soin à la rédaction.
En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

Exercice

1. Justifier que l'ensemble E des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

2. Soit une fonction $f \in E$. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale
$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)\, dt$$
est absolument convergente.

3. Soit une fonction $f \in E$. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est bornée.

4. Soit une fonction $f \in E$. Justifier que, tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(f)(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-u} f(u)\, du$.

5. Est-il vrai que, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(f)(x) = 0$?

6. Soit une fonction $f \in E$. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée $\Phi(f)'$ est égale à $\Phi(f) - f$.

7. Justifier que l'application $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E.

8. Déterminer toutes les fonctions $f \in E$ telles que $\Phi(f) = 0$.

9. L'endomorphisme Φ est-il injectif ? surjectif ?

10. Déterminer toutes les fonctions $f \in E$ telles que $\Phi(f) = f$.

11. Déterminer le spectre de Φ.

12. Prouver que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'intégrale $K_i = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i e^{-t}\, dt$ est convergente et la calculer.

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(P)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\, dt$ définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice $M = (m_{ij})$ de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

14. Cette matrice M est-elle inversible ?

Problème

Notations et objectifs

- *Dans tout ce problème, on désigne par* α *un nombre réel* **positif**, *et on se propose d'étudier la fonction* f *définie par l'intégrale suivante lorsqu'elle est convergente :*

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt$$

- *On se propose de prouver dans la partie A l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale* $f(\alpha)$, *ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de* f.
- *Puis on étudie dans les parties B et C le comportement de* f *aux voisinages de* 0 *et de* 2.

Partie A — Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ *à l'aide des deux intégrales suivantes :*

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt \qquad \text{et} \qquad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt$$

1. **Etude de la convergence de l'intégrale** $I(\alpha)$.
   Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.
2. **Etude de l'absolue convergence de l'intégrale** $J(\alpha)$.
   (a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente si $\alpha > 1$.
   (b) Déterminer, pour tout entier naturel k, la valeur de l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\, dt$.
   (c) Démontrer l'encadrement suivant, pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\, dt \leqslant \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

   (d) Préciser pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.
3. **Etude de la convergence de l'intégrale** $J(\alpha)$.
   (a) L'intégrale $J(0)$ est-elle convergente ?
   (b) Prouver la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ si $\alpha > 0$.
4. **Domaine de définition de la fonction** f.
   En déduire le domaine de définition de la fonction f ainsi que le domaine de convergence absolue de l'intégrale définissant $f(\alpha)$.

Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α *appartient à ce domaine de définition.*

Partie B — Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0

On se propose, dans cette partie, d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0, et on écrit, à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$$

5. **On pose $K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$, pour $\alpha \in]0,1]$.**
   (a) Montrer que :
   $$K(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$$
   (b) Montrer que :
   $$0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt + \int_1^{\pi/2} (1-\cos(t))\,dt$$
   (c) En déduire la limite de $K(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

6. **Limite de l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$.**
   (a) Justifier l'égalité suivante :
   $$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$$
   (b) Déterminer la limite de $\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$, puis de $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$ quand α tend vers 0.
   (c) En déduire la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

Partie C — Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2

7. **Une autre expression de la fonction f.**
   (a) Démontrer la convergence de l'intégrale suivante pour $0 < \alpha < 2$:
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$$
   (b) Etablir que, si $0 < \alpha < 2$:
   $$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$$
   (c) En déduire que la fonction f est à valeurs strictement positives sur $]0,2[$.

8. **Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2.**
   On considère la fonction auxiliaire φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$.
   (a) Montrer que φ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On notera encore φ son prolongement.
   (b) Montrer que la fonction φ admet sur $[0,\pi]$ un minimum strictement positif noté μ (qu'on ne demande pas d'expliciter).
   (c) Etablir les inégalités suivantes, pour $0 < \alpha < 2$:
   $$f(\alpha) \geqslant \alpha \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \geqslant \alpha\mu\frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$
   (d) En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.